

S^3 の中の *surface* について

東大 理 山崎正三

$g: V \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ を $\mathbb{Z}_2$ 上の 2 次形式とすると, g に随伴する
双一次形式 $(,)$ が $(x, y) = g(x+y) - g(x) - g(y)$ により定まる.
 $R = \{x \in V : (x, y) = 0 \text{ for } \forall y \in V\}$ とおくとき g の Arf
invariant が定まるためには $g|R \equiv 0$ が必要十分である.
([1] p.56 III.1.14 Theorem.)

今, S^3 の中の *link* をひとつとり, その *Seifert surface*
 M を固定したとき, 上の V として $H_1(M; \mathbb{Z}_2)$, g として *self-*
linking number (mod 2), $(,)$ として *intersection pairing*
(mod 2) をとることにする. $g|R \equiv 0$ という条件はこの *link* が
proper link ([2] p.546) であるという条件に一致する.
従って *link* が *proper* のとき, M に対して Arf invariant が
定義されるが, これは M のとり方によらずに定まる.

$g|R \not\equiv 0$ ならば Arf invariant は well-defined でないという事実
を翻訳して次の定理をうる.

定理 (i) $M, M' (\in \mathcal{M}_{g,r})$ が S^3 の中の 2 つの non-zero type の surface であるとき、 M と M' が互いに regularly homotopic であるためには、 M と M' が同じ type を持つことが必要十分である。

(ii) $M, M' (\in \mathcal{M}_{g,r})$ が S^3 の中の 2 つの zero type の surface であるとき、 M と M' が互いに regularly homotopic であるためには、 M と M' が同じ Art invariant を持つことが必要十分である。

(但し、 $g \geq 0$ $r \geq 1$)

§ 1 定義

定義 1 $\bar{M}$ を ジーナス g の 2 次元向き付け可能閉多様体から r 個の開円板をとり のぞいたものとする。このとき

$$\mathcal{M}_{g,r} \stackrel{\text{def.}}{=} \{ f(\bar{M}) \subset S^3; f: \bar{M} \longrightarrow S^3 : \text{imbedding} \}$$

とする。 $\mathcal{M}_{g,r}$ の元を surface とよぶ。

定義 2 $M \in \mathcal{M}_{g,r}$, $\partial M = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_r$ とする。

M が r type の surface であるとは

$$\# \{ i; L_M(C_i, C_i) \equiv 1 \pmod{2} \} = 2r$$

であることとする。但し $C_i = [\gamma_i] \in H_1(M; \mathbb{Z})$ であり、

$L_M(,): H_1(M; \mathbb{Z}) \otimes H_1(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ は linking pairing

である。 $\mathbb{Z}_2$ 係数にしたものを $\tilde{L}_M(,): H_1(M; \mathbb{Z}_2) \otimes H_1(M; \mathbb{Z}_2)$

$\longrightarrow \mathbb{Z}_2$ とか $\tilde{C}_i$ のように $\sim$ をつけてかく。

注意. $\tilde{c}_1 + \dots + \tilde{c}_n = 0$ であるから

$$\begin{aligned}\tilde{L}_M(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1) &= \tilde{L}_M(\tilde{c}_2 + \dots + \tilde{c}_n, \tilde{c}_2 + \dots + \tilde{c}_n) \\ &= \tilde{L}_M(\tilde{c}_2, \tilde{c}_2) + \dots + \tilde{L}_M(\tilde{c}_n, \tilde{c}_n)\end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{L}_M(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1) + \tilde{L}_M(\tilde{c}_2, \tilde{c}_2) + \dots + \tilde{L}_M(\tilde{c}_n, \tilde{c}_n) = 0$$

従って $\#\{i; L_M(c_i, c_i) \equiv \tilde{L}_M(\tilde{c}_i, \tilde{c}_i) \equiv 1 \pmod{2}\}$ は偶数となり、

良は $[\frac{n}{2}]$ 以下の整数である。

定義3. $M, M' \in \mathcal{M}_{g,n}$ とする. M が M' に *regularly homotopic*

とは、
 ・ 普通の意味での *regular homotopy* $H: \bar{M} \times I \rightarrow S^3$

が存在し、

・ $H|_{\bar{M} \times \{0\}}, H|_{\bar{M} \times \{1\}}$ は *imbedding* になっており

・ $H(\bar{M} \times \{0\}) = M, H(\bar{M} \times \{1\}) = M'$

であることをいう。

定義4. *surface* M の *Art invariant* $a(M) \in \mathbb{Z}_2$ とは、

$q(x) = \tilde{L}_M(x, x)$ によって定まる二次形式 $q: H_1(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$

の *Art invariant* のことである。

注意. この場合 $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n$ によって生成される $H_1(M; \mathbb{Z}_2)$

の部分空間が $\mathbb{R}$ であるから、*surface* M の *Art invariant*

が *well-defined* であるための必要十分条件は、 M が

0-type であること。

§ 2 定理の証明

補題1. M は M' に *regularly homotopic* であり、 H を M と M' の間の *regular homotopy* とする。このとき

$$\tilde{L}_M(\tilde{x}, \tilde{x}) = \tilde{L}_{M'}((\kappa_1 \circ \kappa_0^{-1})_* \tilde{x}, (\kappa_1 \circ \kappa_0^{-1})_* \tilde{x}) \quad \text{for } \forall \tilde{x} \in H_1(M; \mathbb{Z}_2)$$

$$(\text{但し, } \kappa_0 = H|M \times \{0\} \quad \kappa_1 = H|M \times \{1\})$$

証明は、この補題が $g=0, \kappa=2$ のとき、すなわち M, M' が S^3 の中の帯になってゐる時正しいこと ([3]) を用いれば容易に示される。

補題2 (i) M が M' に *regularly homotopic* とすると、 M と M' は同じ *type* を持つ。

(ii) 0-type の surface M, M' が *regularly homotopic* とすると $a(M) = a(M')$ である。

証明) (i) $\partial M = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_n$ $\partial M' = \gamma'_1 \vee \dots \vee \gamma'_n$ とする。番号を適当につけかえて、 $(\kappa_1 \circ \kappa_0^{-1})(\gamma_i) = \gamma'_i$ ($i=1, \dots, n$) と仮定してよい。 $\tilde{c}_i = [\gamma_i] \in H_1(M; \mathbb{Z}_2)$ $\tilde{c}'_i = [\gamma'_i] \in H_1(M'; \mathbb{Z}_2)$ とすると補題1により、 $\tilde{L}_M(\tilde{c}_i, \tilde{c}_i) = \tilde{L}_{M'}(\tilde{c}'_i, \tilde{c}'_i)$ ($i=1, \dots, n$)。

従つて M と M' は同じ *type* を持つ。 (g.e.d.)

(ii) $\{\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{a}_g, \tilde{b}_g, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{n-1}\}$ を $H_1(M; \mathbb{Z}_2)$ の *symplectic basis* とする。

$$\tilde{a}'_i = (h_1 \circ h_0^{-1})_* \tilde{a}_i \quad \tilde{b}'_i = (h_1 \circ h_0^{-1})_* \tilde{b}_i \quad i=1, \dots, g$$

$$\tilde{c}'_j = (h_1 \circ h_0^{-1})_* \tilde{c}_j \quad j=1, \dots, r-1$$

とおくと、 $\{\tilde{a}'_1, \tilde{b}'_1, \dots, \tilde{a}'_g, \tilde{b}'_g, \tilde{c}'_1, \dots, \tilde{c}'_{r-1}\}$ は $H_1(M'; \mathbb{Z}_2)$ の symplectic basis である。補題 1 により、

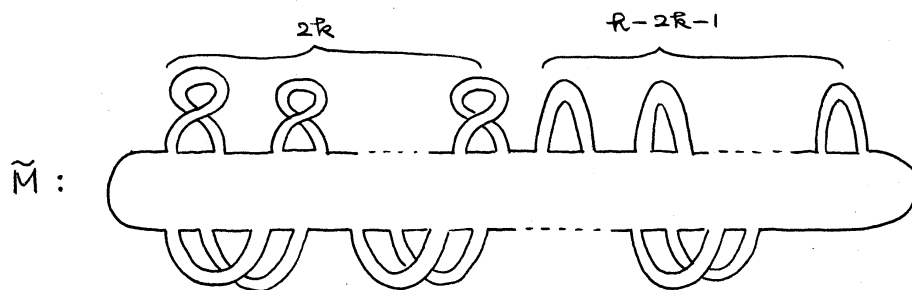
$$\tilde{L}_M(\tilde{a}_i, \tilde{a}_i) = \tilde{L}_{M'}(\tilde{a}'_i, \tilde{a}'_i)$$

$$\tilde{L}_M(\tilde{b}_i, \tilde{b}_i) = \tilde{L}_{M'}(\tilde{b}'_i, \tilde{b}'_i)$$

$$\begin{aligned} \text{従って} \quad a(M) &= \sum_{i=1}^g \tilde{L}_M(\tilde{a}_i, \tilde{a}_i) \tilde{L}_M(\tilde{b}_i, \tilde{b}_i) \\ &= \sum_{i=1}^g \tilde{L}_{M'}(\tilde{a}'_i, \tilde{a}'_i) \tilde{L}_{M'}(\tilde{b}'_i, \tilde{b}'_i) \\ &= a(M') \quad (\text{g.e.d.}) \end{aligned}$$

定理の証明。

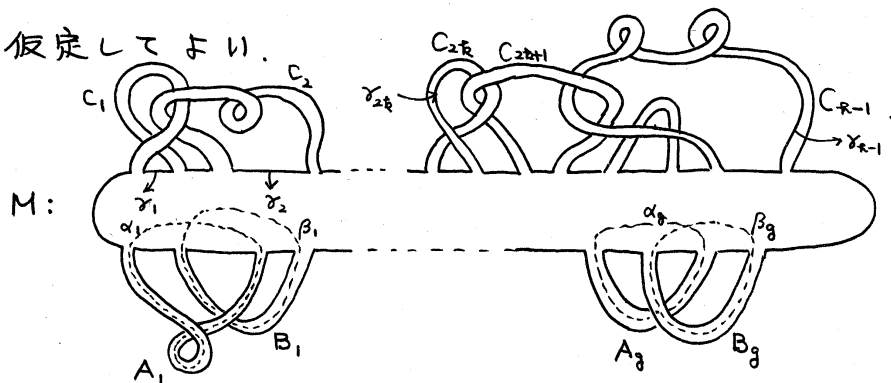
(i) M を $g(>0)$ type の surface とする。 $\tilde{M}$ を図のような、標準的な g type の surface とする。 M が $\tilde{M}$ に regularly homotopic であることさえいふ。



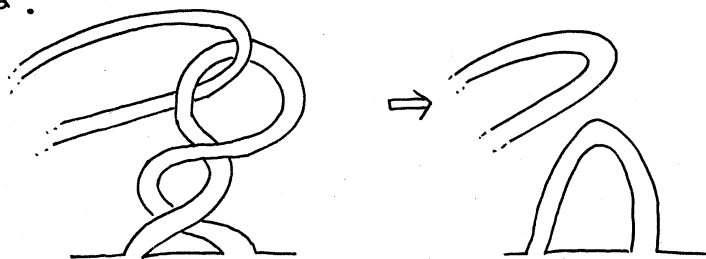
M は disc に 帯 $A_1 B_1 \dots A_g B_g C_1 \dots C_{r-1}$ がついているものとあもうことができる。帯 $A_i(B_i, C_j)$ は曲線 $\alpha_i(\beta_i, \gamma_j)$ $i=1, \dots, g$ $j=1, \dots, r-1$ を持つ。 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_j$ によって表現される $H_1(M; \mathbb{Z})$ の

元を a_i, b_i, c_j とかく. $\tilde{M}$ にあわせるために $L_M(c_i, c_i) \equiv 1$
 $(\text{mod } 2)$ for $i=1, \dots, 2R$. $L_M(c_i, c_i) \equiv 0 (\text{mod } 2)$ for $i=2R+1, \dots, R-1$

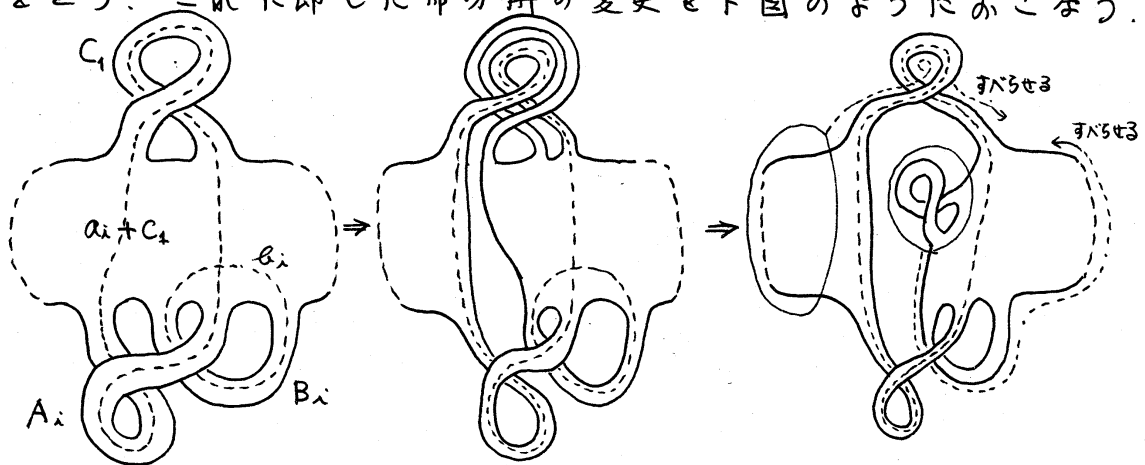
と仮定してよい.

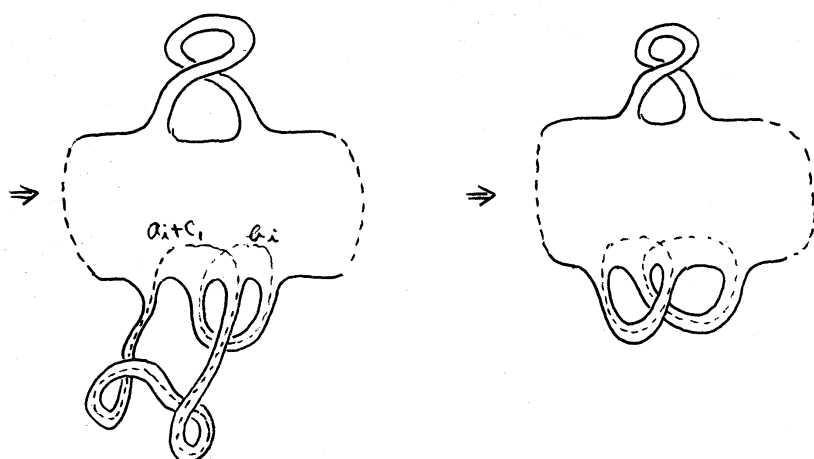


regular homotopy を用いて からみあっている帯は、はずしてゆく. またおのおのの帯の self-linking も 0 または 1 にする.



今ある帯 A_i において $L_M(a_i, a_i) = 1$ であつたとする. 新しい symplectic basis $\{a_1, b_1, \dots, a_i + c_i, b_i, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_{R-1}\}$ をとり、これに即した帯分解の変更を下図のようにおこなう.





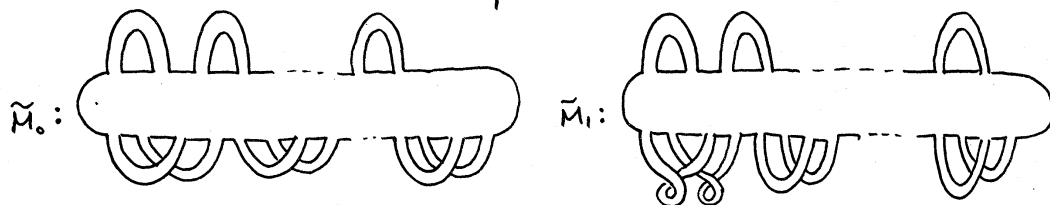
これをくりかえすことにより、新しい surface M' では、

$$L_{M'}(a_i, a_i) = 0 \quad L_{M'}(b_i, b_i) = 0$$

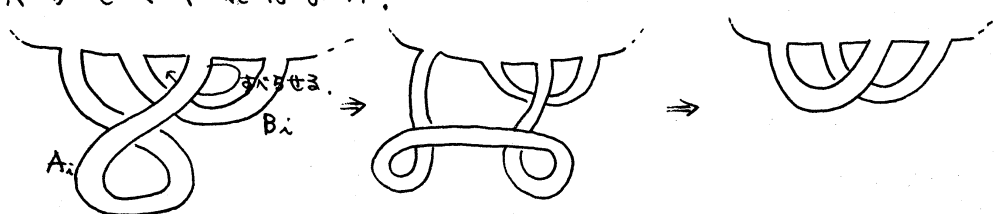
にできる。こうしてできた M' は標準の surface $\tilde{M}$ に isotopic である。

(g.e.d)

(ii) 証明は (i) の場合と全く同様であるが、唯一異なるのは、帯 A_i (B_i) の self-linking を帯 C_i のそれ打ち消すことができる点である。標準 surface $\tilde{M}_0$, $\tilde{M}_1$ は次のようにする。



$L_M(a_i, a_i) = 1$ $L_M(b_i, b_i) = 0$ なる i がある時は、帯 A_i を B_i に沿ってずらしてやればよい。



$$L_M(a_i, a_i) = 1 \quad L_M(b_i, b_i) = 1 \quad L_M(a_j, a_j) = 1 \quad L_M(b_j, b_j) = 1$$

となる i, j ($i \neq j$) があつたときは a_i, b_i, a_j, b_j のかわりに

$$a'_i = a_i + b_i + a_j + b_j \quad b'_i = a_i + b_i + b_j$$

$$a'_j = a_i - a_j \quad b'_j = b_i + a_j$$

として新しい symplectic basis をとり、新しい帯分解を

行なり (i) と同様にして surface M' で

$$L_{M'}(a'_i) = L_{M'}(a'_j) = L_{M'}(b'_i) = L_{M'}(b'_j) = 0$$

他はそのまま

なものをつくる。

これをくりかえせば、 $a(M) = 0$ のときは $\tilde{M}_0$ に、 $a(M) = 1$

のときは $\tilde{M}_1$ に isotopic な surface M'' を得る。 (g.e.d.)

注意 $a(M) = 0 (1)$ は $L_M(a_i, a_i) \equiv L_M(b_i, b_i) \equiv 1 \pmod{2}$ なる

i が偶数個 (奇数個) あることを意味する。

参考

[1] W. Browder : Surgery on Simply-Connected Manifolds : Springer (1972).

[2] R. A. Robertello : An Invariant of Knot Cobordism. :

Comm. Pure Appl. Math. vol 18 543-555 (1965)

[3] 加藤十吉 : 帯のトポロジー : 数解研講義録 243. (多様

体の低次元位置問題について) 88-96 (1975)