

Nash 関数の重要な問題

(Important problems on Nash functions)

名大養 塩田昌弘 (Masahiro Shiota)

定義. $\mathbb{R}^n$ に含まれている, semialgebraic な C^∞ 多様体を Nash 多様体とよぶ. グラフが semialgebraic な Nash 多様体上の C^∞ 関数を Nash 関数とよぶ.

記号. M を常に Nash 多様体とする. $\mathcal{N}$ を M 上の Nash 関数の芽の層とする. $\mathcal{O}$ を実解析関数の芽の層とする. $\mathcal{N}(M)$ と $\mathcal{O}(M)$ をそれぞれ M 上の Nash 関数と実解析関数の環とする.

定義. $\mathcal{J}$ を $\mathcal{N}$ イデアルの連接層とする. もし連接層 $\mathcal{J}_i, i=1, 2, \dots$ が存在して, $\mathcal{J} = \bigcap_i \mathcal{J}_i$ となり, 各 i に対して $\bigcap_{j \neq i} \mathcal{J}_j \neq \mathcal{J}$ となるとき, $\mathcal{J}$ を無限とよぶ. 無限でない $\mathcal{J}$ を有限とよぶ. もし, M の有限 semialgebraic 開被覆 $\{U_i\}$ が存在して, 各 $\mathcal{J}|_{U_i}$ が $H^0(U_i, \mathcal{J}|_{U_i})$ で生成されているとき, $\mathcal{J}$ を強有限とよぶ.

注意. M がコンパクトのとき, 常に連接層は強有限. 一般に強有限層は有限. 有限でない連接層の例は $M = \mathbb{R}$, $\mathcal{J}$ の台 $= \mathbb{Z}$.

Nash 関数及びその層に関する色々な問題が多くの人達によって扱われてきた。しかし、重要な問題は決定的には解かれていない。これは偶然ではない。次に示す様に、その重要な問題は同値である。

予想 1. $\mathcal{N}(M)$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $\mathfrak{p}\mathcal{O}(M)$ は $\mathcal{O}(M)$ の素イデアル。

予想 2. $\mathcal{N}$ イデアルの有限層 $\mathcal{J}$ は $H^0(M, \mathcal{J})$ によって生成される。

予想 3. 同上の $\mathcal{J}$ に対して、自然な準同型

$$H^0(M, \mathcal{N}) \rightarrow H^0(M, \mathcal{N}/\mathcal{J})$$

は全射。

予想 4. $\mathcal{N}(M)$ の元 f と $\mathcal{O}(M)$ の元 f_1 と f_2 が $f = f_1 f_2$ を満たすとする。すると、 $\mathcal{N}(M)$ の元 g_1 と g_2 、 $\mathcal{O}(M)$ の元 φ_1 と φ_2 が存在して、 $\varphi_1 \varphi_2 = 1$, $f_1 = \varphi_1 g_1$, $f_2 = \varphi_2 g_2$ とできる。

もし予想 2 と 3 で既約な $\mathcal{J}$ のみを扱うとき、それぞれ予想 2', 3' と言うことにする。予想 1 で $\mathfrak{p}$ の高さが 1 のとき、予想 2 と 3 で各茎 $\mathcal{J}_x$ が単項イデアルのとき、それぞれ予想 1₁, 2₁, 3₁ とよぶ。

注意 [S]. (1) 予想 1 は局所的には正しい。すなわち、 x を M の点、 $\mathfrak{p}$ を $\mathcal{N}_x$ の素イデアルとするとき、 $\mathfrak{p}\mathcal{O}_x$ は素イデア

ル.

(2) 予想2と3で M がコンパクトでも J が連接 N 加群なら反例がある.

(3) 予想3で, M が0次元でないなら $H^1(M, N) \neq 0$.

(4) 予想4は局所的に正しい. 予想4は Nash 関数の Nash 分解は解析分解と同値だといっている.

(5) 予想1と4が正しければ, Nash 関数に関する問題のいくつかは実解析関数の問題に帰着できる. 多くの場合, 実解析の場合の方が容易. Cartan の定理 A と B が解析関数の層理論の基礎であったことから, もし予想2と3が正しければ Nash 関数の層理論が構成できることがわかる.

定理1. 予想1と2^rと3^rは同値. 予想1₁と2₁と2₁^rと3₁と3₁^rと4は同値. もし予想1が正しければ, 2と3は強有限な J に対して成り立つ.

定理2. 予想は次の場合に成り立つ.

(1) J で P のコハイト ≤ 1 .

(2) J で P が実しすなわち, P は $P^{-1}(0)$ 上で0になる Nash 関数全体), かつ $P^{-1}(0)$ の特異点は孤立点のみ.

(3) 2と3で J がいたる所コハイト ≤ 1 .

(4) 2 で各茎 $\mathcal{O}_x$ が実, かつ $p^{-1}(0)$ の Zariski 閉包と M の共通部分の特異点は孤立点のみ.

(5) 4 で $f^{-1}(0) \cap \text{Sing } f$ は孤立点のみ.

(6) 1 で $\mathcal{N}(M)/\mathcal{P}$ が正規. 2 と 3 で各茎 $\mathcal{N}_x/\mathcal{O}_x$ が正規.

(7) 1, 2, 3, 4 で M の次元が ≤ 2 .

参照

[B-C-R] J. Bochnak - M. Coste - M. F. Roy, *Géométrie Algébrique Réelle*, *Ergeb. Math.* 12, Springer, 1987.

[S] M. Shiota, *Nash manifolds*, *Springer Lecture Notes in Math.*, 1269, 1987.

Department of Mathematics
College of General Education
Nagoya University
Nagoya, Japan