

虚アーベル体の相対類数

都立大 理学部 飯村 清明

1° $K/\mathbb{Q}$ を実アーベル拡大, $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$, $E \in K$ の単数群, h は K の類数, f は K の conductor とし, $C := \langle -1, \lambda^{1-\sigma} \mid \sigma \in G \rangle$, $\lambda = \prod_{a \in H} (1 - \zeta_f^a)^{\frac{1}{2}}$, $\zeta_f = \exp(\pi i / 2f)$, H は類体論の意味で K に対応する $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times$ の部分群とする. すると, C は E の部分群となるが, Hasse [3], Satz 3 は,

$$(1) \quad [E : C] = g \cdot h$$

を主張している. ここで, $g = \prod (1 - \chi(p))$, 積は, K に属する non-trivial, primitive Dirichlet characters χ , 及び f の素因数 p についてとる. ($g = 0$ である様な体 K に対しては, (1) は, C が E にあつて finite index を有しないことを意味することに注意.) さて, p は odd prime とし, p^n -分体 $K = \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ とする. Iwasawa [4] は, (1) の analogue と思われる次の関係式を発見した: $[R^- : \underline{S}^-] = h^-$, ここで $R^- = \{ \alpha \in \mathbb{Z}[G(K/\mathbb{Q})] \mid \alpha(1+j) = 0 \}$, $j \in G(K/\mathbb{Q})$ は complex

conjugation を induce するもの; $\underline{S}$ は, 2° で定義される level p^n の Stickelberger ideal of R ; $\underline{S}^- = R^- \cap \underline{S}$; h^- は K の相対類数, i.e., $h^- = h/h^+$, $h(h^+)$ は $K(K$ の最大実部分体) の類数. ここで (1) の analogue を思わせた関係式を導くことにあ
る.

ここで, Sinnott [7] 及び Schmidt [8] の結果に照らして
おく必要がある. 前者は, 任意の円分体に対して, index
 $[R^- : \underline{S}^-]$ を完全に計算した. $\underline{S}$ は, $\forall \alpha \in \text{levels}$ の Stick-
elberger elements によって生成される Stickelberger ideal.
後者は, Leopoldt [6] Satz 20 で得られている formula の
analogue を任意の虚 p -ベル体に対して与え, また, (1) の
analogue も任意の虚 p -ベル体に対して与えた. あとの α の
formula は, 私たちのそれと同じであるが, 証明が少し異なる.
る.

1° 以下, 次の記号を用いることにする: $K/\mathbb{Q}$ は虚 p -
ベル体, α の degree を n , f は α の conductor, $G = G(K/\mathbb{Q})$,
 $R = \mathbb{Z}[G]$, $j \in G$ は, complex conjugation を induce する
もの, $R^- = \{ \alpha \in R \mid (Hj)\alpha = 0 \}$, h^- は K/K^+ の相
対類数, K^+ は K の最大実部分体, $\chi \in H$ は, 類体論の n 次
の K に対応する $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times$ の部分群.

さて, $\dot{S}^* = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^f \left(\frac{k}{a}\right) a$; $\underline{S} = \dot{S}R \cap R$, $i \in \text{Lang}[5]$ に従って, $\text{level } f$ a Stickelberger ideal と呼ぶことにする. $e^- = (1-)^{f-1}/2$, $\underline{S} = e^- \dot{S}$, $\underline{S} = SR \cap R$. i は R -ideal とする. $\text{index}[R^- : \underline{S}^*]$ を計算する.

今, $L, M \in \mathbb{Q}[\Gamma]$ の有限生成 $\mathbb{Z}$ -modules とし,
 $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \supseteq M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とする. $\exists a \in \mathbb{Z}$, $T: L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.
 T は linear transformation で, $T(L) = M$. $\zeta: \mathbb{Z}$ symbol
 $(L:M) = |\det(T)|$ で定義する. ζa と容易に ζa になる.
 $(L:M)$ は, T の $\mathbb{Z}$ 上に依存する; $(L:M) = [L:M]$
 $(L \supseteq M \text{ である限り})$; N が $\mathbb{Q}[\Gamma]$ の有限生成 $\mathbb{Z}$ -module で,
 $(L:M)$, $(M:N)$ が定義されてくる限り. $(L:N) = (L:M)(M:N)$.

さて, ζ の symbol を用いる.

$$[R^- : \underline{S}] = (R^- : e^- R)(e^- R : e^- R \dot{S})(e^- R \dot{S} : \underline{S}).$$

先づ, $(R^- : e^- R) = 2^{-\gamma/2}$; $(e^- R \dot{S} : \underline{S})$ の計算のために,
 $\lambda \in \mathbb{N}$ $\lambda \dot{S} \in R$ となる最小数とす.

Lemma 1 $e^- R \dot{S} = R \dot{S}$ であり, $R \dot{S} / \underline{S} \cong \mathbb{Z} / \lambda \mathbb{Z}$; 従って,
 $(e^- R \dot{S} : \underline{S}) = [R \dot{S} : \underline{S}] = \lambda$.

($\because$) $\varphi: R \dot{S} \rightarrow \mathbb{Z}$ $\varphi(\sum a_i \sigma_i) = \lambda a_1$ として, $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} / \lambda \mathbb{Z}$
 ψ は canonical homo. とし, $\theta = \psi \circ \varphi$ とする.

$$0 \rightarrow \underline{S} \xrightarrow{\text{incl}} R \dot{S} \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z} / \lambda \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

$(e^- R : e^- R \dot{S})$ は, $T: e^- \mathbb{Q}[\Gamma] \rightarrow e^- \mathbb{Q}[\Gamma]$ $T(u) = u \dot{S}$

(*) $\chi^+ = \{ \text{primitive even Dirichlet characters associated to } K \}$, $\tilde{\chi} = \chi \cup \chi^+ \ni \chi + \chi^+$. $\prod (1 - \chi(p)p^{-\lambda})$
 $= \prod_{\chi \in \tilde{\chi}} (1 - \chi(p)p^{-\lambda}) / \prod_{\chi \in \chi^+} (1 - \chi(p)p^{-\lambda})$ for any $\lambda \in \mathbb{C}$ である。
 知られてゐる様に, $\prod_{\chi \in \tilde{\chi}} (1 - \chi(p)p^{-\lambda}) = \prod_{\substack{\chi \in K \\ \chi \neq 1}} (1 - N\chi^{-\lambda})$;
 $\prod_{\chi \in \chi^+} (1 - \chi(p)p^{-\lambda}) = \prod_{\substack{\chi \in K^+ \\ \chi \neq 1}} (1 - N\chi^{-\lambda})$. $\lambda = \sigma + it$ $\lambda \rightarrow 0$ と
 すれば, 上の Lem. の後半を使う。前半については, 殊しく
 明らかである。 $\square$

さて, $\Lambda \in \mathbb{N}$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $\exists$ 最小数とする。

Lem. 3. $N \in \mathbb{Q}^{(f)}$ の K の norm $\neq 1$, $\zeta_f = \exp(\pi i / 2f)$
 とすれば, Λ は $N(\zeta_f)$ の order である。 Λ 及び $(\mathbb{Q}^{(f)}:K)$
 が odd ならば, $\Lambda = 2\dot{\Lambda}$ であり, その他の場合には, $\Lambda = \dot{\Lambda}$ 。

(*) Gras [1] p37. Cor. II 3, によれば, $\Lambda = f / (f, \sum_{\sigma \in G} a_{\sigma})$
 によれば, 明らかに $N(\zeta_f)$ の order である。 Λ と $\dot{\Lambda}$ との関係は
 関係式 $S = \dot{S} - (\mathbb{Q}^{(f)}:K)/2 \cdot \sum_{\sigma \in G} a_{\sigma}$ を使えば得られる。 $\square$

$N(\zeta_f)$ について調べるために, K の任意の 1 のべき根の
 に対して, その order $\leq O(\alpha)$ を書き; 各 prime p に対して,
 $\text{ord}_p f \leq n(p)$ とかく。

Lem. 4. $p \mid f$, fixed. に対して, $n' = n(p)$, $L = K \cdot \mathbb{Q}^{(p^{n'})}$,
 $K_0 = K \cap \mathbb{Q}^{(p^{n'})}$ とすれば, $\text{ord}_p O(N(\zeta_f))$ は, $\text{ord}_p O(N_{\mathbb{Q}^{(p^{n'})/K_0}}(\zeta_{p^{n'}}(\mathbb{Q}^{(f)}:L)))$ に等しい。

Lem. 5. $g \neq 0$ を仮定すれば, 各 odd prime $p \mid f$ に対

1. $\text{ord}_p o(N(\beta_f)) = \text{ord}_p w$. 従って $(\sqrt{w})^{-1} \in \mathbb{Z}$ である。

2. $\sqrt{w} \notin \mathbb{Z}$ である。 $(\sqrt{w})^{-1} \in \mathbb{Z}$ である。 Lem. 3 から得られる。

Lem. 6. $n' = \text{ord}_2 f$; $L = K \cdot \mathbb{Q}^{(2^n)}$; $K_0 = K \cap \mathbb{Q}^{(2^{n'})}$.

とすれば、 $\text{ord}_2 o(N(\beta_f))$ は次のとおりである。

Case 1. $w \equiv 0(4)$. $\text{ord}_2 o(N(\beta_f)) = \max\{0, \text{ord}_2 w - \text{ord}_2(\mathbb{Q}^{(4)}:L)\}$.

Case 2. $w \equiv 2(4)$ かつ $K_0 \not\subset \mathbb{R}$. $\text{ord}_2 o(N(\beta_f)) = 1$ if $(\mathbb{Q}^{(4)}:L)$ is odd; $= 0$ if not.

Case 3. $K_0 \subset \mathbb{R}$. $\text{ord}_2 o(N(\beta_f)) = 0$.

Remark. $w \equiv 0(4)$ のとき、 $g^{-1} \neq 0$ は仮定する。 f の odd prime factor はすべて $\equiv 3(4)$ である。 ことが云える。

以上の Lemmas から、 次の $\sqrt{w}$ に関する information が得られる：

Prop. 3. $g^{-1} \neq 0$ は仮定する。 記号は Lem. 6 と同じ。

Case 1. $\sqrt{w} = 2^{-t}$, $t = \min\{\text{ord}_2 w, \text{ord}_2(\mathbb{Q}^{(4)}:L)\}$.

Case 2. $\sqrt{w} = 1$ if $(\mathbb{Q}^{(4)}:L)$ is odd; $= 1/2$ if not.

Case 3. $\sqrt{w} = 1$ if $(\mathbb{Q}^{(4)}:K)$ is odd; $= 1/2$ if not.

Cor. $N := \{p \mid \text{prime}, p \mid f\}$ とする。 $w \equiv 0(4)$ のとき、 $g^{-1} \neq 0$ は仮定する。 $\sqrt{w} = 2^{-t}$, $t = \min\{\text{ord}_2 w, \text{ord}_2 w + N - 2 - \text{ord}_2 n\}$.

Remark. Q に関する [3] §§ 20-26 を参照する。

4°. $u < \infty$ の例に $u \in [R^- : \underline{L}]$ を計算する。

Prop 4. f が素数中なら, $[R^- : \underline{S}] = h^-$; f が composite なら, $g^- \neq 0$ かつ $\exists p: \text{odd prime st } j \in T(p)$ であるならば, $[R^- : \underline{S}] = g^-/2 \cdot h^-$.

($\because$) f が素数 $p \nmid f$ のときは, [3] Satz 22 により $Q=1$. また $g^-=1$. $p \neq 2$ なら Prop 3. Case 3 により $\Lambda/w=1$; $p=2$ なら $L = Q^{(f)}$ となるから Prop 3. Case 1 により $\Lambda/w=1$. 次に $p \neq 2$, $j \in T(p)$ と仮定すれば, K_0 は real かつ $|H| = (Q^{(f)} : K)$ は even となる. 従って Prop 3. Case 3 により, $\Lambda/w = 1/2$. 又, a と置けば, [3] Satz 16 により $Q=1$ $\square$

Cor. $g^-=1$ のときは, $[R^- : \underline{S}] = h^-$ (f が素数中 a と置); $= h^-/2$ (f が composite のとき)

Remark. $g^- \neq 0$ と仮定し n と置次のことを示す: Λ が even なら $\underline{S} = \underline{S}^-$; Λ が odd なら $[\underline{S} : \underline{S}^-] = 2$. 従って上の Cor は, $g^-=1$ ならつねに $[R^- : \underline{S}^-] = h^-$ を主張している.

Prop. 5. f が composite なら G の Sylow 2-subgroup S_2 が cyclic なら $g^- \neq 0$ と示す, $[R^- : \underline{S}] = g^-/2$ if $w \equiv 0(4)$ & $N \geq 3$; $= g^-/2 \cdot h^-$ otherwise.

($\because$) $G = S_2 \times M$ (direct) とし, M の fixed field を $\tilde{K}$, $\tilde{K}$ の unit index を $\tilde{Q}$ と置けば, $\tilde{K}/Q$ は cyclic かつ [3] Satz 23 により $\tilde{Q}=1$. しかるに $(K : \tilde{K}) = \text{odd}$ であるから [3] Satz 15 により, $Q=1$

が、 $Q=1$ から従う。 $\exists p: \text{odd prime}$ と $j \in T(p)$ の場合 17.7 に Prop 4 で扱われ、そうではない場合を考へる。そのとき、 $\mathbb{F}_2$ は cyclic であるから、 $j \in T(2)$ が示される。だから、 $|H| = (Q^{1/2} : K) = \text{even}$ 。ゆえに K_0 は real 83. Prop 3. Case 3 に依り、 $\Lambda/w = 1/2$; $K_0 \not\subset \mathbb{R}$ かつ $w \equiv 2(4)$ 83. Case 2 に依り、やはり $\Lambda/w = 1/2$ 。最後に $\text{ord}_2 w = 2a$ と置く。 $K_0/\mathbb{Q}$ は cyclic 90 7 $K_0 = \mathbb{Q}^{1/4} = \tilde{K}$ とする。かくして、Prop. 3 の Case 1 81. Prop. 5 が証明される。 $\square$

5° Gillard [2] は、[3] Satz 29 を一般、実 p -ヘルベにまで拡張した。この関係式 a analogue も一般、虚 p -ヘルベに対して存在すると思われる。又、木村達雄氏は、1° で述べた Sinnott [7] の関係式 a 一般、虚 p -ヘルベへの拡張を考え、その index を計算する実行可能と思われる algorithm を与えたとを注意しておく。

References.

- [1] G. Gras, "Application de la notion de φ -objet à l'étude du groupe des classes d'idéaux des extensions abéliennes", Publ. Math. de L'Univ. de Besançon (Théorie des Nombres) 1975-76.
- [2] R. Gillard, "Unités cyclotomiques", Séminaire de Théorie des Nombres de Grenoble, 3 novembre 1977.

- [3] H. Hasse, "Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper." Deutsch. Akad. Wiss. Berlin (1952).
- [4] K. Iwasawa, "A class number formula for cyclotomic fields". Ann. of Math. 76 (1962), 171-179.
- [5] S. Lang, "Cyclotomic fields" Springer-Verlag (1978).
- [6] H.-W. Leopoldt, "Über Einheitsgruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper". Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Nat. 2 (1953).
- [7] W. Sinnott "On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic field" Ann. of Math. 108 (1978), 107-134.
- [8] C.-G. Schmidt "Größencharaktere und Relativklassenzahl abelscher Zahlkörper". J. of Number Theory 11 (1979), 128-159.