

有理曲面上の ample ベクトル束

名大 理 細尾敏男

X を代数的閉体 k 上定義された非特異射影的多様体、 E を X 上のベクトル束。 $d = \dim X$ 、 $r = \text{rank } E$ とおく。次の問題を考える。

問題 E が ample となるための良い numerical な充分条件を求めよ。

これに関して以下の事実が知られている。

① (Nakai) $r=1$ つまり $E=L$; 直線束のとき。

L : ample $\iff$ 任意の X の integral closed subscheme Y に対し $(G(L)^s, Y) > 0$ が成立。ここで $s = \dim Y$ 。

② (Atiyah) $d=1$ つまり $X=C$; 曲線のとき。

E が indecomposable ならば $\exists N = N(r, g), \deg C_1(E) \geq N$
 $\Rightarrow E: \text{ample}$. ここで g は C の種数。

定義 H を X の ample な因子とする。このとき E が H -stable
 であるとは、 E の任意の部分連接層 $F (\neq 0 \text{ かつ } \text{rank of } F < r)$ に対して

$$\frac{(C_1(F), H^{d-1})}{\text{rank of } F} < \frac{(C_1(E), H^{d-1})}{r}$$

が成立すること。

③ (Hartshorne) $X = \mathbb{C}$: 曲線, $k = \mathbb{C}$: 複素数体のとき。

E が stable ならば, $E: \text{ample} \Leftrightarrow \deg E > 0$.

定義 X が曲面のとき $\Delta(E) = -C_2(\text{End } E) = (r-1)C_1(E)^2 - 2rC_2(E)$ とおく。
 (任意の X 上の直線束 L に対して $\Delta(E \otimes L) = \Delta(E)$ である)

④ (Hosoh) H が射影平面 $\mathbb{P}^2$ の超平面, E が rank 2 の H -stable ベクトル束のとき

$(C_1(E), H) \geq -\frac{1}{2} \Delta(E) \Rightarrow E: \text{ample}$.

ここでは④の事実を高い rank 及び有理繊維曲面上に拡張し

た結果を述べ、以下の章でその証明を与える。

$\mathbb{P}^2$ 上のrank r のベクトル束 E に対して、直線束 L が存在して $G_1(E \otimes L) = \alpha H$ ($-r+1 \leq \alpha \leq 0$) とできる。 $\alpha(E) = \alpha$ とおく。

定理1 E が $\mathbb{P}^2$ 上のrank r の H -stable ベクトル束のとき

$$(G_1(E), H) \geq -\frac{1}{2} \Delta(E) + \frac{(\alpha+2r)(2-\alpha-r)}{2} \Rightarrow E: \text{ample}.$$

ここで $\alpha = \alpha(E)$ 。

非負整数 n に対して、 $\Sigma_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ とおく。 M を Σ_n の minimal section (つまり Σ_n の section であって $M^2 = -n$ となるもの)。 N を Σ_n の fibre とする。整数の組 (α, β) に対して、 Σ_n 上の因子 $\alpha(M+nN) + \beta N$ を $H_{\alpha, \beta}$ と記す。 $((H_{\alpha, \beta}, M) = \beta, (H_{\alpha, \beta}, N) = \alpha$ であり、 $H_{\alpha, \beta}; \text{ample} \Leftrightarrow \alpha > 0, \beta > 0, |H_{\alpha, \beta}|$; base point free $\Leftrightarrow \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ である。)

Σ_n 上のrank r のベクトル束 E に対して直線束 L が存在して $G_1(E \otimes L) = aM + bN$ ($-r+1 \leq a, b \leq 0$) とできる。 $\alpha(E) = a, \beta(E) = b$ とおく。

定理2 E が Σ_n 上のrank r の $H_{\alpha, \beta}$ -stable ベクトル束のとき

$$(G_1(E), N) \geq -\frac{1}{2} \Delta(E) + c(a, b, r, n) + a$$

$$(G_1(E), M) \geq -\frac{1}{2} \Delta(E) + c(a, b, r, n) + b - a n$$

$\Rightarrow E$ ample. ここで $a = a(E)$, $b = b(E)$, $c(a, b, r, n) = \frac{1}{2}an(a+r) - r(a+b+ab+r-2)$.

§1 定理1の証明。

補題 (1.1) E を $\mathbb{P}^2$ 上の rank r の H -stable ベクトル束で、 $C_1(E) = a(E)H$ なるものとする。次の (1) - (4) が成立。

$$(1) \ h^0(\mathbb{P}^2, E) = 0$$

$$(2) \ h^2(\mathbb{P}^2, E(m)) = 0 \quad m \geq 0$$

$$(3) \ h^1(\mathbb{P}^2, E(m)) \leq h^1(\mathbb{P}^2, E(m-1)) \quad m \geq 1$$

(4) $m \geq 1$ に対して $h^1(\mathbb{P}^2, E(m)) = h^1(\mathbb{P}^2, E(m-1))$ が成立すれば、 $E(m)$ は global sections で生成される。

(ここで $E(m) = E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(mH)$)

(証明) (1), (2) は E の stability と Serre duality より明らか。 (3) F_m を $E(m)$ の部分層で $H^0(\mathbb{P}^2, F_m) = H^0(\mathbb{P}^2, E(m))$ と $E(m)/F_m$ が torsion free が成立する最小のものとする。(F_m は generically に global sections で生成されている。) 完備線型系 $|H|$ の general member ℓ で $F_m|_\ell$ が locally free, $0 \rightarrow F_m(-1) \rightarrow F_m \rightarrow F_m|_\ell \rightarrow 0$ が完全となるものを取る。 ℓ は射影直線に同型であるから、 $F_m|_\ell$ は global sections で生成され、 $h^1(\ell, F_m|_\ell) = 0$ であるとしてよい。そこで次の完全列を考える。
 $\cdots \rightarrow H^1(\mathbb{P}^2, F_m(-1)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^2, F_m) \rightarrow H^1(\ell, F_m|_\ell)$

$\rightarrow H^2(\mathbb{P}^2, F_m(-1)) \rightarrow H^2(\mathbb{P}^2, F_m) \rightarrow 0$. $h^1(\mathcal{L}, F_m|_{\mathcal{L}}) = 0$ である

から $h^1(\mathbb{P}^2, F_m) \leq h^1(\mathbb{P}^2, F_m(-1))$, $h^2(\mathbb{P}^2, F_m) = h^2(\mathbb{P}^2, F_m(-1))$.

又、 $h^2(\mathbb{P}^2, E(m)) = h^2(\mathbb{P}^2, E(m-1)) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} & h^1(\mathbb{P}^2, E(m)) - h^1(\mathbb{P}^2, E(m-1)) \\ &= h^0(\mathbb{P}^2, E(m)) - h^0(\mathbb{P}^2, E(m-1)) - (\chi(\mathbb{P}^2, E(m)) - \chi(\mathbb{P}^2, E(m-1))) \\ &= h^0(\mathbb{P}^2, F_m) - h^0(\mathbb{P}^2, F_m(-1)) - (r + (C_2(E(m)), H)) \\ &= h^1(\mathbb{P}^2, F_m) - h^1(\mathbb{P}^2, F_m(-1)) + (\chi(\mathbb{P}^2, F_m) - \chi(\mathbb{P}^2, F_m(-1))) - \cancel{(r + (C_2(E(m)), H))} \\ &\quad - (r + (C_2(E(m)), H)) \\ &\leq (r' + (C_2(F_m), H)) - (r + (C_2(E(m)), H)) \end{aligned}$$

$$(r' = \text{rank of } F_m) \quad r' \leq r, \quad (C_2(F_m), H) \leq (C_2(E(m)), H)$$

であるから $h^1(\mathbb{P}^2, E(m)) \leq h^1(\mathbb{P}^2, E(m-1))$ が出る。

(4) $h^1(\mathbb{P}^2, E(m)) = h^1(\mathbb{P}^2, E(m-1))$ とすると、上の式から、

$E(m) = F_m$ 。そこで $|H|$ の general member $\mathcal{L}$ を取れば、

$E(m)|_{\mathcal{L}}$ は global sections で生成され $h^1(\mathcal{L}, E(m)|_{\mathcal{L}}) = 0$ となる。そこで次の完全列を考える。 $\cdots \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, E(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{L}, E(m)|_{\mathcal{L}}) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^2, E(m-1)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^2, E(m)) \rightarrow H^1(\mathcal{L}, E(m)|_{\mathcal{L}}) \rightarrow \cdots$ 。 $h^1(\mathcal{L}, E(m)|_{\mathcal{L}}) = 0$, $h^1(\mathbb{P}^2, E(m)) = h^1(\mathbb{P}^2, E(m-1))$ から $H^1(\mathbb{P}^2, E(m-1)) \rightarrow$

$H^1(\mathbb{P}^2, E(m))$ は同型、よって $H^0(\mathbb{P}^2, E(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{L}, E(m)|_{\mathcal{L}})$ は全射。 $E(m)|_{\mathcal{L}}$ は global sections で生成されているから $\mathcal{L}$ の任意の closed point x に対して $H^0(\mathbb{P}^2, E(m)) \rightarrow E(m) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(x)$ も全射となる。そこで $\mathbb{P}^2$ の任意の closed point x に対して

して、 $\mathcal{H}$ を通る $|H|$ の member $\mathcal{L}'$ を取り $\{x\} = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}'$ とする。
次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathbb{P}^2, E(m)) & \longrightarrow & E(m) \otimes \mathcal{L}(x) \\ & \searrow \quad \swarrow & \uparrow \\ & H^0(\mathcal{L}', E(m)|_{\mathcal{L}'}) & \end{array}$$

$H^0(\mathbb{P}^2, E(m)) \rightarrow E(m) \otimes \mathcal{L}(x)$ は全射であるから $H^0(\mathcal{L}', E(m)|_{\mathcal{L}'}) \rightarrow E(m) \otimes \mathcal{L}(x)$ も全射。よって $E(m)|_{\mathcal{L}'}$ は global sections で生成される。このことから、上と同様にして $H^0(\mathbb{P}^2, E(m)) \rightarrow E(m) \otimes \mathcal{L}(y)$ が全射が出る。ゆえに中山の補題により $E(m)$ は global sections で生成される。

系 (1.2) E を補題 (1.1) のようにとする。このとき $E(-X(\mathbb{P}^2, E) + 2)$ は ample。

(証明) (1.1) の (1), (2) から $h^0(\mathbb{P}^2, E) = h^2(\mathbb{P}^2, E) = 0$ 。よって $h^1(\mathbb{P}^2, E) = -X(\mathbb{P}^2, E)$ 。これを C とおく。(1.1) の (3) から $C = h^1(\mathbb{P}^2, E) \geq h^1(\mathbb{P}^2, E(1)) \geq \dots \geq h^1(\mathbb{P}^2, E(C)) \geq h^1(\mathbb{P}^2, E(C+1)) \geq 0$ 。よって $1 \leq m \leq C+1$ なる整数 m が取れて $h^2(\mathbb{P}^2, E(m)) = h^1(\mathbb{P}^2, E(m-1))$ となる。(1.1) の (4) により $E(m)$ は global sections で生成される。 $C+2 > m$ であるから $E(C+2)$ は ample。

(定理 1 の証明) E を定理 1 のようにとする。 $\mathbb{P}^2$ 上の直

線束 L が取れて、 $E' = E \otimes L$ に対して $c_1(E') = aH$ とできる。系 (1.2) より、 $E'' = E'(-\chi(\mathbb{P}^2, E') + 2)$ は ample。 $\mathbb{P}^2$ 上の直線束 L' を取って $E = E'' \otimes L'$ とすれば、簡単な計算により $(c_1(E''), H) = -\frac{1}{2}\Delta(E) + \frac{(a+2r)(2-a-r)}{2}$ となるから、定理 I の条件より、 $(c_1(L'), H) \geq 0$ 。よって L' は global sections で生成される。ゆえに E は ample。

§2 定理 2 の証明。

補題 (2.1) E を Σ_n 上の rank r の $H_{\alpha, \beta}$ -stable ベクトル束で、 $c_1(E) = a(E)M + b(E)N$ なるものとする。次の (1), (2) が成立。

$$(1) \ h^0(\Sigma_n, E) = 0$$

$$(2) \ h^2(\Sigma_n, E(D)) = 0, \ D \text{ は } \Sigma_n \text{ 上の effective な因子。}$$

(証明) E の stability と Serre duality より明らか。

補題 (2.2) E を Σ_n 上の rank r の $H_{\alpha, \beta}$ -stable ベクトル束で $c_1(E) = aM + bN$ ($a \geq a(E)$, $b \geq b(E)$) なるものとする。 F を $E(H_{1,1})$ の部分層で $H^0(\Sigma_n, F) = H^0(\Sigma_n, E(H_{1,1}))$ と $E(H_{1,1})/F$ が torsion free が成立する最小のものとする。次の (1), (2) が成立。

$$(1) \ r' = \text{rank of } F < r \text{ ならば } h^1(\Sigma_n, E(H_{1,1})) < h^1(\Sigma_n, E) \\ \text{又は } h^1(\Sigma_n, E(H_{1,0})) < h^1(\Sigma_n, E).$$

$$(2) \ r' = r \text{ (つまり } E(H_{1,1}) \text{ が) generically に global sections で}$$

生成される) なさば $h^1(\Sigma_n, E(H_{1,1})) \leq h^1(\Sigma_n, E)$. さき、
 $h^1(\Sigma_n, E(H_{1,1})) = h^1(\Sigma_n, E)$ なさば $E(H_{1,1})$ は global sections
 で生成される。

(証明) (i) $C_1(E(H_{1,1})) = uM + vN$, $C_1(F) = u'M + v'N$ とお
 くと、 E の stability から $\beta u' + \alpha v'/r' < \beta u + \alpha v/r$. とこ
 るで $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $u > 0$, $v > 0$, $r' < r$ だから $u' < u$ 又は $v' < v$
 を得る。そこで次の (i), (ii) を示したい。(i) $u' < u$ なさば、
 $h^1(\Sigma_n, E(H_{0,1})) < h^1(\Sigma_n, E)$ 、(ii) $v' < v$ なさば、
 $h^1(\Sigma_n, E(H_{1,0})) < h^1(\Sigma_n, E)$ 。(i) $u' < u$ とする。 ℓ を $|H_{0,1}|$ の general member
 で $F|_\ell$ が locally free, $0 \rightarrow F(-H_{1,1}) \rightarrow F(-H_{1,0}) \rightarrow F(-H_{1,0})|_\ell \rightarrow 0$
 が完全となるものとする。 ℓ は Σ_n の fibre であるから、射影直
 線に同型、又 F は generically に global sections で生成されてい
 るから、 $F|_\ell$ は global sections で生成されるとしてよい。と
 ころで、このとき $(-H_{1,0}, \ell) = -1$ だから、 $h^1(\ell, F(-H_{1,0})|_\ell) = 0$ 。
 そこで次の完全列を考える。 $\cdots \rightarrow H^1(\Sigma_n, F(-H_{1,1})) \rightarrow$
 $H^1(\Sigma_n, F(-H_{1,0})) \rightarrow H^1(\ell, F(-H_{1,0})|_\ell) \rightarrow H^2(\Sigma_n, F(-H_{1,1})) \rightarrow$
 $H^2(\Sigma_n, F(-H_{1,0})) \rightarrow 0$ 。 $h^1(\ell, F(-H_{1,0})|_\ell) = 0$ であるから、
 $h^1(\Sigma_n, F(-H_{1,0})) \leq h^1(\Sigma_n, F(-H_{1,1}))$, $h^2(\Sigma_n, F(-H_{1,0})) =$
 $h^2(\Sigma_n, F(-H_{1,1}))$ 。よって

$$\begin{aligned} & h^1(\Sigma_n, E(H_{0,1})) - h^1(\Sigma_n, E) \\ &= h^0(\Sigma_n, E(H_{0,1})) - h^0(\Sigma_n, E) - (\chi(\Sigma_n, E(H_{0,1})) - \chi(\Sigma_n, E)) \end{aligned}$$

$$= h^0(\Sigma_n, F(-H_{1,0})) - h^0(\Sigma_n, F(-H_{1,1})) - (r + (C_2(E(H_{0,1})), H_{0,1}))$$

$$= h^1(\Sigma_n, F(-H_{1,0})) - h^1(\Sigma_n, F(-H_{1,1})) + (\chi(\Sigma_n, F(-H_{1,0})) - \chi(\Sigma_n, F(-H_{1,1})))$$

$$- u \leq u' - u < 0. \quad (ii) \quad u' < u \text{ とする。} \ell \text{ を } |H_{1,0}| \text{ の general member とすると、} \ell \text{ は } \Sigma_n \text{ の section したがって射影直線に同型、} \chi(-H_{0,1}, \ell) = -1 \text{ であるから } h^1(\Sigma_n, E(H_{1,0})) < h^1(\Sigma_n, E) \text{ は (i) とほとんど同様にして得られる。}$$

(2) (2.1) の (3), (4) とほとんど同様。

系 (2.3) E を (2.1) のとうりとする。このとき
 $E((- \chi(\Sigma_n, E) + 2)H_{1,1})$ は ample。

(証明) (2.1) から $h^1(\Sigma_n, E) = -\chi(\Sigma_n, E)$ 。これを c とおく。
 (2.2) の (1) から 整数 $p \geq 0, \ell \geq 0$ が存在して $E' = E(H_{p,\ell})$ に対し
 $h^1(\Sigma_n, E') \leq c - (p + \ell)$, $E'(H_{1,1})$ は generically に global sections
 で生成される。 $c' = h^1(\Sigma_n, E')$ とおく。(2.2) の (2) から、

$$c' = h^1(\Sigma_n, E') \geq h^1(\Sigma_n, E'(H_{1,1})) \geq \cdots \geq h^1(\Sigma_n, E'(c'H_{1,1}))$$

$$\geq h^1(\Sigma_n, E'((c'+1)H_{1,1})) \geq 0.$$

よって $1 \leq m \leq c'+1$ なる整数 m が取れて $h^1(\Sigma_n, E'(mH_{1,1})) = h^1(\Sigma_n, E'((m-1)H_{1,1}))$ となる。(2.2) の (2) より $E'(mH_{1,1})$ は global sections で生成される。よって $E'((c'+2)H_{1,1})$ は ample。
 ところで $E((c+2)H_{1,1}) = E'((c'+2)H_{1,1}) \otimes \mathcal{O}_{\Sigma_n}(H_{\ell,p} + (c - (p + \ell) - c')H_{1,1})$ であり $c - (p + \ell) - c' \geq 0$ であるから、 $E((c+2)H_{1,1})$ は ample。

(定理2の証明) E を定理2のとうりとする。 Σ_n 上の直線束 L が取れて、 $E' = E \otimes L$ に対して $C_1(E') = aM + bN$ とできる。
 (2.3) より $E'' = E'(\otimes (\chi(\Sigma_n, E') + 2)H_{1,1})$ は ample。整数 p, q を取って $E = E''(H_{p,q})$ とすれば、簡単な計算により $(C_1(E''), N) = -\frac{1}{2}\Delta(E) + c(a, b, r, n) + a$ 、 $(C_2(E''), M) = -\frac{1}{2}\Delta(E) + c(a, b, r, n) - aM + b$ となるから、定理2の条件より、 $p \geq 0, q \geq 0$ 。よって $\mathcal{O}_{\Sigma_n}(H_{p,q})$ は global sections で生成される。ゆえに E は ample。

§3 最後に、 $\mathbb{P}^2$ 上の H -stable ベクトル束の例を挙げて、定理1が best possible であることを示そう。

補題(3.1) E を $\mathbb{P}^2$ 上の $\text{rank } r$ の H -stable ベクトル束とする。 $C_1(E) = H$ または $-H$ ならば $C_2(E) \geq r-1$ 。

(証明) $C_1(E^*) = -C_1(E)$ 、 $C_2(E^*) = C_2(E)$ だから $C_1(E) = -H$ としてよい。(1.1) の (1), (2) から $h^0(\mathbb{P}^2, E) = 0, h^1(\mathbb{P}^2, E) = 0$ 、よって Riemann-Roch の定理により $-h^2(\mathbb{P}^2, E) = \chi(\mathbb{P}^2, E) = r + (C_1(E), 3H)/2 + (C_1(E)^2 - 2C_2(E))/2 = r - 1 - C_2(E)$ 。ゆえに $C_2(E) \geq r-1$ 。

Maruyama により $\mathbb{P}^2$ 上の rank 2 の H -stable ベクトル束について次の事が知られている。

“ 整数 $n \geq 1$ と $\mathbb{P}^2$ の直線 ℓ に対して $\mathbb{P}^2$ 上の rank 2 の H -stable ベクトル束 E が存在して、 $G_1(E) = H$, $G_2(E) = n$ であり、さらに $E|_{\ell} \cong \mathcal{O}_{\ell}(-n+1) \oplus \mathcal{O}_{\ell}(n)$ ” ($\mathcal{O}_{\ell}(n)$ は ℓ 上の直線束で次数 n のもの)

この事実とあとで示す補題を使うと次の定理が容易に証明できる。

定理3 $n \geq r-1 \geq 1$ を満たす ~~整数~~ 整数 n, r と $\mathbb{P}^2$ の直線 ℓ に対して $\mathbb{P}^2$ 上の rank r の H -stable ベクトル束 E が存在して $G_1(E) = H$, $G_2(E) = n$ であり、さらに $E|_{\ell} \cong \mathcal{O}_{\ell}(-n+1) \oplus \mathcal{O}_{\ell}(n-r+2) \oplus \sum_{i=2}^{r-2} \mathcal{O}_{\ell}(1)$ 。

上で得られた E に関して、(1) $E(t)$ は ample $\Leftrightarrow (G_1(E(t)), H) \geq -\frac{1}{2}\Delta(E) + \frac{1+r}{2}$ (2) $E^*(t)$ は ample $\Leftrightarrow (G_1(E^*(t)), H) \geq -\frac{1}{2}\Delta(E) + \frac{(-1+2r)(3-r)}{2}$ が成立する。(1) は定理1により、(2) は $E(t)|_{\ell}$ 及び $E^*(t)|_{\ell}$ を見ることで容易にわかる。

補題(3.2) E を $\mathbb{P}^2$ 上の rank r の H -stable ベクトル束で $G(E) = H$ なるものとする。次のベクトル束の完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow 0 \quad (*)$$

が分解しなければ、 E' は H -stable ベクトル束である。

(証明) $F \neq 0$ を E' の部分層で rank of $F < r+1$ 、 E'/F が

torsion free なるものとする。 $C_1(E') = H$ であるから $(C_1(F), H) \leq 0$ を示せばよい。 $L = F \cap \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ 、 F' を F の E における像とすると $0 \rightarrow L \rightarrow F \rightarrow F' \rightarrow 0$ は完全列。ところで $(C_1(L), H) \leq 0$ 、 $(C_1(F'), H) \leq 1$ であるから $(C_1(F), H) \leq 1$ 。よって $(C_1(F), H) \neq 1$ を示せばよい。そこで $(C_1(F), H) = 1$ としてみる。すると、 $L = (0)$ 、 $\dim \operatorname{supp}(E/F') \leq 0$ でなければならぬ。(*) は分解していないのだから $E/F' \neq (0)$ 。そこで完全列 $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow E'/F \rightarrow E/F' \rightarrow 0$ を考える。任意の整数 m に対して $H^0(\mathbb{P}^2, (E/F')(m)) \neq (0)$ であり、 $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) = (0)$ である。ところで E'/F は torsion free であるから充分小さな整数 m に対しては $H^0(\mathbb{P}^2, (E'/F)(m)) = (0)$ である。これは矛盾。

参考文献

Nakai, Y., A criterion of an ample sheaf on a projective scheme, Amer. J. Math., 85 (1963) 14-26.

Atiyah, M. F., Vector bundles over an elliptic curve, Proc. Lond. Math. Soc. (3), 7 (1957) 414-452.

Hartshorne, R., Ample vector bundles on curves, Nagoya Math. J., 43 (1971) 73-89.

Hosoh, T., Ample vector bundles on a rational surface, Nagoya Math. J. 59 (1975) 135-148.

Maruyama, M., On a family of algebraic vector bundles, *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, in honor of Y. A. Izumi, Kinokuniya, Tokyo, (1973) 95-146.