

Delayed Feedback 制御に基づくレスラー方程式の周期軌道に対する 数値的検証法について

佐賀大学理工学部・皆本 晃弥 (Teruya Minamoto)

Department of Information Science, Saga University

佐世保工業高等専門学校・中尾 充宏 (Mitsuhiro T. Nakao)

Sasebo National College of Technology

1 はじめに

本稿では、次のレスラー方程式

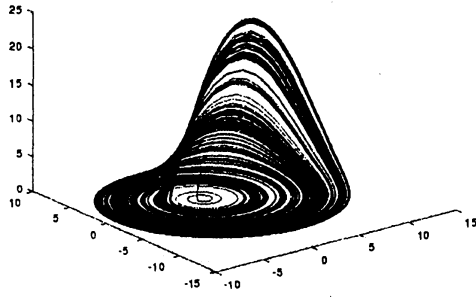
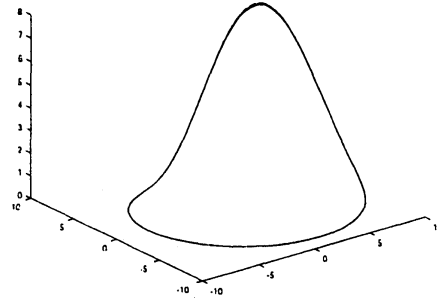
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) &= -y(t) - z(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) &= x(t) + 0.2y(t) \\ \frac{dz}{dt}(t) &= 0.2 + z(t)(x(t) - 5.7) \end{cases} \quad (1.1)$$

を考える。この方程式は、不安定な周期軌道を持ち、その軌道はカオス的な振舞をすることが知られている (図 1)。そのため、数値的にこの軌道を把握することは難しい。そこで、Pyragas[3] は、この不安定な周期解を安定化させる方法として Delayed Feedback 制御を提案した。それは、次の遅延微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) &= -y(t) - z(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) &= x(t) + 0.2y(t) + u(t) \\ \frac{dz}{dt}(t) &= 0.2 + z(t)(x(t) - 5.7) \\ u(t) &= \kappa(y(t - \tau) - y(t)) \end{cases} \quad (1.2)$$

で記述される。ただし、 κ は定数、 τ は遅延 (delay time) である。

これを数値的に解くことにより、不安定周期解が安定化でき、周期アトラクタが得られる (図 2)。しかしながら、そこで得られた周期アトラクタは、あくまでも近似であり、周期アトラクタの周期も近似的にしか求まらない。そこで、本稿では、安定化された周期アトラクタを利用して真の周期解の存在検証を行なう方法を提案する。この方法は、Delayed Feedback 制御と中尾の方法 [2] に基づいたものである。

図 1: (1.2) の解軌道 ($\kappa = 0, \tau = 5.9$)図 2: (1.2) の解軌道 ($\kappa = 0.2, \tau = 5.9$)

2 不動点定式化と検証条件

$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ を周期 τ の (1.2) に対する周期解とする. このとき, $\mathbf{x}(\tau t)$ の周期は 1 となるので, τ を未知パラメーターにするために, (1.2) を次のように変形する.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) = y(t) \\ x(t) = p + \tau \int_0^t (-y(s) - z(s)) ds \\ y(t) = \varphi(0) + \tau \int_0^t (x(s) + 0.2y(s) + \kappa(\varphi(s) - y(s))) ds \\ z(t) = q + \tau \int_0^t (0.2 + z(s)(x(s) - 5.7)) ds \\ \int_0^1 (y(s) + z(s)) ds = 0 \\ \int_0^1 (x(s) + 0.2y(s) + \kappa(\varphi(s) - y(s))) ds = 0 \\ \int_0^1 (0.2 + z(s)(x(s) - 5.7)) ds = 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

そして, (2.1) を

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

と表すことにする. ただし, $\psi = {}^t(x, y, z, p, q, \tau)$ である.

さて, $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ を一様分割とし, 各小区間の幅を h とする. そして, $S_h \subset C[0, 1]$ を h に依存する有限次元部分空間で, その基底関数は hat function だとする. また, $\Pi_{h0} : C[0, 1] \rightarrow S_h$ を線形補間作用素とし, $V = C[0, 1]^4 \times \mathbb{R}^3$, $V_h = S_h^4 \times \mathbb{R}^3$ とする. さらに, $(\varphi, x, y, z, p, q, \tau) \in V$ 対して,

作用素 $\Pi_h : V \rightarrow V_h$ を

$$\Pi_h(\varphi, x, y, z, p, q, \tau) = (\Pi_{h0}\varphi, \Pi_{h0}x, \Pi_{h0}y, \Pi_{h0}z, p, q, \tau)$$

とし, V のノルムを次式で定義する.

$$\|w\|_V := \max(\|\varphi\|_{C[0,1]}, \|x\|_{C[0,1]}, \|y\|_{C[0,1]}, \|z\|_{C[0,1]}, |p|, |q|, |\tau|).$$

このとき,

$$N_h(w) := \Pi_h(w) - [I - \Pi_h F'(w_h)]_h^{-1} \Pi_h(w - F(w)), \quad (2.3)$$

として,

$$T(w) := N_h(w) + (I - \Pi_h)F(w),$$

とすると $w = T(w)$ と $w = F(w)$ は同値である. ただし, $w = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ で, I は V 上の恒等写像, $F'(w_h)$ は w_h における F の Fréchet 導関数, $[I - \Pi_h F'(w_h)]_h^{-1}$ は作用素 $\Pi_h(I - F'(w_h))|_{V_h}$ の V_h 上の逆作用素である.

このとき, 次の定理が成り立つ. なお, 証明にはやや準備が必要なため, ここでは割愛する.

Theorem 1 W は 0 を含む空でない有界凸集合で, かつ同程度一様連続だとする. このとき, $T(W) \subset W$ ならば, $w = T(w)$ となる $w \in \overline{W}$ が存在する. ただし, $\overline{W}$ は V における W の閉包である.

3 検証手順

実際にコンピュータで計算を行なうときは, (2.2) を直接的に扱うのではなく, この残差形式を利用する. つまり, $\tilde{w} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \in V$ と $w_h = \begin{pmatrix} \varphi_h \\ \psi_h \end{pmatrix} \in V_h$ に対して,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \varphi_h + \tilde{\varphi} \\ \psi_h + \tilde{\psi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \psi_h \\ \varphi_h \end{pmatrix} =: \hat{F} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix},$$

$$\hat{N}_h(\tilde{w}) = \Pi_h(\tilde{w}) - [I - \Pi_h \hat{F}'(0)]_h^{-1} \Pi_h(\tilde{w} - \hat{F}(\tilde{w})), \quad (3.1)$$

$$\hat{T}(\tilde{w}) = \hat{N}_h(\tilde{w}) + (I - \Pi_h)\hat{F}(\tilde{w})$$

として、ある同程度一様連続な 0 を含む非空有界凸集合 $\widetilde{W}$ に対して、

$$\hat{T}(\widetilde{W}) = \{\hat{T}v | v \in \widetilde{W}\} \subset \widetilde{W} \quad (3.2)$$

が成り立つことを、数値的に検証する。

そのために、候補者集合 $\widetilde{W}$ を

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}_h + \widetilde{W}_*, \quad \widetilde{W}_h \subset V_h, \quad \widetilde{W}_* \subset V_*,$$

満たすように選ぶと、検証条件 (3.2) は

$$\hat{N}_h(\widetilde{W}) \subset \widetilde{W}_h \quad (3.3)$$

$$(I - \Pi_h)\hat{F}(\widetilde{W}) \subset \widetilde{W}_* \quad (3.4)$$

と表すことができる。ただし、 V_* は V における V_h の補集合である。

具体的に $\widetilde{W}$ を求める方法について述べよう。まず、 $(\varphi, x, y, z, p, q, \tau) = (\Pi_{h0}\varphi + (I - \Pi_{h0})\varphi, \Pi_{h0}x + (I - \Pi_{h0})x, \Pi_{h0}y + (I - \Pi_{h0})y, \Pi_{h0}z + (I - \Pi_{h0})z, p, q, \tau)$ とし、

$$\Pi_{h0}\varphi = \sum_{j=0}^N a_{0,j}\phi_j, \quad \Pi_{h0}x = \sum_{j=0}^N a_{1,j}\phi_j, \quad \Pi_{h0}y = \sum_{j=0}^N a_{2,j}\phi_j, \quad \Pi_{h0}z = \sum_{j=0}^N a_{3,j}\phi_j,$$

とする。ただし、 $a_{i,j} \in \mathbb{R} (0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq N)$ である。そして、候補者集合の有限次元部分 $\widetilde{W}_h$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_h = & \left\{ (\varphi_I, x_I, y_I, z_I, p_I, q_I, \tau_I) \in V_h \mid \varphi_I = \sum_{j=0}^N A_{0,j}\phi_j, x_I = \sum_{j=0}^N A_{1,j}\phi_j, \right. \\ & y_I = \sum_{j=0}^N A_{2,j}\phi_j, z_I = \sum_{j=0}^N A_{3,j}\phi_j. \text{ ただし, } A_{i,j} (0 \leq i \leq 3), p_I, q_I, \tau_I \text{ は} \\ & \left. 0 \text{ を含む区間.} \right\}. \end{aligned}$$

とする。(2.3) より

$$[I - \Pi_h \hat{F}'(0)]_h \hat{N}_h(\tilde{w}) = \Pi_h(\hat{F}(\tilde{w}) - \hat{F}'(0)\tilde{w}_h)$$

なので、集合 $\Pi_h(\hat{F}(\widetilde{W}) - \hat{F}'(0)\widetilde{W}_h)$ を含む区間 $d \in \mathbb{R}^{4(N+1)+3}$ と $[I - \Pi_h \hat{F}'(0)]_h$ に対応する $(4N+7) \times (4N+7)$ 行列 L_h を考える。このとき、連立一次方程式

$$L_h \omega = d \quad (3.5)$$

の解 $\omega \in \mathbb{R}^{4N+7}$ を包み込むような $(4N+7)$ 次元区間ベクトル $v = (v_i) \in \mathbb{R}^{4N+7}$ および $0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq N$ に対して,

$$v_{i(N+1)+j} \subset A_{i,j}, \quad v_{4N+4} \subset p_I, \quad v_{4N+5} \subset q_I, \quad v_{4N+6} \subset \tau_I$$

が成り立てば, 検証条件の前半 (3.3) が成り立つ.

次に, 無限次元部分については

$$\widetilde{W}_* = \{(w_0, w_1, w_2, w_3, 0, 0, 0) \in V_* \mid \|w_i\|_{C[0,1]} \leq \alpha_i, \|w'_i\|_{C[0,1]} \leq \beta_i, 0 \leq i \leq 3\}$$

とすると, 候補者集合 $\widetilde{W} = \widetilde{W}_h + \widetilde{W}_*$ は 0 を含む空でない有界凸集合で, かつ同程度一様連続である. V のノルムを使って検証条件 (3.4) を確認するためには, $\|(I - \Pi_h)\hat{F}(\widetilde{W})\|_V$ の評価をしなければならない. そのために, 線形補間の誤差評価を利用する.

Proposition 1 (線形補間に対する誤差評価 [4])

$$\|(I - \Pi_{h0})f\|_{C[0,1]} \leq \frac{h^2}{8} \left\| \frac{d^2 f}{dt^2} \right\|_{C(0,1)} \quad f \in C[0,1] \cap C^{2,\infty}(0,1) \quad (3.6)$$

かつ

$$\|(I - \Pi_{h0})f\|_{C[0,1]} \leq \frac{h}{2} \left\| \frac{df}{dt} \right\|_{C(0,1)} \quad f \in C[0,1] \cap C^{1,\infty}(0,1) \quad (3.7)$$

が成り立つ. ただし, $C^{p,\infty}(0,1) = \left\{ f \in C^p(0,1) \mid \left\| \frac{d^p f}{dt^p} \right\|_{C(0,1)} < \infty \right\}$ である.

ここで,

$$\begin{aligned} (I - \Pi_h)\hat{F}(\tilde{w}) &= (I - \Pi_h)(F(w_h + \tilde{w}) - w_h) \\ &= (I - \Pi_h) \left(\begin{pmatrix} y_h + \tilde{y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ G(w_h + \tilde{w}) \end{pmatrix} - w_h \right) \\ &= \begin{pmatrix} (I - \Pi_{h0})\tilde{y} \\ (I - \Pi_{h1})\hat{G}(\tilde{w}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

と表せることに注意する. ただし, $\hat{G}(\tilde{w}) = G(w_h + \tilde{w}) - \psi_h$ で, 作用素 $\Pi_{h1} : C[0,1]^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow S_h^3 \times \mathbb{R}^3$ は, $(x, y, z, p, q, \tau) \in C[0,1]^3 \times \mathbb{R}^3$ に対して $\Pi_{h1}(x, y, z, p, q, \tau) = (\Pi_{h0}x, \Pi_{h0}y, \Pi_{h0}z, p, q, \tau)$ で定義されるものとする. このとき,

$$\hat{G}(\tilde{w})(t) = \begin{cases} (p_h + \tilde{p}) - (\tau_h + \tilde{\tau}) \int_0^t (y_h + \tilde{y} + z_h + \tilde{z})(s)ds - x_h(t) \\ (\varphi_h + \tilde{\varphi})(0) + (\tau_h + \tilde{\tau}) \int_0^t (x_h + \tilde{x} + 0.2(y_h + \tilde{y}) \\ \quad + \kappa((\varphi_h + \tilde{\varphi}) - (y_h + \tilde{y}))(s)ds - y_h(t) \\ (q_h + \tilde{q}) + (\tau_h + \tilde{\tau}) \int_0^t (0.2 + (z_h + \tilde{z})(x_h + \tilde{x} - 5.7))(s)ds - z_h(t) \\ \tilde{p} - \int_0^1 (y_h + \tilde{y} + z_h + \tilde{z})(s)ds \\ \tilde{q} - \int_0^1 (x_h + \tilde{x} + 0.2(y_h + \tilde{y}) + \kappa((\varphi_h + \tilde{\varphi}) - (y_h + \tilde{y}))(s)ds \\ \tilde{\tau} - \int_0^1 (0.2 + (z_h + \tilde{z})((x_h + \tilde{x}) - 5.7))(s)ds \end{cases} \quad (3.9)$$

および

$$\frac{d^2 \hat{G}}{dt^2}(\tilde{w})(t) = \begin{cases} -(\tau_h + \tilde{\tau})(y_h + \tilde{y} + z_h + \tilde{z})'(t) \\ (\tau_h + \tilde{\tau})\{x_h + \tilde{x} + 0.2(y_h + \tilde{y}) \\ \quad + \kappa((\varphi_h + \tilde{\varphi}) - (y_h + \tilde{y}))\}'(t) \\ (\tau_h + \tilde{\tau})\{(z_h + \tilde{z})'(x_h + \tilde{x} - 5.7) + (z_h + \tilde{z})(x_h + \tilde{x})'\}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

が成り立つので, $\|\tilde{x}\|_{C[0,1]}$, $\|\tilde{x}'\|_{C[0,1]}$, $\|\tilde{y}\|_{C[0,1]}$, $\|\tilde{y}'\|_{C[0,1]}$, $\|\tilde{z}\|_{C[0,1]}$, $\|\tilde{z}'\|_{C[0,1]}$, $\|\tilde{\varphi}\|_{C[0,1]}$, $\|\tilde{\varphi}'\|_{C[0,1]}$ が評価できれば, $\|(I - \Pi_h)\hat{F}(\tilde{w})\|_V$ が評価できる.

なお, 実際の計算では, これらのノルムを要素毎に計算する. 例えば,

$$\begin{aligned} & \|(\tau_h + \tilde{\tau})(y_h + \tilde{y} + z_h + \tilde{z})'\|_{C(t_{l-1}, t_l)} \\ & \leq |\tau_h + \tau_I| (\|y_h' + y_I' + z_h' + z_I'\|_{C(t_{l-1}, t_l)} + \beta_2(l) + \beta_3(l)) \leq \gamma_1(l), \quad l = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

を満たす正数 $\gamma_1(l)$ を選ぶと, $(I - \Pi_h)\hat{F}(\tilde{w})$ における第 2 式のノルム $\|\cdot\|_{C(t_{l-1}, t_l)}$ は $\frac{h^2}{8}\gamma_1(l)$ として評価できる. ただし, Proposition 1 より, $\beta_2(l)$ と $\beta_3(l)$ は, 次式

で評価される.

$$\begin{aligned}
\|(I - \Pi_{h0})\tilde{y}'\|_{C(t_{l-1}, t_l)} &\leq \frac{h}{2}\|\tilde{y}''\|_{C(t_{l-1}, t_l)} = \frac{h}{2}\left\|\frac{d}{dt}(\tau(x + 0.2y + \kappa(\varphi - y)) - y'_h)\right\|_{C(t_{l-1}, t_l)} \\
&= \frac{h}{2}|\tau|\|x' + 0.2y' + \kappa(\varphi' - y')\|_{C(t_{l-1}, t_l)} \leq \beta_2(l), \\
\|(I - \Pi_{h0})\tilde{z}'\|_{C(t_{l-1}, t_l)} &\leq \frac{h}{2}\|\tilde{z}''\|_{C(t_{l-1}, t_l)} = \frac{h}{2}\left\|\frac{d}{dt}(\tau(0.2 + z(x - 5.7)) - z'_h)\right\|_{C(t_{l-1}, t_l)} \\
&= \frac{h}{2}|\tau|\|z'(x - 5.7) + zx'\|_{C(t_{l-1}, t_l)} \leq \beta_3(l).
\end{aligned}$$

また, $(I - \Pi_h)\hat{F}(\tilde{w})$ の第 3 式や第 4 式も同様に評価できる.

そして, 候補者集合 $\tilde{W} = \tilde{W}_h + \tilde{W}_*$ が

$$\begin{aligned}
\|(I - \Pi_h)\hat{F}(\tilde{W})|_1\|_{C(t_{l-1}, t_l)} &= \|(I - \Pi_{h0})\tilde{y}\|_{C(t_{l-1}, t_l)} = \alpha_0(l), \quad \|(I - \Pi_{h0})\tilde{\varphi}'\|_{C(t_{l-1}, t_l)} = \beta_0(l) \\
\|(I - \Pi_h)\hat{F}(\tilde{W})|_2\|_{C(t_{l-1}, t_l)} &\leq \alpha_1(l), \quad \|(I - \Pi_{h0})\tilde{x}'\|_{C(t_{l-1}, t_l)} \leq \beta_1(l) \\
\|(I - \Pi_h)\hat{F}(\tilde{W})|_3\|_{C(t_{l-1}, t_l)} &\leq \alpha_2(l), \quad \|(I - \Pi_{h0})\tilde{y}'\|_{C(t_{l-1}, t_l)} \leq \beta_2(l) \\
\|(I - \Pi_h)\hat{F}(\tilde{W})|_4\|_{C(t_{l-1}, t_l)} &\leq \alpha_3(l), \quad \|(I - \Pi_{h0})\tilde{z}'\|_{C(t_{l-1}, t_l)} \leq \beta_3(l)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

を満たせば, 検証条件 (3.4) も満たされる. ただし, $g(v)|_i$ は $g(v)$ の第 i 式を表すものとする.

今までの議論に基づいた検証条件アルゴリズムを以下に述べる.

- $k = 0$

初期値 $A_{i,j}^{(0)}, p_I^{(0)}, q_I^{(0)}, \tau_I^{(0)} \in \mathbb{IR} (0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq N)$ と $\alpha_i^{(0)}(l), \beta_i^{(0)}(l) \in \mathbb{R}^+$ ($0 \leq i \leq 3, 1 \leq l \leq N$) を設定する.

- $n \geq 0$

1. 固定された小さな正数 $\delta > 0$ に対して,

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{i,j}^{(n)} &:= (1 + \delta)A_{i,j}^{(n-1)}, \quad \hat{p}_I^{(n)} := (1 + \delta)p_I^{(n-1)}, \\
\hat{q}_I^{(n)} &:= (1 + \delta)q_I^{(n-1)}, \quad \hat{\tau}_I^{(n)} := (1 + \delta)\tau_I^{(n-1)}, \\
\hat{\alpha}_i^{(n)}(l) &:= (1 + \delta)\alpha_i^{(n-1)}(l), \quad \hat{\beta}_i^{(n)}(l) := (1 + \delta)\beta_i^{(n-1)}(l)
\end{aligned}$$

とおく.

2. 候補者集合 $\widetilde{W}^{(n)}$ を次のようにおく. ただし, n は反復回数を表す.

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_h^{(n)} &:= (\hat{\varphi}_I^{(n)}, \hat{x}_I^{(n)}, \hat{y}_I^{(n)}, \hat{z}_I^{(n)}, \hat{p}_I^{(n)}, \hat{q}_I^{(n)}, \hat{\tau}_I^{(n)}). \text{ただし,} \\ \hat{\varphi}_I^{(n)} &= \sum_{j=0}^N \hat{A}_{0,j}^{(n)} \phi_j, \quad \hat{x}_I^{(n)} = \sum_{j=0}^N \hat{A}_{1,j}^{(n)} \phi_j, \quad \hat{y}_I^{(n)} = \sum_{j=0}^N \hat{A}_{2,j}^{(n)} \phi_j, \quad \hat{z}_I^{(n)} = \sum_{j=0}^N \hat{A}_{3,j}^{(n)} \phi_j. \\ \widetilde{W}_*^{(n)} &:= \{(w_0, w_1, w_2, w_3, 0, 0, 0) \in V_* \mid \\ &\quad \|w_i\|_{C(t_{l-1}, t_l)} \leq \hat{\alpha}_i(l), \|w'_i\|_{C(t_{l-1}, t_l)} \leq \hat{\beta}_i(l), 0 \leq i \leq 3, 1 \leq l \leq N\} \\ \widetilde{W}^{(n)} &:= \widetilde{W}_h^{(n)} + \widetilde{W}_*^{(n)}\end{aligned}$$

3. $0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq N$ と $1 \leq l \leq N$ に対して, 次の値を計算する.

$$\begin{aligned}A_{i,j}^{(n)} &:= v_{i(N+1)+j}, \quad p_I^{(n)} := v_{4N+4}, \quad q_I^{(n)} := v_{4N+5}, \quad \tau_I^{(n)} := v_{4N+6} \\ \alpha_0^{(n)} &:= \hat{\alpha}_0^{(n)}, \quad \beta_0^{(n)} := \hat{\beta}_0^{(n)}, \quad \alpha_i^{(n)}(l) := \frac{h^2}{8} \sup_{\tilde{w} \in \widetilde{W}^{(n)}} \left\| \frac{d^2 \hat{G}}{dt^2}(\tilde{w}) \right\|_i \Big|_{C(t_{l-1}, t_l)}, \\ \beta_i^{(n)}(l) &:= \frac{h}{2} \sup_{\tilde{w} \in \widetilde{W}^{(n)}} \left\| \frac{d^2 \hat{G}}{dt^2}(\tilde{w}) \right\|_i \Big|_{C(t_{l-1}, t_l)}.\end{aligned}$$

4. 次の条件が満たされれば, 反復を終了させる. このとき, $\widetilde{W}^{(n)} \subset V$ に真の解が存在する.

$$\begin{aligned}A_{i,j}^{(n)} &\subset \hat{A}_{i,j}^{(n)} \quad (0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq N), \\ \alpha_i^{(n)}(l) &\leq \hat{\alpha}_i^{(n)}(l), \quad \beta_i^{(n)}(l) \leq \hat{\beta}_i^{(n)}(l) \quad (1 \leq i \leq 3, 1 \leq l \leq N).\end{aligned}$$

5. $n := n + 1$ とし Step 1 へ戻る. n あるいは $\max_{i,l}(\alpha_i^{(n)}(l))$ がある設定値を超えたら, 検証が失敗したものとして終了する.

4 数値例

表 1 に, $\kappa = 0.2$, $N = 2048$, $\delta = 10^{-5}$ としたときの (1.2) に対する数値結果を示す. この表より (1.1) に対する真の周期 τ が $[5.8806, 5.8816]$ にあることが分かる. なお, 本計算では, INTLAB [1] を利用した.

表 1: 検証結果

$\ x_h\ _{C[0,1]}$	9.461006864130569
$\ y_h\ _{C[0,1]}$	8.552041550297458
$\ z_h\ _{C[0,1]}$	7.440532429401290
$\ \varphi_h\ _{C[0,1]}$	8.552041550297451
$ p_h $	9.452715366259323
$ q_h $	1.630517482610893
$ \tau_h $	5.881095741716203
$\max(\max_{i,j} A_{i,j}^{(n)}, p_I^{(n)}, q_I^{(n)}, \tau_I^{(n)})$	0.010528315048606
$\tau_I^{(n)}$	0.000458586267183
$\max_{i,l} \alpha_i^{(n)}(l)$	0.000088321750348
$\max_{i,l} \beta_i^{(n)}(l)$	0.723531778849963
Iteration number n	8

参考文献

- [1] S. M. Rump, "INTLAB - Interval Laboratory", <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/>
- [2] Nakao, M.T. and Yamamoto, N., Numerical Verification of Solutions for non-linear elliptic problems using an L^∞ residual method, J. Math. Anal. Appl. 217 (1998), 246-262.
- [3] Pyragas, K., Continuous control of chaos by self-controlling feedback, Physics Letters A 170 (1992), 421-428.
- [4] Schultz, M. H., Spline Analysis, Prentice-Hall, 1973.