

On a question concerned with a concordance relation of G -complexes

阪大理 森本雅治 (Masaharu Morimoto)

§ 1. Introduction

このノートにおいては G は位数が素数でない有限群とし、すべての複体は有限複体であるとする。

$R. Oliver$ は整数群 $\mathbb{Z}$ の部分群

$$S = \{ \kappa(X^G) - 1 \mid X \text{ は可縮な } G\text{-複体} \}$$

の生成元 n_G (≥ 0) を決定した。2つの G -複体 X_0 と X_1 が concordant であるとは G -複体 Z と pseudo-equivalences $f_i : X_i \rightarrow Z$, $i=0, 1$, が存在する時を言う。 X_0 と X_1 が concordant ならば $\kappa(X_0^G) \equiv \kappa(X_1^G) \pmod{n_G}$ が成り立つ。 Oliver - Petrie [3] から問を引用する。

(Q) Y を G -複体, F' を $\chi(F') \equiv \chi(Y^G) \bmod n_G$ をみたす複体とする. Y と concordant な G -複体 X ぞ $X^G = F'$ をみたすものが存在するか?

Y が自由 G -作用を持つ場合に反例が存在する (§2 例1 を参照). そこで (Q) における Y に次のような仮定を付けて以下考えることにする.

(仮定) Y は連結ぞ $\pi_1(Y)$ は有限, 更に $Y^G \neq \emptyset$ とする.

Oliver - Petric は $\pi_1(Y) = 0$ かつ Y^G が連結の場合に (Q) が肯定的であることを示した. このノートの目的は, 彼等の結果を一般化することにある.

Y^G の連結成分の個数を k とする. この時次のような性質を持つ $\mathbb{Z}^k = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ (k -個) の部分群 N_Y が存在する (N_Y の定義は §3 を見られたい).

定理1. 複体 F' と (連続) 写像 $f': F' \rightarrow Y^G$ に対して, G -複体 X と pseudo-equivalence f :

$X \rightarrow Y$ ぞ $x^G = F'$ かつ $f^G = f'$ をみたすものが
存在する必要十分条件は

$$(\alpha(F_1) - \alpha(F'_1), \dots, \alpha(F_k) - \alpha(F'_k)) \in N_Y$$

である. ここで $F'_i = f'^{-1}(F_i)$.

準同型写像 $\varepsilon: \mathbb{Z}^R \rightarrow \mathbb{Z}$ を

$$\varepsilon(x_1, \dots, x_R) = x_1 + \dots + x_R$$

で定義する. もしある Y に対し $N_Y = \varepsilon^{-1}(n_G \mathbb{Z})$
が成り立てば, その Y に対しては (Q) は肯定的である
ことがわかる. ただし, 一般的には $N_Y \neq \varepsilon^{-1}(n_G \mathbb{Z})$
である (§2 例 2 を参照). Oliver - Petrie の先の結果
の一般化として次の定理を得た. §2 例 3 はその応用
があるので参照されたい.

定理 2. もし次の (i), (ii), (iii), (iv) の中のどれ
か 1 つが成り立つならば $N_Y = \varepsilon^{-1}(n_G \mathbb{Z})$ である.

(i) Y^G が連結である.

(ii) $G \notin \mathcal{G}$.

(iii) $\pi_1(Y) = 0$ かつ任意の $P \in \mathcal{P} \cap \mathcal{S}(G)$ に対して Y^P が連結である.

(iv) $G \notin \mathcal{G}_1$ かつ任意の $H \in \mathcal{G}^1 \cap \mathcal{S}(G)$ に対して Y^H が連結である.

上の定理における $\mathcal{S}(G)$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}^1$ は次のように与えられる有限群の族である. $\mathcal{S}(G)$ は G の部分群の全体, $\mathcal{P}$ は位数が素数巾の有限群の族. $\mathcal{G}_p^k$ は次のような正規部分群 $P \triangleleft H \triangleleft K$ を持つ有限群 K からなる族: P は位数が p -巾, K/H は位数が q -巾, 更に H/P は巡回群である. このとき $\mathcal{G}^1 = \bigcup_p \mathcal{G}_p^1$, $\mathcal{G}_1 = \bigcup_q \mathcal{G}_1^q$, $\mathcal{G} = \bigcup_{p,q} \mathcal{G}_p^q$ である, ただし, p および q は素数を渡る. 従って $\mathcal{G}_1$ は hyper-elementary group からなる族である. また $\mathcal{G}$ に属する群は可解であるから, 非可解群 G は上の定理の (ii) をみたす.

§2. Examples

このセクションでは p および q は異なる素数とする.

例1 ((Q)に対する反例). $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}_q$ とする. この場合 $n_G = pq$ である. Y を自由 G -複体, $F' = \{1, \dots, pq\}$ としよう. $\chi(Y^G) \equiv \chi(F') \pmod{n_G}$ が成り立つ. Y と concordant である G -複体 X , $X^G = F'$, が存在すると仮定する. すると G -複体 Z , $Z^G \neq \emptyset$, と pseudo-equivalence $f: Y \rightarrow Z$ が存在する. Y と Z に基点 “+” を disjoint に加え ($Y^+ = Y \sqcup \{+\}$, $Z^+ = Z \sqcup \{+\}$) $f^+: Y^+ \rightarrow Z^+$ を

$$f^+(y) = \begin{cases} + & \text{if } y = + \\ f(y) & \text{if } y \in Y \end{cases}$$

で定義する. 写像錐 M_{f^+} は可縮である. Smith の定理から $(M_{f^+})^{\mathbb{Z}_p}$ は $\mathbb{Z}_p$ -acyclic である. 特にそれは連結である. — オ

$$(M_{f^+})^{\mathbb{Z}_p} = M_{f^+ \mathbb{Z}_p} = Z^{\mathbb{Z}_p} \sqcup \{+\}$$

であるから $(M_{f^+})^{\mathbb{Z}_p}$ は連結ではない. よって上のような G -複体 X は存在しない.

例2 ($N_Y \neq \varepsilon^{-1}(n_G \mathbb{Z})$). $G = \mathbb{Z}_{pq}$ とし、
 V を G -表現空間でその単位球面 $S(V)$ 上に G が
 自由に作用するものとする. $Y = S(V \oplus \mathbb{R})$ とおく、
 ただし $\mathbb{R}$ は 1 次元 G -表現空間で自明な G -作用を持つ
 ものである. この時 Y^G は 2 点から成り、 $n_G = 0$,
 $\varepsilon^{-1}(n_G \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ である. - 亦 N_Y は §3 の定義
 と Oliver - Petrie [3] の Proposition 2.6 から $\{0\}$ で
 あることがわかる. よってこの場合 $N_Y \neq \varepsilon^{-1}(n_G \mathbb{Z})$
 である.

例3 (定理 2 (ii) の応用). G を少なくとも 3
 つの巡回群でないシロ-部分群を持つ可換群 (たとえば
 $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}_r \oplus \mathbb{Z}_r$, r は p および q と異
 なる素数) とする. この時 $G \neq \{1\}$ で $n_G = 1$ であ
 る. V を複素 G -表現空間とし, $Y = P(V) = S(V)/S'$,
 $S' \subset \mathbb{C}$, とおく. この時任意の複体 F' と写像 $f':$
 $F' \rightarrow Y^G$ に対して G -複体 X と pseudo-equivalence
 $f: X \rightarrow Y$ で $X^G = F'$, $f^G = f'$ をみたすものが存
 在する.

更に $\dim Y^G = \dim F' = 0$ であれば,
 equivariant thickening により, 上の X は (境界の

ある)コンパクト G -多様体でとれる.

§3. Definition of N_Y

以下の概念, 記号の多くは Oliver - Petrie [3] による. 紹介を兼ねて復習をする.

Y を G -複体, $\mathcal{S}(G)$ を G の部分群の全体, $\mathcal{S}(Y)$ を Y の (G -不変とは限らない)部分複体の全体とする. $\mathcal{S}(G)$ は *inner automorphism* によって与えられる G -作用を持ち, $\mathcal{S}(Y)$ は Y 上の G -作用から誘導される G -作用を持つ. $\mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(Y)$ には対角作用が入る. $\mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(Y)$ から $\mathcal{S}(G)$ への *projection* を p で, $\mathcal{S}(Y)$ への *projection* を $| \cdot |$ で表す. Y から得られる G -poset $\Pi(Y)$ とは,

$$\{ (H, X) \in \mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(Y) \mid H \in \mathcal{S}(G), X \text{ は } Y^H \text{ の 1 つの連結成分} \}$$

のことである. $\Pi(Y)$ は $\mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(Y)$ の G -不変な部分集合である. $\Pi = \Pi(Y)$ とおく.

基点 $\emptyset$ を持つ G -複体 Z は次の条件 (i), (ii), (iii) をみたす *filtration* $\{ Z_\alpha \mid \alpha \in \Pi \}$, $Z_\alpha \subset Z$,

$g \in Z_\alpha$, が与えられた時 Π -複体 と呼ばれる.

- (i) $Z_{g\alpha} = g Z_\alpha$ for $\forall g \in G, \forall \alpha \in \Pi$,
- (ii) $Z_\alpha \subseteq Z_\beta$ if $\alpha \leq \beta$,
- (iii) $Z^H = \bigvee_{p(\alpha)=H} Z_\alpha$ for $\forall H \in \mathcal{S}(G)$.

ここで $\alpha \leq \beta$ は $p(\alpha) \supseteq p(\beta)$ かつ $|\alpha| \leq |\beta|$ を意味する. 2つの Π -複体 Z と W が同値 ($Z \sim W$) であるとは, すべての $\alpha \in \Pi$ について $\chi(Z_\alpha) = \chi(W_\alpha)$ が成り立つ時と言う. 同値類の全体からなる集合 $\Omega(G, \Pi)$ は

$$[Z] + [W] = [Z \vee W]$$

により可換群となる. $\Omega(G, \Pi)$ の部分群 $\Delta(G, \Pi)$ が

$$\Delta(G, \Pi) = \{ [Z] \in \Omega(G, \Pi) \mid Z \text{ は 可縮 } \Pi\text{-複体} \}$$

により定義される.

これらの概念を Y の普遍被覆空間 $\overline{Y}$ に適用する. EG を普遍主 G -束, $\overline{G} = \pi_1(EG \times_G Y)$ とお

く. $\bar{G}$ は $\bar{Y}$ に標準的に作用する. この作用により, 我々は $\bar{G}$ -space $\bar{\pi} = \pi(\bar{Y})$ を得る. 従, π 可換群 $\Omega(\bar{G}, \bar{\pi})$ および $\Delta(\bar{G}, \bar{\pi})$ を得る. 基点を適当に取れば完全列

$$1 \rightarrow \pi_1(Y) \rightarrow \bar{G} \rightarrow G = \pi_1(EG/G) \rightarrow 1$$

が得られる. $\bar{Y}$ から Y への projection p によって準同型写像 $p_{\#} : \Omega(\bar{G}, \bar{\pi}) \rightarrow \Omega(G, \pi)$ が誘導される ($\bar{Z}$ を π 複体とする時, $p_{\#}([\bar{Z}]) = [Z/\pi_1(Y)]$).

補題1. 上の $p_{\#}$ は同型写像であり, $p_{\#}(\Delta(\bar{G}, \bar{\pi})) \subset \Delta(G, \pi)$ である.

準同型写像 $\psi : \Omega(G, \pi) \rightarrow \mathbb{Z}^k$ を次式で定義する, ここで k は Y^G の連結成分の個数である.

$$\psi([X]) = (\chi(X_{\alpha_1}) - 1, \dots, \chi(X_{\alpha_k}) - 1),$$

ここで X は π -複体で, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ は Y^G の連結成分に対応する π の元である.

定義. $N_Y = \psi(p_{\#}(\Delta(\bar{G}, \pi)))$.

Oliver - Petrie は $n_Y = \psi(\Delta(G, \pi))$ と定義した. 補題 1 により, $n_Y \supseteq N_Y$ である.

補題 2. 定理 2 の仮定の下では $n_Y = N_Y$ が成り立つ.

π -複体 X は $(k-1)$ -連結, ここで $k = \dim X$, であつ $\hat{H}_k(X; \mathbb{Z})$ が $\mathbb{Z}[G]$ -projective である時 π -resolution と呼ばれる. $\Omega(G, \pi)$ の部分群 $\Phi(G, \pi)$ を

$$\Phi(G, \pi) = \{ [X] \in \Omega(G, \pi) \mid X \text{ は } \chi(X) = 1 \text{ をみたす } \pi\text{-resolution} \}$$

で定義する. Oliver - Petrie [3] の Proposition 2.6 の意味において, $\Phi(G, \pi)$ は計算可能である. そこで $m_Y = \psi(\Phi(G, \pi))$ とおく. $m_Y \supseteq n_Y$ である.

補題 3. $n_Y = m_Y \cap \varepsilon^{-1}(n_G \mathbb{Z})$.

$G \in \mathcal{G}'$ ならば $m(G) = 0$ とおく. $G \in \mathcal{G}'$ ならば $m(G)$ は異なる素数の積で, 素数 q に対し

$$q \mid m(G) \iff G \in \mathcal{G}_p^{\{q\}} \quad (p \text{ はある素数})$$

をみたすものとする (Oliver [1] Theorem 5 参照). この時

$$\text{補題 4.} \quad [m_Y, n_Y] = n_G / m(G).$$

Oliver は $n_G / m(G) = 1$ or 2 を示した. 更に $n_G / m(G) = 2$ となるのは $n_G = 4$ から $m(G) = 2$ となる時で, その場合を [2] Theorem 7 で決定している. 大ざっぱに言えば, $n_G / m(G)$ はほとんどの場合 1 である.

§4. Outline of the proof

定理 1 の証明は [0] にある.

G -part Π の G -不変部分集合は G -family in Π と呼ばれる. G -family $\mathcal{F}$ に対しても Π と同様にその普遍群 $\Omega(G, \mathcal{F})$ が定義され, 自然に単型

$j: \Omega(G, \overline{\gamma}) \rightarrow \Omega(G, \pi)$ が定まる. $\overline{G}$ -family $\overline{\gamma}$
in π に対しても $\Omega(\overline{G}, \overline{\gamma})$ および $J: \Omega(\overline{G}, \overline{\gamma})$
 $\rightarrow \Omega(\overline{G}, \pi)$ が得られる. $\alpha_i \in \pi$ ぞ $p(\alpha_i) = G$
をみたすものを1つ固定する.

$$\overline{\gamma}_i = \{\beta \in \pi \mid \beta \cong \alpha_i\}$$

$$\overline{\gamma}_i = \{\gamma \in \pi \mid \tilde{p}(\gamma) \cong \alpha_i\}$$

とおく. ただし, $\tilde{p}: \overline{\pi} \rightarrow \pi$ は $p: \overline{\gamma} \rightarrow \gamma$ から
誘導されるものである. 次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega(\overline{G}, \overline{\gamma}_i) & \xrightarrow{\text{id}} & \Omega(\overline{G}, \overline{\gamma}_i) & & \\
 \downarrow p_{\#} & \searrow J & \downarrow p_{\#} & & \downarrow p_{\#} \\
 \Omega(G, \overline{\gamma}_i) & \xrightarrow{\text{id}} & \Omega(G, \overline{\gamma}_i) & \xrightarrow{\quad} & \Omega(G, \overline{\gamma}_i) \\
 \downarrow \psi & \searrow j & \downarrow \psi & \nearrow r & \downarrow \psi \\
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z} \\
 & & \downarrow \psi & \nearrow \varepsilon & \\
 & & \mathbb{Z}^R & &
 \end{array}$$

上の図式で $\gamma: \Omega(G, \pi) \rightarrow \Omega(G, \pi_1)$ は自然に得られるレトラクションである。この図式の観察と、 $K_0(\mathbb{Z}[G])$ に関する簡単な事実等を組み合わせて補題 2, 3, 4 および定理 2 の証明を得る。定理 2 (iv) において $G \neq \mathbb{Z}_1$ という条件が付いているのは $N_Y = n_Y$ を証明するのに Dress の induction technique を用いたためで、おそらく無くとも成立するだろう。

References

- [0] Morimoto, M.- Iizuka, K. : Extendibility of G-maps to pseudo-equivalences to finite G-CW-complexes whose fundamental groups are finite. to appear in O. J. M. 21.
- [1] Oliver, R. : Fixed point set of group actions on finite acyclic complexes. Commentarii math. Helvet. 50, 155-177 (1975).
- [2] Oliver, R. : G-actions on disks and permutation representations. II. Math. Z. 157, 237-263 (1977).
- [3] Oliver, R.- Petrie, T. : G-CW-surgery and $K_0(\mathbb{Z}G)$. Math. Z. 179, 11-42 (1982).