

逆問題と正準変換

名大 理 児玉 裕若

§ 序

Soliton 解をもつ、非線形分散型方程式の初期値問題で、exact に解く方法の 1 つに、逆散乱法があることは、よく知られている。近年、Ablowitz 等¹⁾は、逆散乱法で解ける方程式のクラスを、Systematic に議論した。このクラスには、Korteweg de Vries 方程式、変形 Korteweg de Vries 方程式、非線形 Schrödinger 方程式等が含まれる。これらの方程式に、共通な、注目すべき性質として、無限個の保存量の存在がある。Zakharov^{2,3)}等^{2,3)}は、このことに関連して、KdV 方程式、非線形 Schrödinger 方程式等は、完全積分可能な Hamiltonian System であることを示した。有限自由度 N の Hamiltonian System では、互いに involution にある N 個の保存量の存在は、系が完全積分可能であることの必要十分条件である (Liouville の定理)、が、ここで、

考えているような無限次元の系については、無限回の保存量の存在は、系が完全積分可能であることの必要条件のみを与え、一般に、完全積分可能であることを証明することはできない。しかし、逆散乱問題で解きうるという性質を用いることで、一般的に、これらの方程式 (Ablowitz 等¹⁾ が示した逆散乱法で解くことができる方程式) が、完全積分可能であることを示せる。

ここでは、逆散乱 Scheme を Ablowitz 等の提出したものを¹⁾ 使い、この Scheme から得られる、非線形方程式を、

Hamiltonian System と定義し、一般的に、この System が完全積分可能であることを示す。このとき 逆散乱 Scheme は、正準変換であることが示され、初期値問題は、単に、正準変数の 1 parameter t の action として考えられる。

§1 Ablowitz 等の 散乱 Scheme と 散乱問題.

Potential $g(x,t)$, $r(x,t)$ を持つ 1次元 Dirac 型 Op. についての 散乱問題.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + i\lambda \varphi_1 &= g(x,t) \varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - i\lambda \varphi_2 &= r(x,t) \varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

を考える。Ablowitz 等は、 φ_1, φ_2 についての時間発展を

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= A \varphi_1 + B \varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= C \varphi_1 - A \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

の形で定義し、(1), (2) 式組の integrability condition をつかって $A(x, t, \xi)$, $B(x, t, \xi)$, $C(x, t, \xi)$ の間の関係より、 ξ, t についての非線形方程式を得た。まず、(1) 式の散乱問題を考える為に、次の Jost 函数を定義する。 for real ξ .

$$\left. \begin{aligned} f(x, t, \xi) &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ \bar{f}(x, t, \xi) &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \end{aligned} \right\} \text{ as } x \rightarrow -\infty \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} g(x, t, \xi) &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \\ \bar{g}(x, t, \xi) &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \end{aligned} \right\} \text{ as } x \rightarrow \infty \quad (4)$$

このとき、 f, g は x の次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, \xi) &= e^{-i\xi x} + \int_{-\infty}^x e^{-i\xi(x-s)} g(s) f_2(s, \xi) ds \\ f_2(x, \xi) &= \int_{-\infty}^x e^{i\xi(x-s)} r(s) f_1(s, \xi) ds \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$g_1(x, \xi) = - \int_x^{\infty} e^{-i\xi(x-s)} g(s) g_2(s, \xi) ds \quad (6)$$

$$g_2(x, \xi) = e^{i\xi x} - \int_x^\infty e^{i\xi(x-s)} r(s) g_1(s, \xi) ds \quad)$$

又、 $g, \bar{g}$ は (1) 式の一般独立な解であるから、

$$f(x, \xi) = a(\xi) \bar{g}(x, \xi) + b(\xi) g(x, \xi) \quad (7)$$

$$\bar{f}(x, \xi) = -\bar{a}(\xi) g(x, \xi) + \bar{b}(\xi) \bar{g}(x, \xi) \quad (8)$$

と表わすことが可能である。係数 $a(\xi), b(\xi)$ は、

$$a(\xi) = W[f; g], \quad b(\xi) = W[\bar{g}; f] \quad (9)$$

ここで $W[f; g] \equiv f_1 g_2 - f_2 g_1$ は Wronskian を表わす。

Jost 函数 (3), (4) の定義より、 $a(\xi)$ ($\bar{a}(\xi)$) は上 (下) 半平面に解析接続可能であることがわかる。

$a(\xi), \bar{a}(\xi)$ の零点は、(1) 式の bound state を意味し、このとき、次の関係が成立する。

$$f(x, \xi_n) = c_n g(x, \xi_n) \quad \text{Im } \xi_n > 0 \quad n=1, \dots, N_1 \quad (10)$$

$$\bar{f}(x, \bar{\xi}_m) = \bar{c}_m \bar{g}(x, \bar{\xi}_m) \quad \text{Im } \bar{\xi}_m < 0 \quad m=1, \dots, N_2 \quad (11)$$

これらの組 $S = \{a, \bar{a}, b, \bar{b}, \xi_n, \bar{\xi}_m, c_n, \bar{c}_m\}$ を、散乱データと呼ぶ。又、(11) 式より、次の関係があることがわかる。

$$a(\xi) \bar{a}(\xi) + b(\xi) \bar{b}(\xi) = 1 \quad \text{for real } \xi \quad (12)$$

逆散乱問題に与えらば、 S の potential g, r はきめることは一意である。¹⁾

§ 2. 保存量と散乱データの関係

Potential g, r は ここでは特に、

$$(\partial_x^n g) \cdot (\partial_x^m r) \rightarrow 0 \quad (\text{急減少}) \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

$$n, m = 0, 1, 2, \dots$$

とする。このとき $\xi \rightarrow \infty$ で 先のような (1) 式の漸近解を考えることができる。

$$f_1(x, \xi) = \exp \left\{ -i\xi x + \int_{-\infty}^x \Phi_1(s, t, \xi) ds \right\} \quad (13)$$

$$\rightarrow a(\xi) e^{-i\xi x} \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

すなわち、

$$\ln a(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(s, t, \xi) ds \quad (14)$$

同様に、

$$\bar{f}_2(x, \xi) = -\exp \left\{ i\xi x + \int_{-\infty}^x \Phi_2(s, t, \xi) ds \right\} \quad (15)$$

$$\rightarrow -\bar{a}(\xi) e^{i\xi x} \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

$$\therefore \ln \bar{a}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(s, t, \xi) ds \quad (15)$$

一方、(2) 式より Φ_1, Φ_2 について、次式を得る

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(-A - \frac{B}{g} \Phi_1 \right) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(A - \frac{C}{r} \Phi_2 \right) = 0 \quad (18)$$

よって、(17)、(18)式の右2項目の積分が零であるならば、(14)、(15)は保存量であることがわかる。(13)式を(1)式に代入して、Potentialの項で保存量を表わすと、

$$\Phi_1(x, t, \xi) = \frac{1}{2i\xi} \left\{ \Phi_1^2 + g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{g} \Phi_1 \right) - g r \right\} \quad (19)$$

これより、 Φ_1 を ξ の逆中で展開して

$$\Phi_1(x, t, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_1^{(n)}(x, t)}{(2i\xi)^n} \quad (20)$$

次の recursion formula を得る。

$$\phi_1^{(k+1)} = g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{g} \phi_1^{(k)} \right) + \sum_{l=1}^{k-1} \phi_1^{(l)} \phi_1^{(k-l)} \quad (21)$$

このとき保存量は、例えば、

$$I_1^{(0)} = - \int g r dx, \quad I_1^{(2)} = - \int r g_x dx \quad (22)$$

$$I_1^{(3)} = \int (g^2 r^2 - g r_{xx}) dx, \quad I_1^{(4)} = \int (3g^2 r r_x - g r_{xxx}) dx$$

$$\dots \dots \dots I_1^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^{(k)}(x, t) dx \quad (23)$$

Φ_2 に関して同様に計算すると $I_1^{(k)} = I_2^{(k)}$ であることが、

ただちにわかる。又、(22)の積分が存在することは明らか。

§3 Hamiltonian System としての非線形方程式

次のような Hamiltonian System を定義する。

$$q_t = \{q, H\}, \quad r_t = \{r, H\} \quad (24)$$

H は、前節で求めた保存量 I により表わされる。又、

$\{, \}$ は Poisson bracket を表わし、次のように定義される。

$$\{u, v\} = i \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{\delta u}{\delta q} \frac{\delta v}{\delta r} - \frac{\delta u}{\delta r} \frac{\delta v}{\delta q} \right) + \left(\frac{\delta u}{\delta q^*} \frac{\delta v}{\delta r^*} - \frac{\delta u}{\delta r^*} \frac{\delta v}{\delta q^*} \right) \right] \quad (25)$$

ここで $\delta/\delta q$ は、Fréchet 微分を表わす。このとき、

$$\begin{aligned} \{q(x), r(x')\} &= i\delta(x-x') \\ \{q(x), q(x')\} &= \{r(x), r(x')\} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

を満足し、 q, r が canonical set となることがわかる。

次に (24) を正準変換するが、その前に、(24) の形で与えられる非線形発展方程式のクラスを考えよう。

$$\text{Class 1: } H = -(I^{(3)} + I^{(3)*}) \quad (27)$$

とすると、(24) 式は

$$i\phi_t = 2r\phi^2 - \phi_{xx}, \quad i r_t = -2\phi r^2 + r_{xx}$$

特に, $r = -\phi^*$ とおくと,

$$i\phi_t + \phi_{xx} + 2|\phi|^2\phi = 0 \quad (28)$$

なる非線形 Schrödinger 方程式となる。

$$\text{Class 2: } H = i(I_1^{(4)} - I_1^{(4)*}) \quad (29)$$

とすると,

$$\phi_t = 6\phi\phi\phi_x - \phi_{xxx}, \quad r_t = 6\phi r r_x - r_{xxx}$$

i) $r = i, \phi = iu$ とおくと,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (30)$$

なる Korteweg-de Vries 方程式となる。

ii) $r = \phi = iu$ とおくと,

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0 \quad (31)$$

なる変形 Korteweg-de Vries 方程式となる。

一般に,

$$H = \sum_{n=1}^N (\alpha_n I^{(n)} + \text{c.c.}) \quad (32)$$

が考えられ, generalized KdV 方程式等が含まれてい
ることが容易にわかる。

§ 4. 正準変換

散乱問題に就ては, Potential ϕ, r と散乱 T-マトリクス
の間には一対一の関係がある。そこで今, ϕ, r system

から、散乱データの項への正変換を考える。ここで、

Fréchet derivative $\mathcal{E}$ 、一般性を失うことなく、次のように定義する。

$$\frac{\delta f(x, \xi)}{\delta g(x)} \equiv \lim_{s \uparrow x} \frac{\delta f(x, \xi)}{\delta g(s)} \quad (33)$$

この定義より、(9)式から、 a, b の g, r についての Fréchet 微分は、Jost 函数を用いて、(real ξ について)

$$\frac{\delta a(\xi)}{\delta g(x)} = f_2 g_2(x, \xi), \quad \frac{\delta a(\xi)}{\delta r(x)} = -f_1 g_1(x, \xi) \quad (34)$$

$$\frac{\delta b(\xi)}{\delta g(x)} = -f_2 \bar{g}_2(x, \xi), \quad \frac{\delta b(\xi)}{\delta r(x)} = f_1 \bar{g}_1(x, \xi) \quad (35)$$

となる。Poisson bracket $\{a(\xi), b(\xi')\}$ は、(25)より

$$\{a(\xi), b(\xi')\} = i \int dx \left(f_2 g_2(x, \xi) f_1 \bar{g}_1(x, \xi') - f_1 g_1(x, \xi) f_2 \bar{g}_2(x, \xi') \right)$$

となる。一方 (1)式より、 $\xi = \xi_1$ のとき $u^{(1)}, u^{(2)}$,

$\xi = \xi_2$ のとき、 $v^{(1)}, v^{(2)}$ を任意の解の pair とするとき

$$\begin{aligned} & u_1^{(1)} u_1^{(2)} v_2^{(1)} v_2^{(2)} - u_2^{(1)} u_2^{(2)} v_1^{(1)} v_1^{(2)} \\ &= P \frac{i}{2(\xi_1 - \xi_2)} \frac{\partial}{\partial x} \left[(u_1^{(1)} v_2^{(1)} - u_2^{(1)} v_1^{(1)}) (u_1^{(2)} v_2^{(2)} - u_2^{(2)} v_1^{(2)}) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

の関係がある。このように Poisson bracket は、Jost

函数の漸近解のみで与えられる。(36)を用いれば上式は

$$\{a(\xi), b(\xi')\} = -\oint \frac{1}{2(\xi-\xi')} a(\xi) b(\xi') + \oint \frac{1}{2(\xi-\xi')} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2i(\xi-\xi')x} a(\xi') b(\xi)$$

ここで symbol $\oint$ は 主値を表わす。又、

$$\oint \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{i\xi x}}{\xi} \right) = i\pi \delta(\xi)$$

なる、超函数を用いて、

$$\{\ln a(\xi), \ln b(\xi')\} = \oint \left(-\frac{1}{2(\xi-\xi')} \right) + \frac{i\pi}{2} \delta(\xi-\xi') \quad (37)$$

を得る。同様にして、

$$\{\ln \bar{a}(\xi), \ln b(\xi')\} = \oint \frac{1}{2(\xi-\xi')} + \frac{i\pi}{2} \delta(\xi-\xi')$$

$$\{\ln a(\xi), \ln \bar{b}(\xi')\} = \oint \frac{1}{2(\xi-\xi')} - \frac{i\pi}{2} \delta(\xi-\xi')$$

$$\{\ln \bar{a}(\xi), \ln \bar{b}(\xi')\} = \oint \left(-\frac{1}{2(\xi-\xi')} \right) - \frac{i\pi}{2} \delta(\xi-\xi')$$

$$\{a(\xi), \bar{a}(\xi')\} = \{b(\xi), \bar{b}(\xi')\} = 0$$

を得る。こゝより、

$$P_{\xi} = \ln |a(\xi)|^{-2} \quad \text{or} \quad \bar{P}_{\xi} = \ln |\bar{a}(\xi)|^{-2} \quad (38)$$

$$Q_{\xi} = \frac{2}{\pi} \arg b(\xi) \quad \text{or} \quad \bar{Q}_{\xi} = -\frac{2}{\pi} \arg \bar{b}(\xi)$$

が canonical set をなすことが容易にわかる。すなわち、

$$\begin{aligned}\{P_{\xi}, Q_{\xi'}\} &= \{\bar{P}_{\xi}, \bar{Q}_{\xi'}\} = -\delta(\xi - \xi') \\ \{P_{\xi}, \bar{P}_{\xi'}\} &= \{Q_{\xi}, \bar{Q}_{\xi'}\} = 0\end{aligned}\quad (39)$$

ここで、 P は integral にとり、ていふことに注意せよ。

bound state, $a(\xi_n) = 0$, についても同様に計算できる。特に $\delta\xi_n/\delta g(x)$ には、摂動法を用いる。

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + i(\xi + \delta\xi)\varphi_1 = (g + \delta g \delta(x - z))\varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - i(\xi + \delta\xi)\varphi_2 = r\varphi_1 \end{cases}$$

ただし、 $g \rightarrow g + \delta g$ の摂動を受けた方程式を考え、波動函数 φ の連続性と、有界性をつかって、次式をうる。

$$\frac{\delta\xi_n}{\delta g(x)} = -\frac{1}{\dot{a}(\xi_n)} f_2 g_2(x, \xi_n) \quad (40)$$

同様にして、 r について、

$$\frac{\delta\xi_n}{\delta r(x)} = \frac{1}{\dot{a}(\xi_n)} f_1 g_1(x, \xi_n) \quad (41)$$

ここで $\dot{a}$ は ξ についての微分と意味する。又、

$$\frac{\delta C_n}{\delta g(x)} = -f_2 \bar{g}_2(x, \xi_n), \quad \frac{\delta C_n}{\delta r(x)} = f_1 \bar{g}_1(x, \xi_n)$$

は、明らか。これから Poisson bracket を計算して、

(36)式をつかうことで、次式を得る。

$$\{\xi_n, \zeta_{n'}\} = 0 \quad (n \neq n')$$

$$\{\xi_n, \xi_{n'}\} = \{\zeta_n, \zeta_{n'}\} = 0$$

$$\{\xi_n, \zeta_n\} = \frac{1}{2} \zeta_n$$

これから、

$$P_n = \xi_n, \quad Q_n = -2 \ln \zeta_n \quad (42)$$

が Canonical set であることが容易にわかる。一方、

$Q(\xi_n) = 0$ と考慮することによって連続部分 ξ についての Canonical set と、(42) とが commutative であることが示せる。又、 $\bar{Q}(\xi_m) = 0$ の部分についても全く、同様の結果を得る。

$$\bar{P}_m = \bar{\xi}_m, \quad \bar{Q}_m = -2 \ln \bar{\zeta}_m \quad (42)'$$

更に、このような Canonical set (38), (42) は散乱データ δV に同値であることが証明できる。このようにして、散乱問題は、 δ, γ から、 P, Q への正準変換であることが出来る。そして、正準変換は、逆をもつことから、逆散乱問題も又、正準変換である。

§5 Canonical 変数による Hamiltonian の表現

(14) 式において、 $Q(\xi)$ は、 $|\xi| \rightarrow \infty$ で 2 次のような漸近形をもつことがわかる。

$$a(\xi) \rightarrow 1 \quad \text{as} \quad |\xi| \rightarrow \infty$$

よって 次の展開が可能である。

$$\ln a(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\xi^k} \quad \text{Im } \xi \geq 0 \quad (44)$$

(22) 式と比較して、次式を得る。

$$I_k = (2i)^k C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \ln a(\xi) \cdot \xi^{k-1} d\xi \quad (45)$$

積分路は、上半平面にわたってとる。 $a(\xi)$ については、bound state 及び、漸近形を考慮して次式で表わせる。

$$a(\xi) = \hat{a}(\xi) \prod_{n=1}^{N_1} \frac{\xi - \xi_n}{\xi - \xi_n^*} \quad \hat{a}(\xi): \text{reduced function of } a(\xi)$$

$\hat{a}(\xi)$ は、上半平面で極点をもちない、 $a(\xi)$ と同じ解析性をもつ函数である。これをつかって (45) 式を計算すると

$$\begin{aligned} H_1 &= \alpha_k I_1^{(k)} + C, C \\ &= -\alpha_k \frac{(2i)^k}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |a(\xi)|^2 \cdot \xi^{k-1} d\xi \\ &\quad + \alpha_k \frac{(2i)^k}{2\pi i} \sum_{n=1}^{N_1} \oint \ln \frac{\xi - \xi_n}{\xi - \xi_n^*} \cdot \xi^{k-1} d\xi \end{aligned}$$

ここで、 α_k は、 k が偶数のとき純虚数、奇数で実数となるように選ぶ。よって、P. Q で表わせば

$$H_1[P, Q] = \alpha_k (2i)^k \left[\frac{1}{\pi i} \int P_\xi \cdot \xi^{k-1} d\xi - \sum_{n=1}^{N_1} \frac{P_n^k - P_n^{*k}}{k} \right] \quad (46)$$

同様にして,

$$H_2[\bar{P}, \bar{Q}] = \alpha_k (2i)^k \left[\frac{1}{\pi i} \int \bar{P}_\xi \cdot \xi^{k-1} d\xi + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{\bar{P}_m^k - \bar{P}_m^{*k}}{k} \right] \quad (47)$$

を得る。このように、 P, Q を変換した action angle 型のものである。 P, Q の t に関する action は次の Hamiltonian flow によって記述される。

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta Q}, \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{\delta H}{\delta P} \quad (48)$$

これより、この system が

$$P = \text{const.} \quad (\text{action variable}) \quad (49)$$

であり、完全積分可能であることが分かる。特に、固有値 ξ_n は (48) (24) の Hamiltonian flow で不変である。

前にあげた、幾つかの例について具体的に、 P, Q の action を求めてみると、

$$\text{Class 1} \quad H = -(I^{(3)} + I^{(3)*}), \quad (\alpha_k = -1, \quad k=3)$$

非線形 Schrödinger 方程式

$$\xi_n = \bar{\xi}_n^* \quad : \text{time invariant.}$$

$$b(t, \xi) = \bar{b}^*(t, \xi) = b(0, \xi) \exp(4i\xi^2 t)$$

$$c_n(t) = \bar{c}_n^*(t) = c_n(0) \exp(4i\xi_n^2 t)$$

Class 2 : $H = i(I^{(4)} - I^{(4)*})$ ($\alpha_k = i$, $k=4$)

i) K-dV 方程式

$$\zeta_n = iK_n : \text{time invariant} \quad K_n > 0 \text{ real.}$$

$$b(t, \xi) = -\bar{b}^*(t, \xi) = b(0, \xi) \exp(8i\xi^3 t)$$

$$c_n(t) = -\bar{c}_n^*(t) = c_n(0) \exp(8K_n^3 t)$$

ii) M-KdV 方程式

$$\zeta_n = \bar{\zeta}_n^* : \text{time invariant}$$

$$b(t, \xi) = \bar{b}^*(t, \xi) = b(0, \xi) \exp(8i\xi^3 t)$$

$$c_n(t) = \bar{c}_n^*(t) = c_n(0) \exp(8i\xi_n^3 t)$$

こゝからは、よく知られた結果である。

References

- 1) M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell and H. Segur:
Phys. Rev. Lett., 31 (1973) 125
- 2) V.E. Zakharov and L.D. Faddeev;
Funct. Anal. Appl., 5 (1971) 280
- 3) V.E. Zakharov and C.V. Manakov;
Teoret. Matem. Fiz., 19 (1974) 332
(こゝでの結果は、Prog. Theor. Phys. Vol 54 No.3 に掲載予定)