

Turing 不安定条件下における波の分裂過程のメカニズム

山口県立大学国際文化学部・野村厚志

Turing は反応・拡散系システムにおいて静止パターンが形成される条件(Turing 不安定条件)を提案した[1]。近年、その Turing の提案した条件下で観測されるパターン(Turing パターン)が現実の化学システム[2]及び生物システム[3]において発見され話題となっている。著者とその共同研究者らは、反応・拡散系システムの一つである Belousov-Zhabotinsky(BZ)反応の 2 変数 Oregonator モデル[4]を用いて、Turing 不安定条件下で数値実験を行った。その結果、静止パターンが形成されるまでの過程において、伝播波が次々と分裂する興味深い現象を観測した[5]。これは、近年話題となっている自己複写過程[6]と呼ばれる現象によく似た振る舞いを示す。本研究では、その現象のメカニズムの解明を目的として分裂時の波の状態をより詳細に観察し、分裂波が得られるための条件を提案する。

数値実験で用いられた Oregonator モデル[4]は次式で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u + \frac{1}{\varepsilon} \left\{ u(1-u) - f v \frac{u-q}{u+q} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \nabla^2 v + u - v$$

ここで、 u, v はそれぞれ活性化因子、抑制因子を表す変数、 D_u, D_v はそれぞれの拡散係数、 f, q, ε はシステムの振る舞いを決める定数である。モデル式(1)を用いて差分法により図 1 の初期条件($v(x, t=0)=0.16$)及び Neumann 境界条件の下で 1 次元数値実験を行った。その結果、図 2 のような伝播波の分裂過程を観測した。

分裂過程のメカニズムを理解するため、波の分裂が観測される直前の $t=2.5$ における u, v の空間分布を詳細に観察する(図 3)。この空間分布を(a)波が既に伝播した後の領域、(b)波の後部の領域、(c)波の先頭部の領域、(d)これから波が伝播する領域、の 4 領域に分割する。まず(d)の領域では、初期条件で設定された抑制因子 $v=0.16$ の値が時間と共に減少し、それと同時に(c)の波の先頭部は容易に伝播可能な状態となる。一方(b)の領域では、Turing 不安定条件によりほぼ静止状態となる。よって波の先頭部は伝播する一方で波の後部はほぼ静

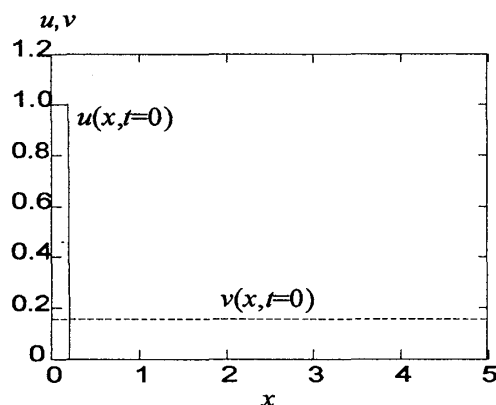


図 1. 数値実験で与えられた初期条件。

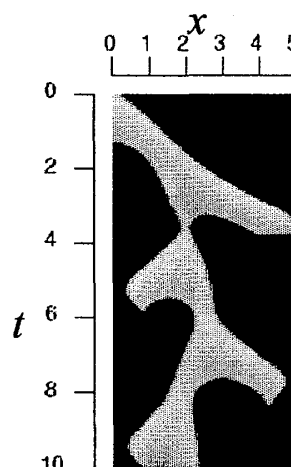


図 2. Oregonator モデルにおける波の分裂現象(u 成分の時空間プロット)。初期条件として図 1 を与えた(但し $v(x, t=0)=0.16$)。式(1)のパラメータは $D_u=0.1$, $D_v=1.0$, $f=0.7$, $q=5.0 \times 10^{-4}$, $\varepsilon=1.0 \times 10^{-2}$ と設定した。

止するので波幅が広がり、先頭部(c)と後部(b)との境
めで u, v がほぼ一定の領域が生じる。すなわち、拡
散項をゼロとした式(1)に従って領域(b)と(c)の間で u
の値が急激に減少しゼロとなり波が分裂する。但し、
本実験では拡散係数の比を $D_u/D_v=1/10$ と設定した
(Turing 不安定条件)。波の進行方向の抑制因子の分布
にも依存するが、この拡散係数の比をさらに小さく
すると抑制因子の拡散が過大となり、波の先頭部の
伝播が妨げられて波全体が静止し、波の分裂現象が
観測されない。以上より、波の分裂が観測されるた
めには、①余り D_u/D_v が小さくならないこと(本研究
では $1/10$)、②波の幅が広くなること、③波の先頭部
が伝播し易い状態となること(本研究では初期条件で
調節)、が必要であると考えられる。なお、次式の BZ
反応の Rovinsky-Zhabotinsky モデル[7]、

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u + \frac{1}{\varepsilon} \left\{ u(1-u) - 2q\alpha \frac{v}{1-v} \cdot \frac{u-\mu}{u+\mu} \right\}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v + u - \alpha \frac{v}{1-v},\end{aligned}\quad (2)$$

ではパラメータを調節することで先の 3 条件を満た
し、波の分裂現象が観測されると予測された。よっ
て数値実験を行ったところ図 4 のように波の分裂現
象が確認された。

以上、本研究では Turing 不安定条件下における BZ
反応 Oregonator モデルにおける波の分裂現象の数値
実験結果をより詳細に観察した。さらに、その考察
から分裂波が生じる条件を提案した。また、BZ 反応の Rovinsky-Zhabotinsky モデルにおいても
同様の波の分裂現象を観測した。

References

1. A. M. Turing, *Phil. Trans. R. Soc. London, Series B, Biological Science* **237**, 37 (1952)
2. V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade and P. De Kepper, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2953 (1990)
3. S. Kondo and R. Asai, *Nature* **376**, 765 (1995)
4. J. P. Keener and J. J. Tyson, *Physica D* **21**, 307 (1986)
5. A. Nomura, H. Miike, T. Sakurai and E. Yokoyama, *J. Phys. Soc. Japan* **66**, 598 (1997)
6. K. -J. Lee, W. D. McCormick, J. E. Pearson and H. L. Swinney, *Nature* **369**, 215 (1994)
7. A. B. Rovinsky and A. M. Zhabotinsky, *J. Phys. Chem.* **88**, 6081 (1984)

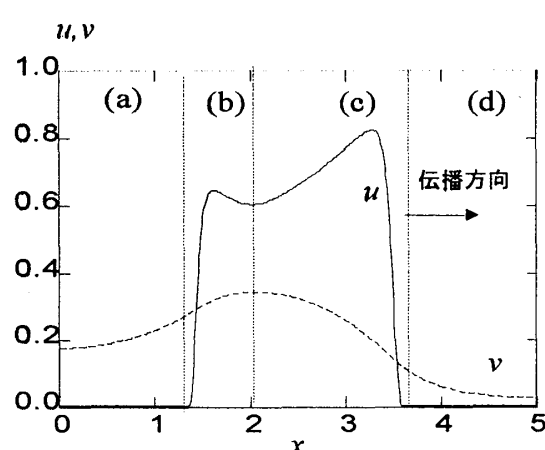


図 3. 分裂前($t=2.5$)の u, v の空間分布。

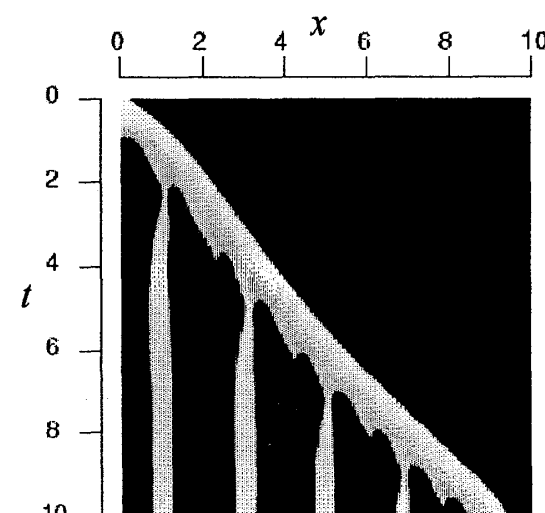


図 4. Rovinsky-Zhabotinsky モデルにおける波の分裂現象(u 成分の時空間プロット)。初期条件として図 1 を与えた(但し $v(x, t=0)=0.6$)。また、式(2)のパラメータを $D_u=0.1, D_v=5.0, q=0.5, \alpha=0.03, \beta=4.5 \times 10^{-4}, \mu=5.0 \times 10^{-3}, \varepsilon=1.0 \times 10^{-2}$ と設定した。