

強擬凸領域におけるテプリッツ作用素の指数定理

(Venugopalkrishna, Burns, Boutet de Monvel より)

早大理工

郡 敏昭

複素平面上の単位円 $D = \{ |z| < 1 \}$ で定義された正則函数で 2乗可積分な境界値をもつものの全体を

$$H = \{ h = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : \sum |a_n|^2 < \infty \}.$$

$\{ |z| = 1 \}$ 上の連続函数 f に対し テプリッツ作用素

$$T_f : H \rightarrow H \quad \text{は} \quad T_f(h) = \pi(\tilde{f} \cdot h) \quad \text{と定義される。}$$

ここに $\pi : L^2(D) \rightarrow H$ は直交射影 (Szöge作用素) であり,

$\tilde{f}$ は f の $C(\bar{D})$ への任意の延長である。

T_f は延長の仕事 $\tilde{f}$ に依存しない。このとき次の指数定理が成り立つ:

$$f(z) \neq 0, \quad \forall z \in \{ |z| = 1 \}$$

であるなら T_f はフレドホルム作用素, したがって

$\ker T_f, \operatorname{coker} T_f$ とともに有限次元で,

$$\operatorname{index} T_f = \dim \ker T_f - \dim \operatorname{coker} T_f = (f \text{ の 巻 数 })$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} d \log f$$

が成立つ。

ここで f が D 内正則な函数の境界値となってるなら $\pi(f \cdot h) = f \cdot h$ で, T_f は同型となり $\text{index } T_f = 0$, したがって $\text{index } T_f$ は f が正則函数の境界値であるための障害を表わしている.

以上の index theorem は表題に述べた人々により³²擬凸な境界をもつ多様体の場合に拡張された. ('72, '74, '78年)

1. Ω をスタイル多様体 X 内の相対コンパクト³²擬凸な境界をもつ開集合とする. E, F を Ω の近傍で定義された正則なベクトルバンドルとし, (E, F 上および Ω 上の距離により) 自乗可積分な $E (F)$ の sections の全体を $L^2(\Omega, E) (L^2(\Omega, F))$ と書く. また L^2 -holomorphe な sections 全体のなす閉部分空間を $H^2(\Omega, E) (H^2(\Omega, F))$ と書く.

C^∞ -bundle homo. $\varphi: E \rightarrow F$ が与えられたとき φ に対するフロッツ作用素 $T_\varphi: H^2(\Omega, E) \rightarrow H^2(\Omega, F)$ を $T_\varphi = \pi_F \circ \varphi \circ \pi_E$ で定義する. ここに π_E, π_F は直交射影 $L^2(\Omega, E) \rightarrow H^2(\Omega, E)$, Szöge 作用素, を表わし. $\varphi: L^2(\Omega, E) \rightarrow L^2(\Omega, F)$ は写像 $s \mapsto \varphi \cdot s$ を表わす.

次の定理が示される ([4] の p 79 $\rightarrow$ 81) ([1]).

定理 (1) $\varphi: E \rightarrow F$ が $\partial\Omega = \overline{\Omega} - \Omega$ のある近傍で C^∞ -isomorphe なら T_φ は フレトホルム作用素となり,

$$\text{index } T_\varphi = \dim \ker T_\varphi - \dim \text{coker } T_\varphi$$

が定義される. これを $a\text{-index}(\varphi)$ (analytical index) と書く.

(2) $a\text{-index}(\varphi)$ は bundle homo. φ の $\partial\Omega$ の近傍における isomorphism の homotopy 類のみに依存する.

$$(3) \quad a\text{-index}(\varphi \cdot \psi) = a\text{-index}(\varphi) + a\text{-index}(\psi)$$

$$\text{但 } \varphi: E \rightarrow F, \quad \psi: F \rightarrow G.$$

系 1. $a\text{-index } K^0(\overline{\Omega}, \partial\Omega) \rightarrow \mathbb{Z}$

が定義される. (Oka-Grauert principle より $\forall x \in$

$K^0(\overline{\Omega}, \partial\Omega)$ に対し $\exists E, F$ holomorphic vector bundles on $\overline{\Omega}$, $\exists \varphi: E \rightarrow F$ C^∞ -isomorphism, such that

φ isomorphe on a n.b.d of $\partial\Omega$, $\#(\varphi) = x$.

であるから $a\text{-index } x = a\text{-index}(\varphi)$ とすればよい.)

系 2. E, F (holomorphically) trivial とし.

$\partial\Omega$ が 単連結 であるなら, $\forall \varphi: E \rightarrow F$ C^∞ homomorph.

$\partial\Omega$ の n.b.d で isomorphe なものに対し $a\text{-index}(\varphi) = 0$.

Venugopal Krishna [1]. $\partial \Omega = S^{2n-1}$ のとき

$$K^{-1}(S^{2n-1}) \cong [S^{2n-1}, \varinjlim GL(N, \mathbb{C})]$$

$\delta \downarrow$

$$K^0(\bar{\Omega}, \partial \Omega) \xrightarrow{a\text{-index}} \mathbb{Z}$$

により $a\text{-index} : K^{-1}(S^{2n-1}) \rightarrow \mathbb{Z}$ を定義し,

$$[S^{2n-1}, GL(N, \mathbb{C})] = \pi_{2n-1}(GL(N, \mathbb{C})) \text{ の生成元 } (q)$$

に対し, $a\text{-index}(q)$ を計算し, Venugopal Krishna は

$$a\text{-index} = (-1)^n \deg$$

を示した. ここに $\deg : \pi_{2n-1}(GL(N, \mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{Z}$

($N \gg 1$) が Bott periodicity から定義される. こうし

て analytical index の topological formula が得られる.

Burns は これを 一般の 強擬凸 な場合に拡張した.

2. Burns の方法.

Ω は スタイル多様体 X^n 内の境界 $\partial \Omega$ が 強擬凸 な
相対コンパクトな集合 とする. $x_0 \in \partial \Omega$ とする.

$(q) \in K^0(\bar{\Omega}, \partial \Omega)$ であって 次の条件を満たすものを
構成しよう:

$$(i) \quad q|_{\bar{\Omega} - \{x_0\}} : E|_{\bar{\Omega} - \{x_0\}} \rightarrow F|_{\bar{\Omega} - \{x_0\}}$$

は C^∞ -isomorphe. (このとき, E, F の fibre dim を N
と書く)

$$(ii) \quad a\text{-index}(q) = +1$$

(iii) φ の local degree at $x_0 = (-1)^n$, ことに local degree は x_0 での局所座標近傍内の x_0 を中心とする球面 S_0^{2n-1} により, $\varphi|_{S_0^{2n-1}} : S_0^{2n-1} \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ の degree として定義される。

φ のつくり方

Hilbert Syzygy & Cartan th. B より 次の $\overline{\mathbb{C}}^n$ 上の exact 列がある:

$$0 \rightarrow F_n \xrightarrow{\psi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\psi_1} F_0 \rightarrow \mathcal{O}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0} \cong \mathbb{C} \rightarrow 0$$

ここに $F_i \cong \mathcal{O}^{P_i}$ (vector bundle), ψ_i は holomorphic map.

F_i 上の metric を適当にとり formal adjoint homo.

$\psi_i^* : F_{i-1} \rightarrow F_i$ をつくる.

$$E = \bigoplus_{\text{even}} F_i, \quad F = \bigoplus_{\text{odd}} F_i \quad \text{とおく.}$$

$$\varphi = \psi + \psi^* : E \rightarrow F \quad \text{を}$$

$$(\psi + \psi^*)(u) = \psi_i(u) \oplus \psi_{i+1}^*(u), \quad u \in F_i$$

と定義する.

$K^0(\overline{\mathbb{C}}^n, \overline{\mathbb{C}}^n - \{x_0\})$ の元として, (φ) と complex

$$0 \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow 0$$

は 同じものとなることに注意しよう。実際

$\overline{\mathbb{C}}^n - \{x_0\}$ において (上の exactness より) φ は isomorphe

になっている。一方 x_0 での $\mathcal{Q}$ の local degree は $(-1)^n$ であることがわかる ([5])。

ψ_i に対応して Toeplitz operator $T_{\psi_i}: H^2(\Omega, F_i) \rightarrow H^2(\Omega, F_{i+1})$ が得られるが, complex

$$\star \quad 0 \rightarrow H^2(\Omega, F_n) \xrightarrow{T_{\psi_n}} \cdots \xrightarrow{T_{\psi_2}} H^2(\Omega, F_0) \rightarrow 0$$

を考えると, Ω Stein だから,

$$H^j(\Omega, \mathcal{L}_{hol}^2(F_i)) = 0, \quad j \geq 1$$

により, $\star$ は $i \neq 0$ で exact となり, また

$$\text{coker } T_{\psi_1} \cong \mathbb{C}.$$

一方 $\star$ の Hodge 分解 を考え

$$a\text{-index}(\mathcal{Q}) = \text{index } T_{\psi+\psi^*} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim \left(\frac{\ker T_{\psi_i}}{\text{Im } T_{\psi_{i+1}}} \right)$$

がわかるから

$$a\text{-ind}(\mathcal{Q}) = +1. \quad \text{—}$$

$\mathcal{Q} \in K^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\Omega)$ が, 1点のみで特異な (isomorphism でない) homomorphism of vector bundles, の和に分解しているとき, 上の結果より

定理. $\mathcal{Q} \in K^0(\overline{\Omega}, \overline{\Omega} - \bigcup_{j=1}^k x_j)$ に対し

$$a\text{-ind } \mathcal{Q} = (-1)^n \cdot \sum_{i=1}^k \deg x_i \mathcal{Q}$$

を得る。

3. Boutet de Monvel の Toeplitz 作用素

Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の強擬凸領域とし, C^∞ -fn. r により
 $\Omega = \{r < 0\}$, $dr \neq 0$ on $\partial\Omega$, により与えら
 れているとしよう。

$$\alpha = \frac{1}{2i} (\partial r - \bar{\partial} r) |_{\partial\Omega}$$

$$\Sigma^+ = \mathbb{R}^+ \alpha \subset T^*(\partial\Omega)$$

とする. α は contact form on $\partial\Omega$ を与える. (あるいは
 は Σ^+ は $T^*(\partial\Omega)$ のシンプレクティック部分多様体となる.
 とも言える.) $\partial\Omega$ 上の measure (with $C^n > 0$ density)
 を定め, $L^2(\partial\Omega)$, $H^2(\partial\Omega) = L^2(\partial\Omega) \cap \ker \bar{\partial}_b$
 を考える. ここに $\bar{\partial}_b$ 作用素 は Kohn のそれ。

$\partial\Omega$ 上の擬微分作用素 (order m)

$$Qf(x) = \int e^{ix\zeta} a(x, \zeta) \hat{f}(\zeta) d\zeta$$

$$a(x, \zeta) = \sum_0^\infty a_{m-j}(x, \zeta), \quad \zeta \neq 0$$

a_{m-j} は homogeneous order $m-j$ in ζ .

$\pi: L^2(\partial\Omega) \rightarrow H^2(\partial\Omega)$ を 射影 (Szegő 作用素)
 として, Q に対応した Toeplitz 作用素を

$$T_Q = S \cdot Q \cdot S$$

で定義する. Q の主表象 $\sigma_m(Q)$ の Σ^+ への制限
 $\sigma_m(Q)|_{\Sigma^+}$ が可逆なとき T_Q は elliptic であると

いふ。Toeplitz作用素 T_Q が elliptic なら parametrix

が存在する: $T_Q \cdot T_{Q'} \sim \text{Id}$, $T_{Q'} \cdot T_Q \sim \text{Id}$

$$\sigma(T_{Q'}) = \sigma(T_Q)^{-1}$$

ただし: $\sigma(T_Q) = \sigma_m(Q)|\Sigma^+$, $\sigma(T_{Q'}) = \sigma_m(Q')|\Sigma^+$.

したがって $\dim \ker T_Q$, $\dim \text{coker } T_Q$ が finite となり $\text{index } T_Q$ が定義される。

T_Q が elliptic なら $\ell = \sigma(T_Q) = \sigma_m(Q)|\Sigma^+ \in L^2$
 $\ell \cdot \alpha \in \Sigma^+$ は invertible より, $[\ell] \in K^1(\partial\mathbb{R})$ が
 定義される ([5]).

定理

$$\text{index } T_Q = \langle \text{ch } [\ell], [\partial\mathbb{R}] \rangle$$

$$= \frac{(n-1)!}{(2n-1)!(2\pi i)^n} \int_{\partial\mathbb{R}} \text{Trace}(\ell^{-1} d\ell)^{2n-1}$$

これは Atiyah - Singer の elliptic op に対する index theorem を用いて示されている。

なお T_Q が elliptic なとき, T_A : elliptic Toeplitz 作用素 で $\sigma_\ell(A)|\Sigma^+$ が自己共役なものと, 0 にならない C^∞ -函数 f (on $\partial\mathbb{R}$) が存在して

$$\sigma(T_Q) = \sigma_m(Q)|\Sigma^+ = \sigma(T_A) + \sigma(T_f),$$

$$\sigma(T_A) = \sigma_\ell(A)|\Sigma^+, \quad \sigma(T_f) = f \cdot \text{Id},$$

が示されるので

$$\text{index } T_D = \text{index } T_f$$

となり 指数を考えるには. C^0 - f_n , のみを考えれば十分なこと加わかる.

文献

1. Venugopalkrishna : Fredholm operators associated with strongly pseudoconvex domains in C^n
J. Func Anal 9. p349-373. (1972)
2. Barro : On Venugopalkrishna's index problem,
Recontre en Analyse complexe..., Montreal 1975
3. Boutet de Monvel : On the index of Toeplitz operators
Inv. Math. 50 p249-272 (1979)
4. Folland - Kohn. The Neuman problem for the Cauchy-Riemann complexes, A. M. Studies 75.
5. Atiyah: Algebraic topology and elliptic operators
Comm. Pure Appl. Math Vol XX. p237-249
(1967)