

Kuramoto-Sivashinsky 方程式におけるモード間のエネルギー循環

早大理工 三浦 英昭 (Hideaki Miura)

早大理工 相沢 洋二 (Yoji Aizawa)

乱流場のフーリエ解析の問題点

本研究では乱流現象の構造解析のひとつとしてフーリエ空間でのエネルギーの流れの構造を調べている。フーリエ空間でのエネルギーの流れを解析するにあたって問題となるのは、我々がエネルギーの流れを議論するときに思い浮かべるのはカスケード過程の概念に代表される二モード間のエネルギー伝達であるのに対し、実際に基礎方程式から導出される関係式は三モード間のエネルギー伝達描像である、ということである。簡単のため一次元問題として Kuramoto-Sivashinsky 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, u(x+L, t) = u(x, t) \quad (1)$$

を用いて紹介すると、非線形項（エネルギー伝達関数）はフーリエ空間では

$$T(k, t) = \Im \left[\sum_{p+q=k} k v(k, t) v(-p, t) v(-q, t) \right] \quad (2)$$

となる。このエネルギー伝達関数 $T(k, t)$ では波数 p と波数 q は $k = p + q$ という条件を満たす点で全く対等であり、波数 p から k へ流れたエネルギーと波数 q から k へ流れたエネルギーを識別することは不可能である。このため、乱流現象のエネルギー伝達がフーリエ空間内においてローカルに成されているのか、あるいはノンローカルに成されているのかが未だに問題となっている [1]。この困難を克服するため本研究では二モード間のエネルギー伝達を表す新しい概念を導入し、乱流現象におけるエネルギー伝達描像を解析している。

二モード間のエネルギー伝達描像

二モード間のエネルギーの流れを特徴付けるため、ここにエネルギー循環量 $\omega(k, k'; t)$

を導入する。このエネルギー循環量 $\omega(k, k'; t)$ は力学における角運動量との類推に基づいて導入される。簡単のため単位質量を持つ質点の二次元での力学を考えると、二次元の質点の角運動量 ω は座標 x, y 、運動量 p_x, p_y によって

$$\omega = xp_y - yp_x \quad (3)$$

と表される。これを極座標に変換すると

$$\tilde{\omega} = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

となる。

上式から明らかなように角運動量は x 軸から y 軸方向への角 θ の時間微分に比例し、物理量 r^2 が $d\theta/dt$ の方向に輸送されていると考えられる。これと同様に、座標軸として直交基底の二つのモード k, k' を考え、各軸の座標を各モードのエネルギー $S_k, S_{k'}$ とすると、(3)式に対応するエネルギーの角運動量（エネルギー循環） $\omega(k, k'; t)$ は

$$\omega(k, k'; t) = S(k, t) \frac{dS(k', t)}{dt} - \frac{dS(k, t)}{dt} S(k', t) \quad (4)$$

で表される事になる。このとき仮想的にモード k, k' 間の極座標を考えるとこのエネルギー循環量はモード k から k' へのエネルギーの二乗の次元を持つ量の輸送を表すものと捉えられる（図1）。もしこの類推が妥当なものであればこのエネルギー循環は定性的にモードからモードへの二体のエネルギー輸送を表している事になる。

この類推の妥当性を検討するため話題をフーリエモードのエネルギー $E(k, t)$ に限定し、次なる判定条件

(*) エネルギー輸送の過程が自明な場合において明確なエネルギーの移動がみられること

を課す。

ここで輸送過程が「自明である」とは次の事を示している。

- (1) 最初にあるモード k_i が励起されている。
- (2) 時間発展にともない k_i とは異なるモード k_f が励起される。
- (3) モード k の励起は線形項による自己成長ではなく、非線形項による他モードからのエネルギーの流入によるものである。

以上の三点を満たすとき、エネルギーはモード k_i から k_f へ輸送されたと考えられる。ここでこの「自明」な状況を満たすようなモードを考えなければならない。(1) 式から k_f は $k_f = 1$ でなければならない。次に、 $k_f = 1$ を励起し得るようなモードを考えると、(2) 式から $k_f = k_{i,1} + k_{i,2}$ を満たすような二つのモード $k_{i,1}, k_{i,2}$ が必要である事が分かる。しかしこの場合、エネルギーが $k_{i,1}$ から k_f へ流れたのか、あるいは $k_{i,2}$ から k_f へ流れたのかは判別不能である。従って、輸送過程が「自明」であるためには $k_{i,1} = k_{i,2}$ が必要である。以上より、 k_i, k_f はそれぞれ

$$k_i = 1/2, k_f = 1$$

となる。このとき、時間発展の最初期段階では上の二つ以外のモードは無視し得るほど小さい値であるため、エネルギーの伝達は k_i と k_f の間に限定されると考えてよい。このとき期待されるエネルギー伝達の描像は k_i から k_f への伝達量が正值を、逆に k_f から k_i への流れが負値を取り、それ以外は伝達量が 0 になるものである。

次に、エネルギー循環量 $\omega(k, k'; t)$ が条件 (*) を満たしたとき、K S 乱流のこれまでのエネルギー伝達描像がエネルギー循環量によってどのように特徴づけられると期待されるかを検討する必要がある。K S 乱流のエネルギー伝達描像は一般に図 2(a) のようになると期待されている。この描像から期待されるエネルギー輸送輸送の描像は概ね図 2(b) の様になる。この図は k から k' へのエネルギーの輸送を模式的に表したものであり、エネルギーの流出元が負、流入先が正になる。従ってエネルギー循環量が要求される基本性質を満たし、かつ K S 乱流のエネルギー伝達描像が正しいものであればエネルギースペクトルの $k_p \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 付近のピークから $k' > \frac{1}{\sqrt{2}}$ へのエネルギーが正值をとり、逆に、 $k' < \frac{1}{\sqrt{2}}$ から $k_p \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$ へのエネルギー流が負の値をとるはずである。

最後に、エネルギー伝達関数 $T(k, t)$ とエネルギー循環量 $\omega(k, k'; t)$ の関連を確かめねばならない。 $T(k, t)$ は非線形効果によるモード k のエネルギーの励起を表しているのに対し、 $\omega(k, k'; t)$ はモード k から k' へのエネルギーの輸送を表している。従って、この両関数は定性的に同じ描像を描いている事、すなわち、

$$T(k, t) \sim \sum_{k'} \omega(k', k; t)$$

という関係が成り立つと期待される。

数値計算

上述の条件を考慮して数値計算を行った結果を図3以下に示す。この数値計算はシステムサイズ $L = 48$ について擬スペクトル法を用いて実行した。第一に条件(*)の検証を行う。図3(a)は各モードのエネルギーの発展状態を表したものである。初期値は $k \simeq 1/2$ を満たすモードのみに与えている。時間発展するにつれて、まず $k \simeq 1$ のモードが励起され、引き続いて $k \simeq 3/2, k \simeq 2, \dots$ のモードが順に励起されている。ここで初期時刻の近傍においてのみは先に述べた「自明」な状態が実現されている事が分かる。このときのエネルギー循環量 $\omega(k, k'; t)$ を表したものが図3(b)である。この図より確かにモード $k_i = 1/2$ より $k_f = 1$ への流れが正值を取り、 k_f から $k_i = 1$ への流れが負値を取っている事が示された。これによって $\omega(k, k'; t)$ に課された最も基本的な条件(*)は満たされたといえる。

次に、KS方程式が乱流状態にあるときのエネルギー循環量に関するデータを示す。ここではKS方程式の空間パターンが十分乱れた時刻を選び、エネルギー循環量を計算している。この二時刻におけるエネルギー循環量の等高線を図4に示す。この等高線を図2(b)と比較する事により、エネルギー循環量 $\omega(k, k'; t)$ の描くエネルギー伝達描像は従来のKS乱流のエネルギー伝達描像をよく支持する事が確認される。

最後に、エネルギー伝達関数 $T(k, t)$ とエネルギー循環量の比較結果を図5に示す。図5(a)は先に「自明」な状態について調べたデータを用いて $T(k, t)$ と $U(k, t) = \sum_{k'} \omega(k', k; t)$ を比較したものである。 $T(k, t)$ は非線形効果による $k = 1$ モードの励起のみを表しているのに対し、 $U(k, t)$ は $k = 1$ へのエネルギーの流入と $k = 1/2$ からの流出の両方が現れている。図5(b)は乱流状態での $T(k, t)$ と $U(k, t)$ の比較である。この比較では両者の挙動は全体に大きく異なっていることがわかる。

結果と結論

先にあげた条件(*)の確認が出来たことにより、エネルギー循環量 $\omega(k, k'; t)$ は期待通りモード間のエネルギーの授受を特徴づけていると考えられる。また、従来のKS乱流のエネルギー伝達描像とエネルギー循環量の描像がよい一致を見せたことはエネルギー循環量がモード間のエネルギー伝達描像の特徴付けに成功していることを示し

ている。しかし、エネルギー伝達関数 $T(k, t)$ とエネルギー循環量 $U(k, t)$ の比較では両者の挙動が明らかにくいちがっていることに注意すべきである。「自明」な場合における両者の比較では励起されるモードの違いという明確な相違が見られた。この相違の原因は明確である。 $T(k, t)$ ではモード k が励起されることが必ずしも $k = k_1 + k_2$ なるモード k_1, k_2 のエネルギーの現象を意味しない。このため図 3 では $k = 1$ のモードが励起されても $k_i = 1/2$ のモードは（負の値に）励起されないままであった。これに対して $U(k, t)$ の性質は $\omega(k, k'; t)$ に依存している。 $\omega(k, k'; t)$ は力学の角運動量との類推に依存しているため、モード k のエネルギーの励起はモード k' におけるエネルギーの減少によってまかなわれている。これが $T(k, t)$ と $U(k, t)$ との比較の一致しない理由であると考えられる。

また、(4) 式はモードのエネルギーとその時間微分の二次相関関数の反対称成分という形を取っている。モード間のエネルギーの伝達をこのような相関をとるという立場から調べるならば、二次相関のみならずより高次の相関によって記述される描像を調べるたうえで改めて $T(k, t)$ と比較する必要がある。これはエネルギー伝達関数 $T(k, t)$ はすべての必要な高次相関を含んでいるため、二次の相関のみで構成されるエネルギー循環量と一致しないということはより高次の相関が大きな役割を果たしているとも考えられるからである。

この比較における $T(k, t)$ と $U(k, t)$ の相違は両者の構造の本質的な相違を明確に示している。 $T(k, t)$ によるモード k の励起はエネルギーの生成（消滅）を表しており、 $\omega(k, k'; t)$ によるモード k の励起はモード間のエネルギーの輸送であって新たなエネルギーの生成はなされていない。この原理的な相違は $\omega(k, k'; t)$ が力学の保存系との類推に由来していることに起因している。

このようにエネルギー循環関数はいくつかの検討課題を残しはするが、おおむね乱流問題のエネルギー描像を的確に特徴づけていると考えられる。エネルギー伝達関数が三角相互作用による制約によって二モード間のエネルギー伝達描像については言及できないのに対してエネルギー伝達量は二モード間のエネルギー伝達こそ乱流描像の本質であるという観点に立って新たなエネルギー伝達描像を構築するものである。この意味でエネルギー循環量によって特徴づけられたエネルギー伝達描像はエネルギー

伝達関数によって提供されるエネルギー伝達描像とは明らかに異なるものだが、乱流の諸問題に適用することでこれまで直接取り扱うことのできなかったエネルギー伝達描像の解明に貢献し得ると考えられる。

参考文献

- [1] J.A.Domaradzki and R.S.Rogallo. *Phys.Fluids A*, 2:413–426, 1990.

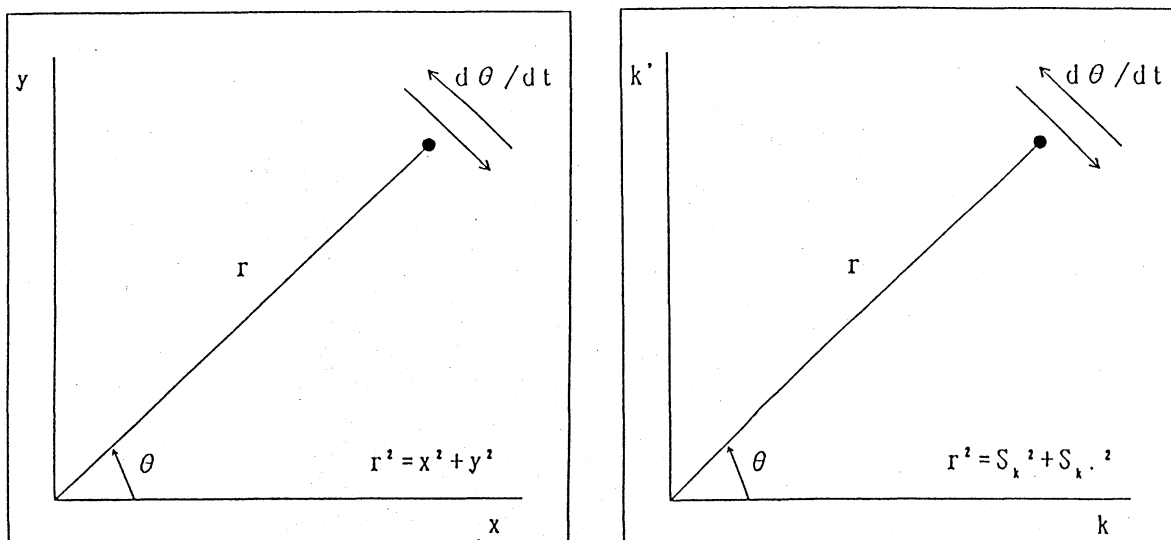


図 1: 角運動量とエネルギー循環の類推。

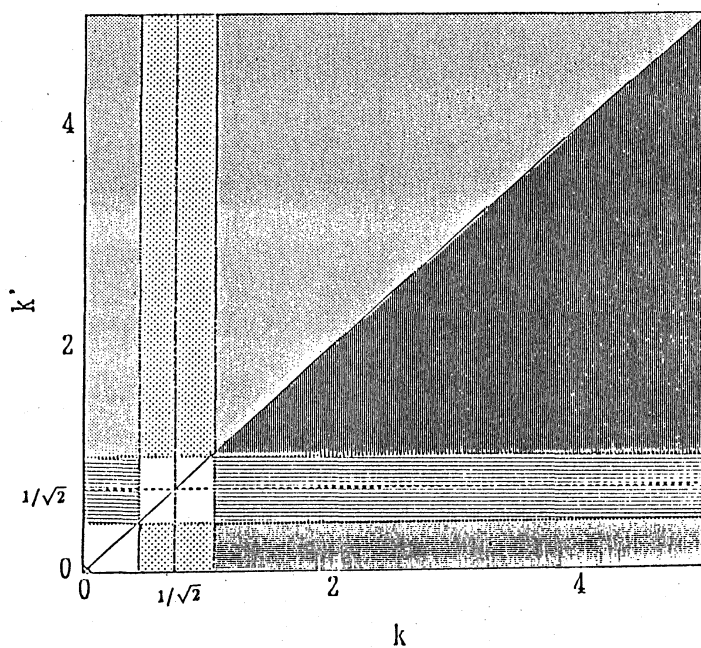
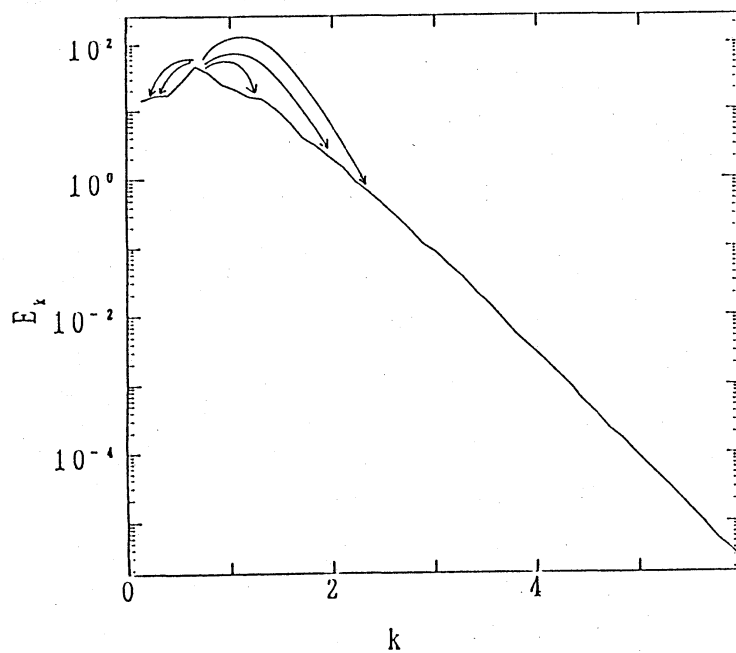


図 2: K S 乱流におけるエネルギー循環描像 (模式図)

(a) ピークから他のモードへのエネルギーの流れ

(b) k から k' への流れ

-  : ピークから他のモードへのエネルギーの流れ。LET では正定値になる。
-  : k の小さい方から大きい方への流れ。正値を取ると期待される。
-  : 各モードからピークへのエネルギーの流れ。LET では負定値になる。
-  : k の大きい方から小さい方への流れ。負値を取ると期待される。

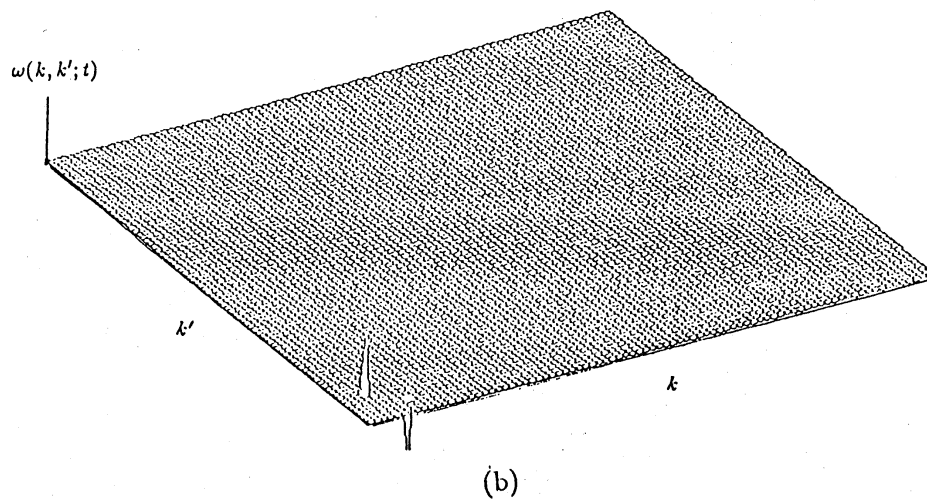
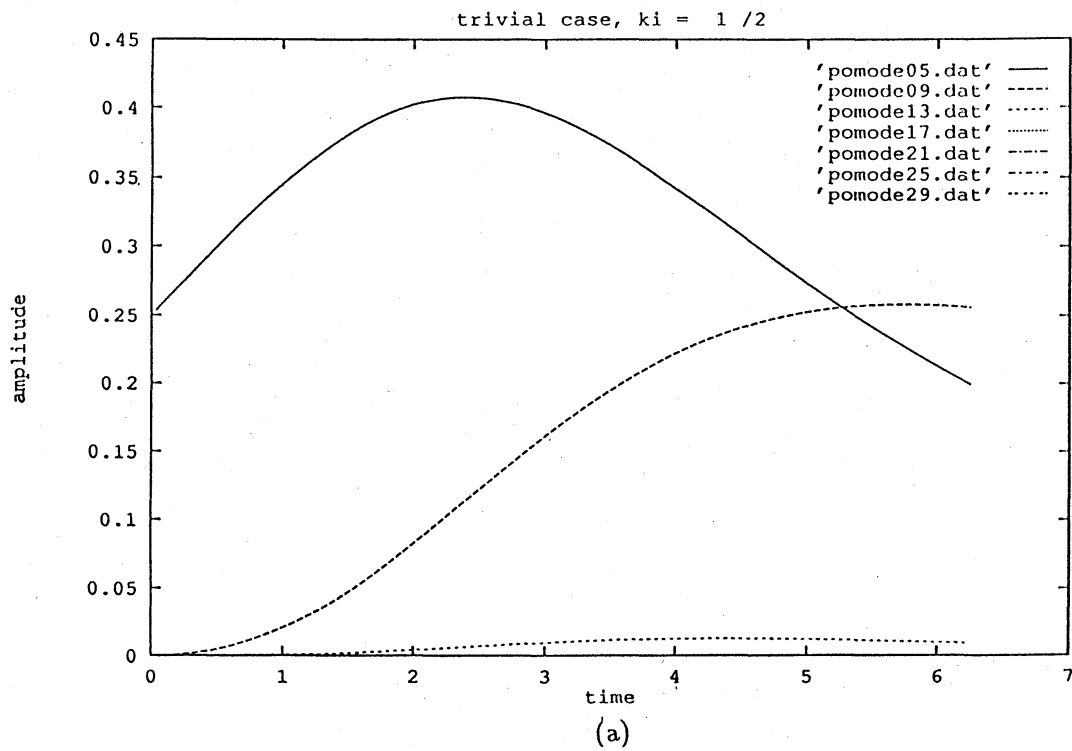


図 3: 初期時刻近傍におけるモード発展とエネルギー循環量。

(a) 各モードの時間発展 (順に $k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$)。

(b) エネルギー循環量。

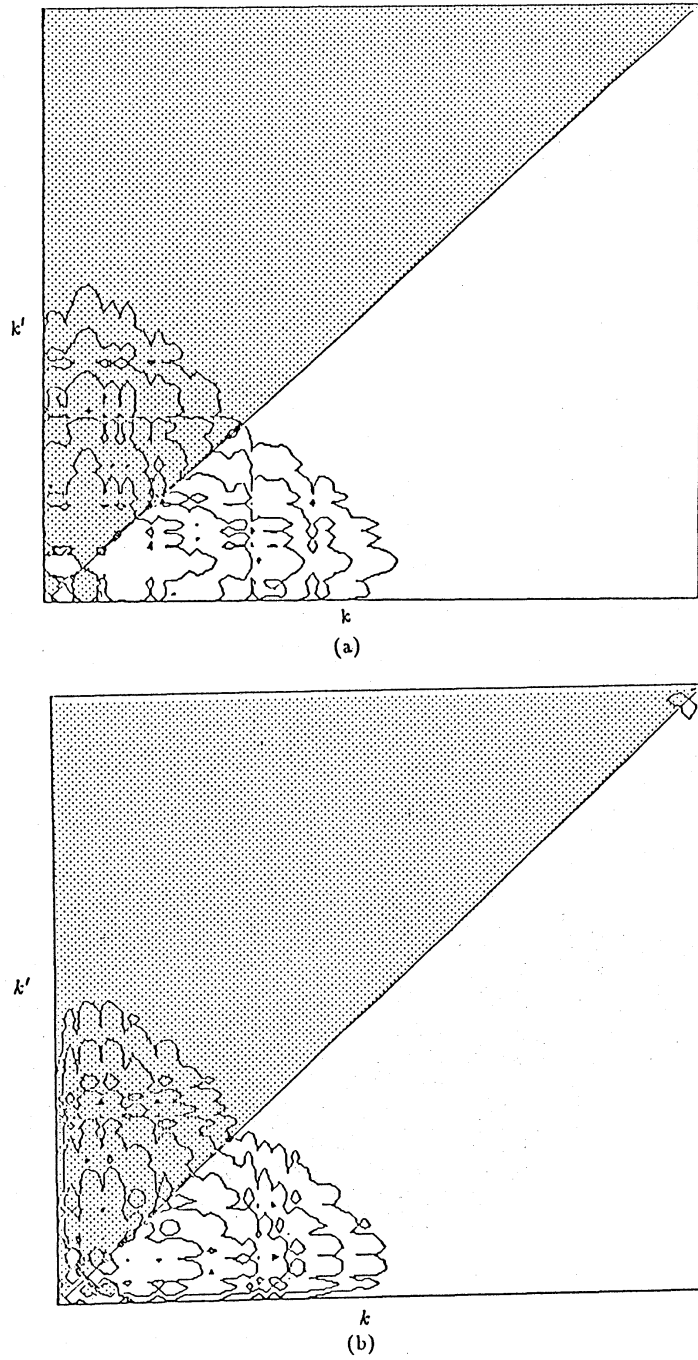
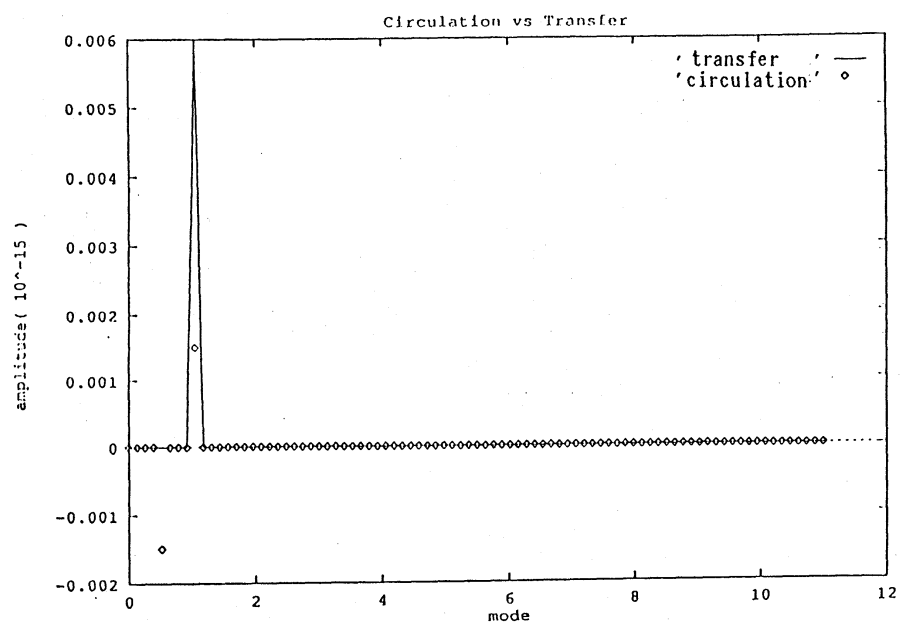


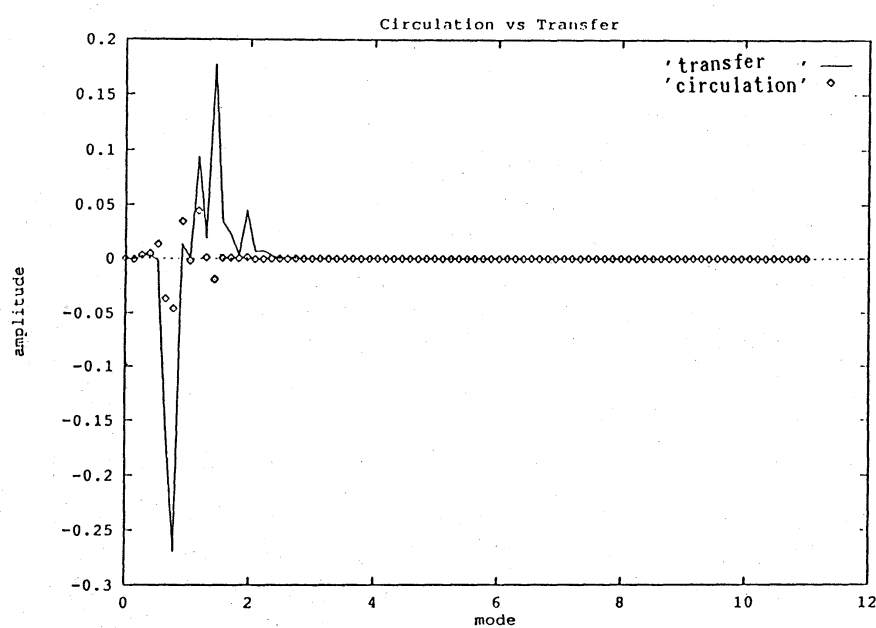
図 4: 乱流状態におけるエネルギー循環関数の等高線 ($L=48$)。

(a) $t = 150$ におけるエネルギー循環関数 $\omega(k, k'; t)$

(b) $t = 200$ におけるエネルギー循環関数 $\omega(k, k'; t)$



(a)



(b)

図 5: エネルギー伝達関数 $T(k, t)$ と $U(k, t)$ の比較

(a) 「自明」な場合。

(b) 乱流状態。