

Weyl 領域流の剛性と, Weil・松島による古典的な消滅定理¹

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

金井 雅彦

Rigidity of the Weyl chamber flow, and the classical vanishing theorems of Weil and Matsushima

Masahiko KANAI

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

kanai@math.nagoya-u.ac.jp

Abstract

By a recent work of the author, uncovered was an unexpected link between the classical vanishing theorems of Matsushima and of Weil on the one hand, and rigidity of the Weyl chamber flow on the other. The aim of the present note is to give a short account of that work.

松島や Weil による古典的な消滅定理と, Weyl 領域流 (Weyl chamber flow) に対する剛性問題の間には, 実は予期せぬ関係が存在することが, 著者による最近の仕事 [Ka2] を通じて理解されるに至った. このノートはその仕事の簡単な要約を目的とする.²

Weil や松島の消滅定理の起源を, 有限次元リー群の中への群準同型に対する剛性問題に求めることに, 恐らく異論はないと思う. 現に, 高階リー群の格子から加群 $\mathbb{R}$ の中への非自明な準同型は存在しないことが, 松島の消滅定理の内容であった. 一方, Weil の消滅定理は, いわゆる Weil の局所剛性定理の証明の核をなす. そして, Weil の剛性定理は, (有限次元) リー群 G とその格子 Γ に対し, Γ から G の中への準同型をその興味の対象とする. これに反し, Weyl 領域流 (Weyl chamber flow) は, 高階リー群に付随して現れる一種の力学系, あるいは群作用である. すなわち, それは, 微分同相群 — これこそ最も典型的な無限次元リー群である — の中への連続な準同型である. 非コンパクト群 (その中には離散無限群も含まれる) の作用を理解しようとするに際して不可避な困難の多くが, 実はこの無限次元性に起因すると考えられる (例えば, [Ka1], [KS2] を見よ). 「有限次元の世界」から「無限次元の世界」に至る道筋には, 我々の行く手を阻む巨大な断崖が横たわる. ところが, 意外にも, この断崖をさしたる労を払うことなく克服することができる場合があることが判明した. それが, 著者による最近の仕事 [Ka2] の主題である.

¹Mathematics Subject Classification 2000: 37C85, 22F05, 53C24.

²同じ趣旨で書かれたものに, [Ka3] がある. このノートはその和訳であるといった方が, 適当かも知れない.

Received November 8, 2006.

リー群 $G = SL(n+1, \mathbb{R})$ とその中の一樣格子 Γ を考える (実は, 本稿で紹介する結果はすべて, 以下の条件を満たす非コンパクト半単純リー群 G とその一樣格子に対し成立するが, 記述を単純化するために, $G = SL(n+1, \mathbb{R})$ の場合のみを取り扱う: (i) G の中心は有限; (ii) G の $\mathbb{R}$ -階数は 2 以上; (iii) G の単純因子は, コンパクトリー群, $SO(k, 1)$, $SU(k, 1)$ のいずれにも局所同型ではない). このとき, 以下のふたつの消滅定理が成立することが古くから知られている. ただし, G の随伴表現を通じ, Γ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ に作用していると考え.

$$(\text{Matsushima}) \quad H^1(\Gamma; \mathbb{R}) = 0;$$

$$(\text{Weil}) \quad H^1(\Gamma; \mathfrak{g}) = 0.$$

これらが, 私たちが興味の対象とする古典的な消滅定理, 松島の消滅定理と Weil によるそれである.

一方, 私たちの取り扱う力学系は以下の仕方で構成される. $A \cong \mathbb{R}^n$ を, 対角成分がすべて正であるような対角行列からなる $G = SL(n+1, \mathbb{R})$ の閉部分群とする. このアーベル群 A の商空間 $\Gamma \backslash G$ への右からの作用は Weyl 領域流 (Weyl chamber flow) と呼ばれ, 強い剛性を示す力学系あるいは群作用として近年注目を集めている (例えば, [KS1, KS2] を見よ). Weyl 領域流は局所自由な作用であるから, その軌道は空間 V の非特異な葉層構造を形成する. それを $\mathcal{F}$ としよう.

葉層化多様体 $(V, \mathcal{F})$ の接ドラムコ ホモロジー (tangential de Rham cohomology,あるいは leafwise de Rham cohomology) を, $H^*(V, \mathcal{F}; \mathbb{R})$ と記す. これは接ドラム複体 $\{\Omega^*(V, \mathcal{F}; \mathbb{R}), d_{\mathcal{F}}\}$ のコホモロジーである. ただし, $\Omega^p(V, \mathcal{F}; \mathbb{R})$ は実数値接 p -形式, すなわち, V 上のベクトル束 $\bigwedge^p T^*\mathcal{F}$ の C^∞ 切断全体である. 一方, $d_{\mathcal{F}}$ は接外微分 (tangential exterior derivative) を表す: 葉層構造 $\mathcal{F}$ に接する方向の微分しかその定義式の中に現れないことを除けば, 通常の外微分と全く同様な仕方で定義される. Katok および Spatzier [KS1] により得られた定理のひとつに, 以下のものがある. ただし, $\mathfrak{a} \cong \mathbb{R}^n$ はアーベル群 $A \cong \mathbb{R}^n$ のリー環を表す.

$$(\text{Katok-Spatzier}) \quad H^1(V, \mathcal{F}; \mathbb{R}) \cong \mathfrak{a}^*.$$

より正確に言えば, 彼らの定理は以下を主張する. いま, $\alpha \in \Omega^1(V, \mathcal{F}; \mathbb{R})$ を接閉 (tangentially closed) な (すなわち, $d_{\mathcal{F}}\alpha = 0$ を満たす) 接 1-形式とする. さらに, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対し $\int_V \alpha(H) = 0$ が成り立つと仮定する. ただし, ここでは, Weyl 領域流を通じて $H \in \mathfrak{a}$ を V 上のベクトル場と考える. また積分は標準測度によるものとする. このとき, α は接完全 (tangentially exact) である: すなわち, $d_{\mathcal{F}}\phi = \alpha$ なる V 上の C^∞ 関数 ϕ が存在する.

Katok-Spatzier の定理からの直ちの帰結として, Weyl 領域流に対するパラメータ剛性定理が得られる ([KS1]): アーベル群 A の V への滑らかな作用で, Weyl 領域流

と滑らかに軌道同型なものは、 A の内部自己同型を除いて、Weyl 領域流と滑らかに共役 (smoothly conjugate) である。

空間 V 上の通常の微分形式が与えられたとき、 $\mathcal{F}$ の横断的方向の値を「無視」することにより、葉層化多様体 $(V, \mathcal{F})$ の接微分形式が得られる。次に述べる「横断方向拡張定理」は、適当な条件を満たす接 1-形式に対し一種逆の操作が可能であることを主張するものである。

定理 1 ([Ka2]). 接閉な接 1-形式 $\alpha \in \Omega^1(V, \mathcal{F}; \mathbb{R})$ が、 $\int_W \alpha(H) = 0$ ($H \in \mathfrak{a}$) を満たすならば、 α は V 上の通常の C^∞ 閉 1-形式 $\theta \in \Omega^1(V; \mathbb{R})$ に一意的に拡張可能である。

定理 1 より、

$$(\text{Matsushima}) \iff (\text{Katok-Spatzier})$$

が従う。すなわち、松島の消滅定理と Katok-Spatzier の定理は「同値」である。しかし、残念ながら、これをもってして Katok-Spatzier の定理の別証明とすることは出来ない。なぜなら、そもそも定理 1 の証明において我々は Katok-Spatzier の定理を必要としているからである。

パラメータ剛性は、Weyl 領域流の軌道に接する方向に関する剛性定理である。軌道に横断的な方向に関する剛性定理として、Katok および Spatzier [KS2] は、Weyl 領域流の軌道による葉層構造 $\mathcal{F}$ に対し、その局所剛性定理 (local rigidity theorem) を証明した。彼らの定理によれば、以下が成り立つ。葉層構造 $\mathcal{F}$ と同じ次元を有する V の葉層構造 $\mathcal{F}'$ を考える (この新たな葉層構造 $\mathcal{F}'$ は、もともとの葉層構造 $\mathcal{F}$ の「摂動」と捉えられるべきものである)。もし (適当な位相に関し) $\mathcal{F}'$ の接束 $T\mathcal{F}'$ がもともとの葉層構造 $\mathcal{F}$ の接束 $T\mathcal{F}$ に「十分近い」ならば、 $\mathcal{F}'$ は $\mathcal{F}$ に滑らかに共役である (すなわち、 $\mathcal{F}'$ を $\mathcal{F}$ に移すような V の C^∞ 級微分同相が存在する)。

局所剛性の概念を「線形化」することにより、葉層構造 $\mathcal{F}$ のもうひとつの横断的剛性、無限小剛性 (infinitesimal rigidity) の概念が導入される。その定式化に際しては、葉層構造 $\mathcal{F}$ の法束 $N\mathcal{F}$ に局所係数を持つ接ドラムコホモロジー $H^*(V, \mathcal{F}; N\mathcal{F})$ が必要となる。その定義を以下に述べる。法束 $N\mathcal{F}$ に値を有する接 p -形式 (すなわち、 V 上のベクトル束 $\wedge^p T^*\mathcal{F} \otimes N\mathcal{F}$ の C^∞ 級切断) 全体を、 $\Omega^*(V, \mathcal{F}; N\mathcal{F})$ と記すことにする。葉層構造 $\mathcal{F}$ の線形ホロノミー D は、法束 $N\mathcal{F}$ の「葉層構造 $\mathcal{F}$ に沿った」アフィン接続と見なされる。しかも、 D は平坦である。そこで、それを用いての接共変外微分 $d_{\mathcal{F}}^p : \Omega^p(V, \mathcal{F}; N\mathcal{F}) \rightarrow \Omega^{p+1}(V, \mathcal{F}; N\mathcal{F})$ を考える。このとき、複体 $\{\Omega^*(V, \mathcal{F}; N\mathcal{F}), d_{\mathcal{F}}^p\}$ のコホモロジーとして定義されるのが、法束 $N\mathcal{F}$ に係数を持つ接ドラムコホモロジー $H^*(V, \mathcal{F}; N\mathcal{F})$ である。そして、以下の消滅が成り立つとき、葉層構造 $\mathcal{F}$ は無限小剛性的であると言われる：

$$(\text{無限小剛性}) \quad H^1(V, \mathcal{F}; N\mathcal{F}) = 0.$$

Weyl 領域流の軌道を葉とする葉層構造 $\mathcal{F}$ の無限小剛性も、また、古典的な剛性定理と密接な関係を有する。実際、[Ka2]において、

$$(\text{Weil}) \implies (\text{無限小剛性}),$$

すなわち、Weil の消滅定理から $\mathcal{F}$ の無限小剛性が帰結されることが証明された。その結果として、以下の定理を得る：

定理 2. Weyl 領域流の軌道葉層構造 $\mathcal{F}$ は無限小剛性的である。

この結果もまた、接微分形式（ただし、今回の場合は、非自明係数を有する微分形式を考える必要がある）の横断方向への拡張可能性を示すことにより証明される。

最後に、先行結果について簡単に言及しておきたい。そもそも、我々が「拡張定理」を考えるようになったのは、松元-三松の仕事 [MM] に触発されてのことである。彼らは、双曲計量（定曲率 -1 ）を有する閉曲面に対し、その単位接束（これは 3 次元多様体である）のいわゆるアノソフ葉層構造を取り扱った。アノソフ葉層構造の自明係数接 1-形式の拡張可能性が彼らにより証明された。彼らのこの結果は、高次元階数 1 の局所対称空間に付随して現れるアノソフ葉層構造に対する結果として、著者により一般化されている ([Ka2])。また、Kononenko の仕事についても触れないわけにはいかない。とくに、定理 1 は彼の定理 [Ko1, Theorem 6.1] と等価である。一方、 G の階数が 3 以上などといった「過剰」な仮定のもと、Kononenko は定理 2 を [Ko2, Theorem 11.1] において証明している。また、A. Katok と S. Ferleger は彼らの未発表論文の中で定理 1 を証明したとのことである。

REFERENCES

- [Ka1] Kanai, M., A new approach to the rigidity of discrete group actions, *GAF*, 6(1996), 943–1056.
- [Ka2] Kanai, M., Rigidity of the Weyl chamber flow, and vanishing theorems of Matsushima and Weil, Preprint.
- [Ka3] Kanai, M., Infinitesimal rigidity of the Weyl chamber flow via the vanishing theorem of Weil, to appear in "Geometric Group Theory, Hyperbolic Dynamics and Symplectic Geometry", Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Report No. 33/2006.
- [KS1] Katok, A. and Spatzier, R. J., First cohomology of Anosov actions of higher rank abelian groups and applications to rigidity, *I. H. E. S. Publ.*, 79(1994), 131–156.
- [KS2] Katok, A. and Spatzier, R. J., Differential rigidity of Anosov actions of higher rank abelian groups and algebraic lattice actions, *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 216(1997), 292–319; translation in *Proc. Steklov Inst. Math.*, 216(1997), 287–314.
- [Ko1] Kononenko, A., Smooth cocycles rigidity for lattice actions, *Math. Res. Lett.*, 2(1995), 345–357.
- [Ko2] Kononenko, A., Infinitesimal rigidity of boundary lattice actions, *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 19(1999), 35–60.
- [MM] Matsumoto, S. and Mitsumatsu, Y., Leafwise cohomology and rigidity of certain Lie group actions, *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 23(2003), 1839–1866.