

定数係数線型偏微分方程式系 の解の存在について.

東大 理 大 島 利 雄

§1. 序

P を成分が定数係数の偏微分作用素の行列とし, f を領域 Ω 上の函数のベクトルとする.

$$Pu = f$$

という方程式において, f が *compatibility condition* を満たすならば解 u が存在するか? という問題を扱う.

P が *Cauchy-Riemann* や *de Rham* の *system* の場合はよく知られているし, Ω が *convex* のときは, 多くの函数空間で上の事実が成立することが知られている.

記号

P : n 変数の定数係数線型偏微分作用素の環

M : 有限生成の P -module すなわち方程式

$\mathcal{F}$: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}', \mathcal{E}$; $\mathcal{O}$ のいずれかの *sheaf*

P, M は $\mathbb{R}^n$ 上の *sheaf* とみなし, 同一視する.

$\mathcal{F}^M$: 方程式 M の solution sheaf ie. $\mathcal{H}om(M, \mathcal{F})$

Ω を $\mathbb{R}^n$ 中の領域 (ただし, $\mathcal{F} = \mathcal{O}$ のときは, Ω は $\mathbb{C}^n$ 中の擬凸領域) とし, $\mathcal{F}(\Omega)$ を Ω 上の section とする.

定義 P -module N が M -convex とは.

$$(1) \quad \text{Ext}^k(M, N) = 0 \quad \forall k \geq 1 \quad \text{が成立すること.}$$

[4] の記号に従えば, 任意の locally closed set Z に対し

$$(2) \quad \text{RHom}(M, \text{R}\Gamma_Z \mathcal{F}) = \text{R}\Gamma_Z \text{R}\mathcal{H}om(M, \mathcal{F})$$

$Z = \Omega$ とおくと

$$\left. \begin{aligned} \text{Ext}^i(M, \mathcal{F}) &= 0 & \forall i \geq 1 \\ H^i(\Omega, \mathcal{F}) &= 0 & \forall i \geq 1 \end{aligned} \right\} \text{であるから}$$

$$(3) \quad \text{Ext}^k(M, \mathcal{F}(\Omega)) = H^k(\Omega, \mathcal{F}^M)$$

$\mathcal{F} = \mathcal{B}$ のときは, $\mathcal{B}$ が flabby sheaf であることより.

$$(4) \quad \text{Ext}^k(M, \Gamma_Z(\mathcal{B})) = H_Z^k(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^M)$$

§2. $\mathbb{R}^n$ 、 Ω が compact connected component をもつときに, $\mathcal{B}(\Omega)$ が M -convex となるための条件

定理1 Ω を $\mathbb{R}^n$ 、 Ω が compact connected component をもつような領域とする.

$\mathcal{B}(\Omega)$ が M -convex ならば $\dim \text{proj. } M \leq 1$

証明 仮定より, open set V と, V に含まれる空集合でない compact set K が存在して, $\Omega = V \setminus K$ となる.

このとき、 $\forall i \geq 1$ に対し、

$$(5) \quad 0 \rightarrow H^i(V, \mathcal{B}^M) \rightarrow H^i(\Omega, \mathcal{B}^M) \rightarrow H_K^{i+1}(V, \mathcal{B}^M) \rightarrow 0$$

が、exact sequence となる。(cf. [5])

$\mathcal{B}(\Omega)$ が M -convex であるから、(3)、(5) より

$$(6) \quad H_K^{i+1}(V, \mathcal{B}^M) = 0 \quad i \geq 1 \quad \text{となる.}$$

平行移動することにより、 $K \ni \{0\}$ と仮定してよい。

$$(7) \quad 0 \leftarrow M \leftarrow P^{r_0} \xleftarrow{tP_0} \cdots \leftarrow P^{r_i} \xleftarrow{tP_i} P^{r_{i+1}} \xleftarrow{tP_{i+1}} P^{r_{i+2}} \leftarrow \cdots$$

を M の projective resolution とすると、(t は transposed)

$$(8) \quad \mathcal{D}'_{\{0\}}^{r_i}(V) \xrightarrow{P_i} \mathcal{D}'_{\{0\}}^{r_{i+1}}(V) \xrightarrow{P_{i+1}} \mathcal{D}'_{\{0\}}^{r_{i+2}}(V) \quad \text{exact.}$$

を示せば、 $\mathcal{D}'_{\{0\}}^l \leftarrow P^l$ という自然な同型により、

$$P^{r_i} \xrightarrow{P_i} P^{r_{i+1}} \xrightarrow{P_{i+1}} P^{r_{i+2}} \quad \text{exact} \quad \text{となるので.}$$

$$(9) \quad \text{Ext}^{i+1}(M, P) = 0 \quad i \geq 1$$

(8) の証明 (cf. [5]) まず、 $P_{i+1} \cdot P_i = 0$ は明らか。次に、

$f \in \mathcal{D}'_{\{0\}}^{r_{i+1}}(V) \subset \mathcal{B}_K^{r_{i+1}}(V)$ が $P_{i+1}f = 0$ を満たせば、(4)、(6) より $u \in \mathcal{B}_K^{r_i}(V)$ が存在して、 $P_i u = f$ となる。 u の Fourier 変換は整函数、 f の Fourier 変換は多項式となるので、[7] の Theorem 7.6.11. の u をとり直したときの評価よりあがでる。

次に、任意の有限生成 P -module N をとり、 N の projective resolution を (10) とおく、

$$(10) \quad 0 \leftarrow N \leftarrow P^{l_0} \xleftarrow{tQ_0} \cdots \leftarrow P^{l_i} \xleftarrow{tQ_i} P^{l_{i+1}} \xleftarrow{tQ_{i+1}} P^{l_{i+2}} \leftarrow \cdots$$

$$(9) \text{ より, } \begin{aligned} \operatorname{Ext}^2(M, N) &= \operatorname{Ext}^3(M, \ker tQ_0) = \cdots \\ &= \operatorname{Ext}^{n+1}(M, \ker tQ_{n-2}) \end{aligned}$$

$\dim \operatorname{proj} M \leq n$ だから、上式 = 0. よって、証明おわり.

定理 2 $\dim \operatorname{proj} M \leq 1$ ならばすべての領域 Ω に対し $\mathcal{B}(\Omega)$ は M -convex となる.

証明 $Z = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ とおくと、(11) が exact sequence となる.

$$(11) \quad \cdots \rightarrow H^i(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^M) \rightarrow H^i(\Omega, \mathcal{B}^M) \rightarrow H_{\mathbb{Z}}^{i+1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^M) \rightarrow \cdots$$

$$\mathbb{R}^n \text{ は } M\text{-convex であるから } H^i(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^M) = 0 \quad i \geq 1$$

$$\text{一方 (4) より } H_{\mathbb{Z}}^{i+1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^M) = \operatorname{Ext}^{i+1}(M, \Gamma_{\mathbb{Z}}(\mathcal{B}^M)) = 0 \quad i \geq 1$$

$$\text{よって, } H^i(\Omega, \mathcal{B}^M) = 0 \quad i \geq 1 \quad \text{Q.E.D.}$$

定理 3 $n = 2$ のとき

$$\operatorname{Ext}^2(M, P) \neq 0 \text{ ならば } \mathcal{B}(\Omega) \text{ が } M\text{-convex} \Leftrightarrow H^1(\Omega, \mathbb{C}) = 0$$

$\operatorname{Ext}^2(M, P) = 0$ ならばすべての領域 Ω に対し、 $\mathcal{B}(\Omega)$ は M -convex となる.

証明 定理 1, 2. より、 $H^1(\Omega, \mathbb{C}) = 0$ ならば、 $\mathcal{B}(\Omega)$ が M -convex なることを示せば十分. そこで、 P の任意の ideal J に対し、 $\operatorname{Ext}^1(P/J, \mathcal{B}(\Omega)) = 0$ を示せば十分である.

J の生成元を $P_1, \dots, P_l$ とするとき、方程式 $P_i u = f_i$ (但し、 $f_i \in B(\Omega)$, $1 \leq i \leq l$) において、compatibility condition を f_i 達が満たすときに解の存在を示せばよい。

$P_i = P'_i Q_i$ とおき、 P'_i 達に共通因子がないようにできる。方程式 $P'_i w = f_i$ ($1 \leq i \leq l$) は maximally overdetermined system になり、しかも f_i 達はこの方程式の compatibility condition をも満たしているので、解 w が存在する。[6] あとは、単独方程式 $Q u = w$ を解けばよいが、 $B(\Omega)$ で考えているから解 u が存在する。 Q.E.D.

§ 3. Partial de Rham system

$M = \mathcal{P} / (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}) \mathcal{P}^2$ のときを考える。 ($n \geq 2$)

Ω の点の座標を (x_1, x_2, y) とかく。 ($y \in \mathbb{R}^{n-2}$)

$$\begin{array}{ccc} \pi : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x_1, x_2, y) & \longmapsto & y \end{array} \quad \text{projection}$$

$\Omega \ni x, x'$ に対し、同値関係 $x \sim x'$ とは、 $\pi(x) = \pi(x')$ で、かつ x と x' が、 $\pi^{-1} \pi(x)$ の同じ連結成分に属すること、と定義し、 Ω をこの同値関係で割ったものを B と定義する。

$$\mathbb{R}^n \supset \Omega \xrightarrow[\text{open, fibre connected}]{\pi_1} B \xrightarrow[\text{local homeo.}]{\pi_2} \pi(\Omega) \subset \mathbb{R}^{n-2}$$

$$\pi = \pi_2 \circ \pi_1$$

$\mathcal{F}_{n-2} : \mathbb{R}^{n-2}$ 上の $\mathcal{F}$ に対応する sheaf } と定義すると.

$$\mathcal{F}_B = \pi_2^{-1} \mathcal{F}_{n-2}$$

$$(12) \quad \mathcal{F}^M = \pi^{-1} \mathcal{F}_{n-2} = \pi_1^{-1} \mathcal{F}_B$$

例 $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus A$ とする.

1. $A = \{x_1 = 0, y = 0\}$ のとき

$D = \mathbb{R}' \setminus \pi(A)$ とおくと. Leray の covering による co-homology により, 簡単な計算で次式がわかる.

$$\text{Ext}^1(M, \mathcal{F}(\Omega)) = \Gamma(D, \mathcal{F}_{n-2}) / \Gamma(\mathbb{R}', \mathcal{F}_{n-2})|_D$$

これは, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ のときは消えるが, 他のは消えない.

たとえば, $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ のとき, $\varphi \in \Gamma(D, \mathcal{E}), \varphi \notin \Gamma(\mathbb{R}', \mathcal{E})|_D$

とすれば, $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}')$, $\int \theta(x_1) dx_1 = 1$ となる θ を 1 つとる

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} = (\theta(x_1/y) / y) \cdot \varphi(y) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

が解けない例となる.

2. i) $A = \{x_1 = x_2 = 0\}$

ii) $A = \{x_1 = x_2 = 0, y \geq 0\}$

iii) $A = \{x_1 = x_2 = y = 0\}$

$$\text{Ext}^1(M, \mathcal{F}(\Omega)) = \Gamma_{\pi(A)}(\mathbb{R}', \mathcal{F}_{n-2}) \text{ となり}$$

i) すべての場合において消えない.

ii) $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ のときのみ消える.

iii) $\mathcal{F} = \mathcal{A}, \mathcal{E}$ のときのみ消える.

具体的に、解けない例をかくと、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1 + ix_2} \cdot \varphi(y) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{i}{x_1 + ix_2} \cdot \varphi(y) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \delta(x_1) \cdot Y(x_2) \cdot \varphi(y) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right.$$

但し、 $0 \neq \varphi \in \Gamma_{\pi(A)}(\mathbb{R}^1, \mathbb{F}_{n-2})$

定理4 $B(\Omega)$ が M -convex

$$\Leftrightarrow H^1(\pi_1^{-1}(y), \mathbb{C}) = 0 \quad \text{for } \forall y \in \mathbb{R}^{n-2}$$

補題1 $\mathcal{B}_B$ は B 上の flabby sheaf である。

証明 $B = \bigcup_{\lambda \in I} B_\lambda$ という open covering を

$\pi_2: B_\lambda \xrightarrow{\sim} \pi_2(B_\lambda)$ が homeo. となるようにとる。

$\forall U \subset B$ open $\forall f \in \Gamma(U, \mathcal{B}_B)$ に対し、

$$\mathcal{M} = \{ g \in \Gamma(V, \mathcal{B}_B); \exists J \subset I, V = U \cup \bigcup_{\lambda \in J} B_\lambda, g|_U = f \}$$

とおくとき、 $\exists g \in \mathcal{M}, g \in \Gamma(B, \mathcal{B}_B)$ を示せばよい。

g' が g の拡張のとき $g < g'$ と定義すると、Zorn's lemma より極大元 $g \in \Gamma(V, \mathcal{B}_B)$ の存在がわかる。 $V \neq B$ ならば、

$B_\lambda \not\subset V$ となる $\lambda \in I$ が存在する。 $h = g|_{B_\lambda \cap V}$ とおくと

B_{n-2} が flabby であることから、 h の拡張の $\bar{h}$ が存在する。

$$\bar{h} \in \Gamma(B_\lambda, \mathcal{B}_B) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi_2(B_\lambda), \mathcal{B}_{n-2})$$

$\bar{g}$ を V 上で g 、 B_λ 上で $\bar{h}$ と定めれば g の真の拡張になり、 g の極大性に反する。よって $g \in \Gamma(B, \mathcal{B}_B)$ が示された。

補題2 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ のとき $|x| = \max_i |x_i|$ とおく。

Ω が次の条件を満たすならば $H^1(\Omega, \mathcal{B}^M) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall y \in \mathbb{R}^{n-2} \text{ に対し, } \pi^{-1}(y) \text{ が連結かつ単連結} \\ U_0 = \{|x_1| < 1, |x_2| < 1, |y| < 1\} \subset \Omega \subset \{|y| < 1\} \end{array} \right.$$

証明 $\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$ ($i=1, 2, f_i \in \mathcal{B}(\Omega)$) という方程式が

f_i 達が compatibility condition (i.e. $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$) を満たすならば解けるということを示せばよい.

$\Omega = \bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda$ という open convex covering をとれば.

$u_\lambda \in \Gamma(U_\lambda, \mathcal{B})$ が存在して $\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} = f_i|_{U_\lambda}$ とできる.

$\forall x \in \Omega$ に対し, $\exists \lambda_0 \in I$ s.t. $U_{\lambda_0} \ni x$ として.

x と $(0, 0, \pi(x))$ とを結ぶ $\pi^{-1} \cdot \pi(x)$ 内の curve をとり, それを l とおくと, $\{U_{\lambda_i}\}_{0 \leq i \leq m}$ が存在して.

$$U_{\lambda_{i-1}} \cap U_{\lambda_i} \neq \emptyset \quad \bigcup_{i=0}^m U_{\lambda_i} \supset l \quad U_{\lambda_m} = U_0 \quad \text{となる.}$$

$\delta > 0$ が存在して, $V_\delta = \{|y| < \delta\} \subset \bigcap_{i=1}^m \pi(U_{\lambda_{i-1}} \cap U_{\lambda_i}) \subset \mathbb{R}^{n-2}$

$$u|_{\pi^{-1}(V_\delta) \cap U_{\lambda_0}} = \pi^* \sum_{i=1}^m v_i + u_{\lambda_0} \quad \text{と定めればよい.}$$

$$\text{ただし, } \left\{ \begin{array}{l} v_i \in \Gamma(V_\delta, \mathcal{B}_{n-2}) \\ \pi^* v_i = u_i - u_{i-1} \quad \text{on } \pi^{-1}(V_\delta) \cap U_{\lambda_{i-1}} \cap U_{\lambda_i} \end{array} \right.$$

$\pi^{-1}(y)$ が単連結であることより, u が well-defined であることがわかる.

定理4の証明 [8] の証明の手順と同様にすればよい.

$\text{Ext}^2(M, \mathcal{B}(\Omega)) = 0$ は常に成立する.

$\Rightarrow$ の証明 $\mathcal{B}(\Omega)$ が M -convex ならば.

$$(13) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad \text{on } \pi^{-1}(y) \quad \text{but } \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

が解けることを示せばよい.

$$(14) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} = f_1 \cdot \delta(y) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = f_2 \cdot \delta(y) \end{cases} \quad \text{on } \Omega \quad \text{は解 } u \text{ が存在するので.}$$

それを, $V = \Omega \setminus \pi^{-1}(y)$ に制限すると.

$$(15) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad \text{on } V$$

$$\therefore u|_V \in \Gamma(V, \mathcal{B}^M) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi_1(V), \mathcal{B}_B)$$

補題 1 より, $\tilde{u} \in \Gamma(\Omega, \mathcal{B}^M)$ が存在して, $\tilde{u}|_V = u$

$w = u - \tilde{u}$ とおけば,

$$(16) \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x_1} = f_1 \cdot \delta(y) \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} = f_2 \cdot \delta(y) \end{cases} \quad \text{on } \Omega \quad \text{かつ } \text{supp } w \subset \pi^{-1}(y)$$

よって, $v = \int w \, dy$ は (13) を満たす.

⇐ の証明 [4] の記号を用いれば, 容易に (17) がわかる.

$$(17) \quad R\Gamma(B, R\pi_{1*}\pi_1^{-1}\mathcal{B}_B) = R\Gamma(\Omega, \pi_1^{-1}\mathcal{B}_B)$$

$$(18) \begin{cases} R^0\pi_{1*}\pi_1^{-1}\mathcal{B}_B = \mathcal{B}_B & (\pi_1: \text{open, fibre connected}) \\ R^1\pi_{1*}\pi_1^{-1}\mathcal{B}_B = 0 & (\text{補題 2}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } H^1(\Omega, \mathcal{B}^M) &= H^1(B, \mathcal{B}_B) && (17), (18) \text{ より} \\ &= 0 && (\text{補題 1}) \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

同様の考察により, 次の定理が示される.

定理 5 $\text{Ext}^1(M, \mathcal{D}'(\Omega)) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B \text{ の位相が Hausdorff.} \\ H^1(\pi^{-1}(y), \mathbb{C}) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n-2} \end{cases}$$

証明は次の2つの補題を使う.

補題 1 $y \in \mathbb{R}^{n-2}$ に対し, $V = \Omega \setminus \pi^{-1}(y)$ とおくと

$$\Gamma(\Omega, \mathcal{D}')|_V \cap \Gamma(V, \mathcal{D}'^M) = \Gamma(\Omega, \mathcal{D}'^M)|_V$$

補題 2 B が Hausdorff でない $\Rightarrow H^1(B, \mathcal{D}'_B) \neq 0$

証明 x, x' を分離されぬ2点とする. ($\pi_2(x) = \pi_2(x')$)

$$\left. \begin{array}{l} U_1 : x \text{ の近傍で } \pi_2 : U_1 \xrightarrow{\sim} \pi_2(U_1) \text{ homeo.} \\ U_2 = B \setminus \{x\} \end{array} \right\} \text{ ととる.}$$

$$(19) \quad \begin{array}{ccccccc} \rightarrow \Gamma(U_1, \mathcal{D}'_B) \oplus \Gamma(U_2, \mathcal{D}'_B) & \xrightarrow{P} & \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{D}'_B) & \rightarrow & H^1(B, \mathcal{D}'_B) & \rightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \text{exact} \\ (\varphi_1, \varphi_2) & \mapsto & \varphi_1 - \varphi_2 \end{array}$$

$\pi_2(x) \notin \pi(U_1 \cap U_2) \subsetneq \pi(U_1) \cap \pi(U_2) = \pi(U_1)$ であるから

$$(20) \quad \begin{cases} \varphi \in \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{D}'_B) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi(U_1 \cap U_2), \mathcal{D}'_{n-2}) \\ \varphi \in \Gamma(U_1, \mathcal{D}'_B) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi(U_1), \mathcal{D}'_{n-2}) \end{cases}$$

を満たす φ が存在する. 明らかに, $\varphi \notin \text{Im } P$. よって, P は surjective でないから $H^1(B, \mathcal{D}'_B) \neq 0$ Q.E.D.

同様に, 次の定理も成立する

定理 6 $\Omega = \text{int } \bar{\Omega}$ のとき

$$\text{Ext}^1(M, \mathcal{E}(\Omega)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B \text{ の位相が Hausdorff.} \\ H^1(\pi^{-1}(y), \mathbb{C}) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n-2} \end{cases}$$

参考文献

- [11] Ehrenpreis : Fourier Analysis in Several Complex Variables , New York.
- [12] Palamodov : Linear Differential Operators with Constant Coefficients , Nauka Moskva , 1967.
- [13] 佐藤 : Theory of hyperfunctions II , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo , Vol. 8 , 1960 , p.p. 387 - 437 .
- [14] Hartshorne : Residues and Duality . Lecture Notes in Math. 20 , Springer , Berlin , 1966.
- [15] 小松 : Relative cohomology of sheaves of solutions of differential equations , Sem. Lions Schwartz , 1966.
- [16] 松浦 : Finite type system of partial differential operators and decomposition of solutions of partial differential equations , 数理研講究録 22 , p.p. 10 - 17.
- [17] Hörmander : An Introduction to Complex Analysis in Several Variables , Van Nostrand , Princeton , 1966.
- [18] 鈴木 : この報告集にのる講演