

On Average of Some Arithmetical

q-Additive Functions

J.L. Mauclaure (C.N.R.S., 早稲田大学)

Leo Murata (明治学院大学)

自然数上で定義された複素数値関数のことを、我々は「数論的関数」と呼んでいる。数論的関数の研究では、その平均値、 $x^{-1} \sum_{n \leq x} f(n)$ 、を求める問題が重要である。最近、我々は、「 δ -additive function」と呼ばれる特殊な数論的関数に対して、その平均値を詳しく与えるかなり一般的な結果を得たので、それをここで紹介する。

1. δ -additive function の定義.

δ は 2 以上の自然数とする。一般に自然数 n は δ -進表示することか出来る：

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) \cdot \delta^k, \quad 0 \leq a_k(n) \leq \delta-1.$$

この表示を用いて、次の定義を置く。

定義 数論的関数 $f(n)$ が、更に次の条件を満たす時、 $f(n)$ は δ -additive であると言う。

$g(0) = 0$ で、更に n が上の g -進表示を持つ

時、常に $g(n) = \sum_{k=0}^{\infty} g(a_k(n) \cdot g^k)$ が成立。

この定義から分る通り、 $\{r \cdot g^k; 1 \leq r \leq g-1, k \in \mathbb{N}\}$ なる集合の上で g の値を与えれば、上の関係式によ、 g -additive function $g(n)$ が一意的に決まるし、逆も正しい。

2. 『Sum of Digits』に関する結果

g -additive function の最も有名な例は 『Sum of digits』と呼ばれる関数であらう。この関数を以下 $S_g(n)$ で表わすが、定義は次の通り。

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) \cdot g^k \text{ の時 } S_g(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n).$$

つまり、 n を g -進表示した時に各桁に現われる数字をすべて足えたものが $S_g(n)$ である。この関数は度々激減するが、大体漸増してゆく。

$S_g(n)$ の平均値については、いくつかの研究結果が発表されているが、次の Delange の結果は著しいものである。

定理 1 (H. Delange, 1975 [1])

1) m を自然数とする時、次が成立する。

$$\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_g(n) = \frac{g-1}{2 \log g} \log m + F\left(\frac{\log m}{\log g}\right).$$

ここで $F(x)$ は周期 1 を持つ周期関数である。($F(x)$ の定義式は無限級数を用いた複雑なものである。これは以下の話とあまり関係がないので、ここでは省略する。)

2) $F(x)$ は周期関数なので Fourier 展開が出来るが、その時の Fourier 係数は、次で与えられる：

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{2\pi i k x}$$

と書いた時、 $\zeta(s)$ を Riemann の zeta-function とし、

$$c_0 = \frac{g-1}{2 \log g} (\log 2\pi - 1) - \frac{g+1}{4},$$

$$c_k = i \frac{g-1}{2k\pi} \left(1 + \frac{2k\pi i}{\log g}\right)^{-1} \zeta\left(\frac{2k\pi i}{\log g}\right), \quad k \neq 0,$$

この結果から、「 $S_g(n)$ の平均値は $\log m$ の order で増大し、その error term は $O(1)$ である事」、更には、「この error term の $O(1)$ はこれ以上改良は出来ない事、つまり $\Omega(1)$ である事」等が読みとれる。

3. Delange の証明の out line.

§5 において我々は この Delange の結果を含む、より一般的な定理を示すが、我々の方法は Delange の方法と全く異

なっている。参考の爲、ここで、ごく大ざっぱに Delange の証明方針を見てみることにする。

1° Delange は次の等式から出発した。

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) \cdot q^k \quad \text{なら} \quad a_k(n) = \left[\frac{n}{q^k} \right] - q \left[\frac{n}{q^{k+1}} \right].$$

これより直ちに

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{m-1} a_k(n) = \frac{q-1}{2} m + \int_0^m \left(\left[\frac{t}{q^k} \right] - q \left[\frac{t}{q^{k+1}} \right] - \frac{q-1}{2} \right) dt.$$

従って

$$\sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{\log m}{\log q} \right]} \left(\sum_{n=0}^{m-1} a_k(n) \right)$$

に (1) 式を代入すると $\frac{q-1}{2} m$ の部分の和から main term の $\frac{q-1}{2 \log q} m \cdot \log m$ が出てくる。そして (1) 式の残りの部分の和等をうまく処理すると、これが $F\left(\frac{\log m}{\log q}\right)$ の形に書けるのである。

2° $F(x)$ の Fourier 係数 C_k を求めるには、基本的な式

$$C_k = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

を用いる。Delange はこの $F(x)$ に彼の結果 1) で得られた表示を代入し、この積分を直接計算する事にし、2) の C_k の値を求めた。

4. Delange の結果の別証明.

ここで §2 に挙げて Delange の結果を別の方法で証明してみたい。この方法は既にある程度まで一般化できている。それによる Delange の結果の拡張は §5 にある。しかし、一般的な方の証明は計算がかなりめんどうになる事、我々の証明方法は special case で十分おかり頂ける事、を考慮して、ここでは 定理 1 の証明 (の要点) にとどめることにする。

1° $S_g(n)$ は次の関数等式を満たす (cf [2]) :

$$s \int_1^{\infty} \frac{S_g([t])}{t^{s+1}} dt = \zeta(s) \frac{g^s - g}{g^s - 1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

2° 上の式の左辺は Laplace 変換の形に書き換える事が出来、更に e^{-u} との Convolution product の Laplace 変換を作ると

$$\int_0^{\infty} M(e^u) \cdot e^{-us} du = \frac{\zeta(s)}{s(s+1)} \times \frac{g^s - g}{g^s - 1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0,$$

を得る。ただし

$$M(t) = \frac{1}{t} \int_1^t S_g([v]) dv$$

であり、特に t とし $m \in \mathbb{N}$ とすれば、 $M(m) = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_g(n)$ となる事に注意する。

3° Laplace 逆変換を使うと, $\alpha > 0, t > 0$ として,

$$(2) \quad M(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\zeta(s)}{s(s+1)} \frac{8^s-8}{8^s-1} m^s ds.$$

4° ここで上の式の被積分関数の pole の位置, 及びそこでの留数を計算する.

① $s=0$ に 2 位の pole,

$$\text{留数} = \frac{8-1}{2 \log 8} \left\{ \log m - 1 + \log 2\pi \right\} - \frac{8+1}{4},$$

② $s = \frac{2\pi i k}{\log 8} \quad (k \in \mathbb{Z}^*)$ に 1 位の pole,

$$\text{留数} = i \frac{8-1}{2k\pi} \left(1 + \frac{2\pi i k}{\log 8} \right)^{-1} \zeta\left(\frac{2\pi i k}{\log 8}\right) \cdot m^{\frac{2\pi i k}{\log 8}},$$

③ $s = -1$ にも 1 位の pole があるが省略.

ここで, 上の数値と 定理 1 の 2) とを比べてみると,

$$s=0 \text{ の留数} = \left(\left\{ \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_8(n) \right\} \text{の leading term} \right) + C_0$$

$$s = \frac{2\pi i k}{\log 8} \text{ の留数} = C_k \times e^{-2\pi i k \frac{\log m}{\log 8}}$$

となり, 2 つの事が分る. 即ち,

$$\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_8(n) = \frac{\zeta(s)}{s(s+1)} \frac{8^s-8}{8^s-1} m^s \text{ の } s=-1 \text{ 以外の pole での留数の総和.}$$

5° この等式を 3° から導き出すには, 所謂 Perron's

method を使えばよい. $-\frac{1}{2} < \eta < 0$ なる η をとり, $\operatorname{Re}(s) = \eta$ の線上まで (2) 式の積分路を移動する. この際 $\alpha \pm iT$, $\eta \pm iT$ の 4 点から成る長方形の積分路をとって $T \rightarrow \infty$ とするのぞ,

- a) 4° に現われた留数すべての和は収束する,
- b) 長方形の積分路の上・下辺上の積分は $T \rightarrow \infty$ の時 0 になる,

の 2 つを証明しなくともはならないが, これは $|\zeta(\sigma+it)|$ の評価式等を用いれば, すぐに出来る.

6° 残りは

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{\zeta(s)}{s(s+1)} \frac{g^s - g}{g^s - 1} m^s ds$$

の計算であるが, $\operatorname{Re}(s) = \eta$ の線上では被積分函数を次の様に展開しなす事が出来る.

$$\frac{\zeta(s)}{s(s+1)} \cdot \frac{g^s - g}{g^s - 1} m^s = \frac{\zeta(s)}{s(s+1)} + (g-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta(s)}{s(s+1)} g^{ks}$$

右辺は絶対収束なので, この右辺を上式の積分に代入し,

$\int$ と $\sum$ とを入れかえる事が出来る. すると

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{\zeta(s)}{s(s+1)} (m g^k)^s ds$$

の形の項の無限和が出来るが, 一方で,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\zeta(s)}{s(s+1)} t^s ds = 0 \quad \text{if and only if } t \in \mathbb{N},$$

が証明できるので、結果問題の積分の値は0である事が示せる。これで 4° の最後の等式が正当化でき、従って Delange の結果の別証が得られた。

数論的関数の平均値を調べる問題ではしばしば Perron's method が使われるが、その場合 $F(s)$ を Dirichlet series とし

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) \frac{x^s}{s} ds$$

の形の積分を あつかわねばならない。ここで積分路を左へ移すと、被積分関数の留数が Dirichlet 係数の和の leading term を与え、残った積分の評価が error term を与えるのである。

上に述べた我々の証明で言うと面白い点は 6° に示した様に error term を与えるはずの積分が消えてしまった事である。その結果、被積分関数の無限個ある pole の留数と remainder term $F(x)$ の Fourier coefficient とが丁度 1 つづつ対応している事等が はっきり分るようになった。

5. Our main Theorem

ここでは Delange の結果を拡張して 定理 2 を述べるが、その前に必要な記号を準備する。

$g(n)$ を g -additive function とし、これから次の関数を作る：

$$(3) \quad f_r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g(r g^k) g^{-(k+1)s}, \quad 1 \leq r \leq g-1.$$

そして以下では、すべての r に対して、 $f_r(s)$ は g^s の有理関数になり、と仮定する。 この時、 $f_r(s)$ のすべての pole は孤立特異点になり、更に

$$\Pi_r = \left\{ p : p \text{ は } f_r(s) \text{ の pole で, } 0 \leq \operatorname{Im}(p) < \frac{2\pi}{\log g} \right\}$$

とおくと、これは有限集合になる。 $s=p$ で $f_r(s)$ を Laurent 展開し、これによつて $d(r,p)$, $C_{r,p}(n)$ ($1 \leq r \leq g-1$, $p \in \Pi_r$, $n \in \mathbb{Z}$) を定義する：

$$f_r(s) = \sum_{n=-d(r,p)}^{\infty} C_{r,p}(n) \cdot (s-p)^n.$$

即ち、 $d(r,p)$ とは $f_r(s)$ の $s=p$ に於ける pole の位数、 $C_{r,p}(n)$ は展開の係数である。更に、 $\operatorname{Re}(s) < \min_{p \in \Pi_r} \{\operatorname{Re}(p)\}$ なる左半平面に於て、 $f_r(s)$ は (3) 式とは別の Dirichlet 級数に展開できる事に注意し、この展開式を用いて、 $u(r)$

$E_r(n)$ ($1 \leq r \leq g-1$, $n \in \mathbb{Z}$) を定義する :

$$f_r(s) = \sum_{n=-u(r)}^{\infty} E_r(n) \cdot g^{ns}.$$

即ち, $u(r)$ とは $f_r(s)$ の $g^s = 0$ に於る pole の位数である.

又, 次の記号を用いる.

$$[x] = x \text{ の Gauss 記号,}$$

$$\langle x \rangle = x - [x],$$

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}, \quad 0 < a \leq 1, \quad \text{Hurwitz zeta,}$$

$$\zeta^{(h)}(s, a) = \frac{d^h}{ds^h} \zeta(s, a), \quad h \in \mathbb{N}.$$

定理 2.

$g(n)$ を g -additive function とし, すべての r について, (3) 式で定義した $f_r(s)$ が次の 2 つの条件を満たしていると仮定する:

i) $f_r(s)$ は g^s の有理関数である,

ii) $f_r(s)$ の pole ρ はすべて $\operatorname{Re}(\rho) > -\frac{1}{2}$ をみたす.

この時, Π_r , $d(r, \rho)$, $C_{r, \rho}(n)$, $u(r)$, $E_r(n)$ は上の様に定義でき, 更に $g(n)$ の平均値について次が成立する:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} g(n) &= \sum_{r=1}^{g-1} \left\{ A_r (\log m)^{d(r, 0)} + B_r + W_r(m) \right\} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{g-1} \sum_{\rho \in \Pi_r} \sum_{l=0}^{d(r, \rho)-1} m^{\rho} (\log m)^l \cdot F\left(\frac{\log m}{\log g}\right), \end{aligned}$$

ここで, $A_r, B_r, W_r(m)$ は次で定義される定数,

$$A_r = \begin{cases} \frac{C_{r,0}(0)}{g(d(r,0)!)} & s=0 \text{ or } f_r(s) \text{ の pole の時,} \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$

$$B_r = \begin{cases} 0 & s=0 \text{ or } f_r(s) \text{ の pole の時,} \\ \frac{f_r(0)}{g} & \text{その他,} \end{cases}$$

$$W_r(m) = \sum_{n=-u(r)}^{-1} E_r(n) \cdot w_r(n, m) \quad \text{with}$$

$$w_r(n, m) = \begin{cases} \frac{1}{m} g^{n+1} (1 - \langle g^n m \rangle) & \text{if } \langle g^n m \rangle \geq \frac{r+1}{g}, \\ \frac{1}{m} g^{n+1} \{ (g-1) \langle g^n m \rangle - r \} & \text{if } \frac{r+1}{g} > \langle g^n m \rangle \geq \frac{r}{g}, \\ \frac{1}{m} g^{n+1} \cdot \langle g^n m \rangle & \text{if } \frac{r}{g} > \langle g^n m \rangle. \end{cases}$$

又, 関数 $F_{r,p,e}(x)$ はすべて周期 1 の周期関数で, その Fourier 係数は, 以下の様に explicit に与えられる:

$$F_{r,p,e}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_{r,p,e}(k) \cdot \exp(2\pi i k x)$$

と書いた時,

$$A_{r,0,e}(0) = \frac{1}{e!} \sum_{\substack{i+j+h=d(r,0)-e \\ i,j,h \geq 0}} \frac{(-1)^j}{h!} C_{r,0}(i) \left\{ \zeta^{(h)}\left(0, \frac{r}{g}\right) - \zeta^{(h)}\left(0, \frac{r+1}{g}\right) \right\},$$

$$A_{r,1,e}(0) = \frac{1}{e!} \sum_{\substack{i+j+h=d(r,1)-e \\ i,j,h \geq 0}} \frac{(-1)^j}{h!} C_{r,1}(i) (1 - 2^{-j+1}) \times \\ \times \left\{ \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \left(\zeta\left(s, \frac{r}{g}\right) - \zeta\left(s, \frac{r+1}{g}\right) \right) \right\},$$

$$A_{r,p,l}(k) = \frac{1}{l!} \sum_{\substack{i+j+h=d(r,p)-1-l \\ i,j,h \geq 0}} \frac{(-1)^j}{h!} C_{,p}(i) \left\{ \left(\frac{2\pi i k}{\log \vartheta} + p \right)^{-(j+1)} - \left(\frac{2\pi i k}{\log \vartheta} + 1+p \right)^{-(j+1)} \right\} \\ \times \left\{ \zeta^{(h)} \left(\frac{2\pi i k}{\log \vartheta} + p, \frac{r}{\vartheta} \right) - \zeta^{(h)} \left(\frac{2\pi i k}{\log \vartheta} + p, \frac{r+1}{\vartheta} \right) \right\}.$$

($p \neq 0, 1$ 又は $k \neq 0$ の場合). //

この結果の要点は、 $g(n)$ の平均値が、

$$A_1 (\log m)^{d(1,0)} + \cdots + A_{\vartheta-1} (\log m)^{d(\vartheta-1,0)} + \text{定数項}$$

+ 有限個の oscillating terms

の形に書ける事である。

6. Examples.

§5 の定理は、かなり複雑な外見を呈しているのど、最後に実例を1つ2つ挙げることにする。

(I) "Sum of digits" $S_\vartheta(n)$ の場合。

$S_\vartheta(n)$ は ϑ -additive function は $S_\vartheta(r\vartheta^k) = r$, $1 \leq r \leq \vartheta-1$, $k \in \mathbb{N}$ により定義されるので。

$$f_r(s) = \frac{r}{\vartheta^s - 1}, \quad 1 \leq r \leq \vartheta - 1,$$

である。これは定理2の仮定 i) ii) をみたすので定理2に従って計算すれば、定理1を得る。

(II) 2-additive function $g(n)$ と $g(2^k) = k$ ($k \in \mathbb{N}$)
 により定義する。この関数 $g(n)$ は n を 2 進展開した時
 1 の現われる桁数 (2^0 の桁を 0 ケ目, 2^1 の桁を 1 ケ目
 ... とした桁数) の和を表わす関数である。この時

$$f_1(s) = \frac{1}{(q^s - 1)^2}$$

となるので, やはり定理 2 が適用でき, 結果は次の通り:

$$\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} g(n) = \frac{1}{4 \log^2 2} \log^2 m + \log m \times F_1\left(\frac{\log m}{\log 2}\right) + F_2\left(\frac{\log m}{\log 2}\right).$$

ここで $F_1(x)$, $F_2(x)$ は周期 1 の周期関数で, その各々の
 Fourier 展開は次で与えられる:

$$F_1(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k x}, \quad F_2(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{2\pi i k x} \quad \text{と書く時.}$$

$$c_0 = \frac{(\log 2\pi) - 1}{2 \log^2 2} - \frac{1}{\log 2},$$

$$c_k = \frac{i}{2\pi k (\log 2)} \zeta\left(\frac{2\pi i k}{\log 2}\right) \cdot \left(\frac{2\pi i k}{\log 2} + 1\right)^{-1}, \quad k \neq 0,$$

$$d_0 = \frac{11}{24} - \frac{\zeta''(0)}{\log^2 2} - \frac{(\log 2\pi) - 1}{\log 2} - \frac{(\log 2\pi) - 1}{2 \log^2 2},$$

$$d_k = \frac{1}{2\pi i k \log 2} \left(\frac{2\pi i k}{\log 2} + 1\right)^{-1} \left(\left\{ 2 \log 2 + \frac{\log 2}{2\pi i k} + \left(\frac{2\pi i k}{\log 2} + 1\right)^{-1} \right\} \times \right. \\ \left. \times \zeta\left(\frac{2\pi i k}{\log 2}\right) - \zeta'\left(\frac{2\pi i k}{\log 2}\right) \right), \quad k \neq 0 //$$

Remark. 我々は定理 2 に於て $f_r(s)$ に 2つの仮定を置いた。この内、ii) の方は途中の計算に必要な為^に置いたもので、うまくすると外せる可能性は十分にあると思われる。これに対し、i) の方は、我々の方法による限り外せない。
§4 に書いた証明の概略から分るように、我々の方法では、次の 3つの条件が必要である：

- (A) $f_r(s)$ は 全平面で meromorphic function である,
- (B) $f_r(s)$ のすべての poles は $\alpha < \operatorname{Re}(s) < \beta$ (α, β は定数) といった帯状領域に含まれている,
- (C) 適当な左半平面 $\operatorname{Re}(s) < \gamma$ に於て、 $f_r(s)$ が 両方の Dirichlet 級数に展開される。

ところが、 $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{-(n+1)s}$ によ^(定義された)り、 $f(s)$ による 3条件を仮定すると、 $f(s)$ は q^s の有理関数になり、2しもう事が証明できるのである。

(以上)

References.

- [1] H. Delange : Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme de chiffres", L'Enseignement Math. Vol. 21, 31 - 47 (1974)
- [2] J.-L. Mauclaire & Leo Murata : On q-additive functions. I., Proc. Japan Acad. Ser. A, Vol. 59, 274 - 276 (1983)