

Hilbert 空間における時間に関して

二階のある微分方程式について

姫路工業大学

丸尾 健二 (Kenji-Maruo)

0. 序 H は実 Hilbert 空間として A は正定値自己共役作用素とする。 ϕ は H から $(-\infty, \infty)$ の下半連続な凸関数とし $\partial\phi$ は ϕ の劣微分とする。 今次の方程式を考える。

$$(0.1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + Au + \partial\phi u \ni f(t, u) \\ u(0) = a, \quad \frac{du}{dt}(0) = b \end{cases} \quad \text{on } [0, T]$$

ここで T は任意の正の実数である。

上の方程式は Brezis [1] により open problem として

提出され Schatzman [2], [3] によって ϕ が H の中の半空間 K の indicator function (ie $\phi(x) = I_K(x) = \begin{cases} 0 & x \in K \\ \infty & x \notin K \end{cases}$

) の場合 H が有限次元の時に 解の存在や一意性の是非についてそれぞれ研究している。 その後 Schatzman

[4] は本質的に $H = L_2(0, 1)$ のとき $\phi(x) = I_K(x)$ で K は

(1)

$\{f \in H; f(x) \geq \varphi(x), a.e. x \in [0, 1]\}$ の場合に *locally energy conservation solution* という概念の解を提示し 解の存在と一意性と 具体的な計算をなす事により示している。

本稿においては 上記の仮定を含むみ又 Jürgens [5] の方程式をも含むうる仮定のもと 解の存在について主に議論する。 一意性については 以前数理研で発表させていただけ (1982年 スペクトル散乱理論 464) 仮定の下での いわゆる *local energy conserving solution* の一意性とほぼ同じ結果なので 簡単に述べておく。

さて記号として S を Banach 空間とし $\|\cdot\|_S$ その norm を $\|\cdot\|_S$ と書き H の内積を $(\cdot, \cdot)$ によって表わし S と dual space S^* の pairing を同じく $(\cdot, \cdot)$ によって表わす。 A の $\frac{1}{2}$ -分数中を $A^{\frac{1}{2}}$ で表わし その Domain にグラフ norm を入れた空間を V とする。次に $\phi_\lambda, \phi_\lambda$ は ϕ, ϕ の 吉田近似とする。

さて方程式 (0.1) の解の存在を示す為に 吉田近似の方程式

$$(0.2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u_\lambda}{dt^2} + A u_\lambda + \phi_\lambda u_\lambda = f \\ u_\lambda(0) = a, \quad \frac{d^2 u_\lambda}{dt^2}(0) = b \end{cases}$$

を考ふ。 次の section で 解の定義 仮定 定理 を示し Section 2 で (0.2) の方程式の解の諸性質を調べ Section 3 で (0.2) の 解の収束を示し 解の存在を言う。 Section 4 で

$\{t_i\}$ -energy conserving solution について 簡単に述べ 多少の注意を言う。 Section 5 で 例を示そう。

1. 解の定義と仮定と定理

まず 仮定を述べよう。 X_1, X_2 は実 Banach space とする。

仮定 1. $V \subset X_1 \subset H \subset X_2$ (代数的かつ位相的に埋め込まれてゐる。) $V \subset X_1$ は compact の埋め込み X_1 は可分で $X_2 \subset \{\text{dual space of } X_1\}$.

仮定 2. ある $z \in V$ で 次の不等式を満たすものがある。

$$(\phi_\lambda x, x - z) \geq C_1 |\phi_\lambda x|_{X_2} - C_2 \quad \text{for any } x \in V$$

ここで C_1, C_2 は $|x|_V, |\phi_\lambda(x)|, z$ ばかり関係する正の数。

仮定 3. $f \in W^{1,2}([0, T]; H)$

次に解の定義を述べよう。

定義 1. $u \in C([0, T]; X_1) \cap W^{1,\infty}([0, \infty]; H)$ が $(0, 1)$ の解とは次の条件を満たすものと言う。

$$1) \quad \text{任意の } t \in [0, T] \text{ で } u(t) \in D(\phi) = \{x \in H; |\phi(x)| < \infty\} \\ \cap V.$$

(3)

2). 右, 左の弱微分がすべての $t \in [0, T]$ で存在して

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^+}{dt} u \right|_H^2 + |u(t)|_V^2 + 2 \phi(u(t)) \\ \leq |b|^2 + |a|_V^2 + 2 \phi(a) + 2 \int_0^t (f(s), u'(s)) ds. \end{aligned}$$

($t=0$, と T では存在するもの)。

3). $C([0, T]; X_1)$ 上の線型汎関数 F が存在して次の性質を満たしてゐる。

$$1) \quad F(v-u) \leq \int_0^T \phi(v(s)) ds - \int_0^T \phi(u(s)) ds$$

for any $v \in C([0, T]; X_1)$.

2)

$$\int_0^T (u'(s), v'(s)) ds + \int_0^T (f(s) - Au(s), v(s)) ds + (b, v(0))$$

$$- \left(\frac{d^-}{dt} u(T), v(T) \right) = F(v)$$

for any $v \in C([0, T]; X_1) \cap L^1(0, T; V) \cap W^{1,\infty}(0, T; H)$.

$$4) \quad u(0) = a, \quad b - \frac{d}{dt} u(0) \in \partial I_{K_0} a$$

ここで K_0 は $D(\phi)$ の閉包で I_{K_0} は K_0 の indicator function

のとき次の定理を得る。

定理 1. $a \in V \cap D(\phi)$ で $b \in H$ としよう。仮定 1~3 のもと解を得る。

一意性を調べる為に次の仮定を入れよう。

(4)

仮定 4. K を H での 内点をもつ 閉凸集合 とする。 K の境界の滑らかさは 境界の各点における 長さ 1 の 外法線が Lipschitz 連続になつてゐる とする。 ここで $\phi(x) = I_K(x)$ とする。 $X_1 = X_2 = H$ とする。

定理 2. $a \in K \cap V$, $b \in H$ としよう。 仮定 1, 3, 4 のもと *tit-energy conserving solution* (数理研講究録 464, 61-69) が一意に存在する。

注意. 今 ϕ が一意であり $\forall u, v \in V$ に対して

$$\|\phi u - \phi v\|_H \leq C \|u - v\|_H \quad \text{が成立してゐる とする。 但し}$$

C は $\|u\|_V, \|v\|_V, \phi(u), \phi(v)$ によりのみ depend する数 とする。

上記の講究録中 (3.6) の式を満す u を *mild solution* とする。

今 *mild solution* (3.6) 式の右辺等三項中 $\int (c(u)) d\varphi_u$ を $\phi u ds$ に置きかえたものも又 *mild solution* という事にする。 仮定 1, 2, 3, かつ上記の仮定があれば一意性があつてくる。

2). 吉田近似の解の性質

(0, 2) の解について次の諸予備定理を得る。

予備定理 2.1.

次の等式, 不等式を得る。

(5)

$$1) \left| \frac{d}{dt} u_\lambda(t) \right|_H^2 + |u_\lambda(t)|_V^2 + 2\phi_\lambda(u_\lambda(t)) = \\ |b|^2 + |a|_V^2 + 2\phi_\lambda(a) + 2 \int_0^t (f(s), u'_\lambda(s)) ds$$

$$2) \left| \frac{d}{dt} u_\lambda(t) \right|_H^2 + |u_\lambda(t)|_V^2 + |\phi_\lambda(u_\lambda(t))| \leq \text{Constant}$$

ここで Constant は λ に無関係な正の数.

証明 (0, 2) に $\frac{d}{dt} u_\lambda(t)$ を積して 0 から t まで積分し部分積分を使用すれば 1) 1) に Gröwall の不等式を使用すれば 2) が得られる.

予備定理 2.2

$$\int_0^T |\phi_\lambda u_\lambda(s)|_{X_2} ds \leq \text{Constant}$$

ここで Constant は λ に無関係.

証明 仮定 2 を使用し 仮定 2 の不等式の左辺中 $\phi_\lambda u_\lambda$ のかわりに $-(u_\lambda'' + Au_\lambda - f)$ を代入して 0 から T まで積分し部分積分と 予備定理 2.1 の 2) から証明できる.

予備定理 2.3

吉田近似の解の集合 $\{u_\lambda(t)\}$ は $\lambda_j \rightarrow 0$ となる様な部分列で $u_{\lambda_j}(t)$ は X_1 で一様収束するものが存在する

証明 予備定理 2.1 の 2) と 仮定 1 と Ascoli-Arzelà の定理を使用すれば $u_{\lambda_j}(t) \rightarrow u(t)$ - 様収束 in H がわかる。
 今 $|u_{\lambda_j}|_V \leq \text{Const}$ より $u(t) \in V$ となる。故に $u(t) \in X_1$ である。
 まず $u(t) \in C([0, T]; X_1)$ を示そう。今 $\exists \{t_i\}_{i=1}^{\infty} \subset [0, T]$ で $(t_i \rightarrow t_0 \text{ となるもの}) \lim_{i \rightarrow \infty} |u(t_i) - u(t_0)|_{X_1} \geq \delta_0 > 0$ としよう。
 $|u(t_i)|_V \leq \text{Const}$ より $u(t_{i_j}) \rightarrow w$ in X_1 (仮定 1 より)
 - $\exists u(t_{i_j}) \rightarrow u(t_0)$ in H より $u(t_0) = w$ が得られる。
 故に矛盾するのだから $u \in C([0, T]; X_1)$ 。さて $u_{\lambda_j}(t)$ は $u(t)$ に H で収束と上記と同様な手法を使用すれば $u_{\lambda_j}(t)$ は $u(t)$ に X_1 で収束がわかり、一様収束も $u_{\lambda_j}(t) \rightarrow u(t)$ 、各点収束と $u(t)$ が連続よりわかる。

以後 簡単の為 部分列 $\{\lambda_j\}$ も $\{\lambda\}$ で表わす。

予備定理 2.4

- 1) $\{\frac{d}{dt} u_{\lambda}(t)\}$ は $\text{weak } L^2(0, T; H)$ で収束する部分列 $\exists$ かつ。
- 2) $\int_0^t (\partial_{\lambda} u_{\lambda}(s), v(s)) ds = F_{\lambda, t}(v)$ とすれば " any $v \in C([0, T]; X_1)$ と any $t \in [0, T]$ に対して $F_{\lambda, t}(v)$ は収束する様な部分列 $\exists$ かつ。この極限を $F_t(v)$ と書く

証明 1) は予備定理 2.1 の 2) より明らか。

2) には " 7 は $v(s) \equiv \alpha \in X_1$ に対して $|F_{\lambda, t}(\alpha)| \leq \text{Const}$ (7)。

より収束する部分列がある。故に X_1 は可分と対角線論法を使用して $\forall \alpha \in X_1$ で $F_{\lambda_j}(\alpha)$ の収束がわかる。又 $v(t) \in C([0, T]; X_1)$ は階段関数で近似する事と上記の収束を使用してこの予備定理を得る。

3. 定理1の証明

予備定理 3.1

F_t は $C([0, T]; X_1)$ 上の線型汎関数である。かつ F_t の operator norm での総変動量 (on $[0, T]$) は有界である。

証明. 前半は自明である。後半は

$$\begin{aligned} |F_t(v) - F_s(v)| &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} |F_{\lambda, t}(v) - F_{\lambda, s}(v)| \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_s^t |\phi_{\lambda} u_{\lambda}(v)|_{X_2} d\omega \cdot \sup_{0 \leq t \leq T} |v(t)|_{X_1}. \end{aligned}$$

と予備定理 2.2 より 証明できる。

予備定理 3.2

$\frac{d^{\pm}}{dt} u(t)$ が weak の意味で存在する。(0とTは存在するのみ)

証明. (0.2) の式に 任意の $\alpha \in V$ を積して部分積分を
すると

$$(3.1) \quad \left(\frac{d}{dt} u_{\lambda}(t), \alpha \right) = (b, \alpha) + \int_0^t (f - A u_{\lambda}(s), \alpha) ds + F_{\lambda, t}(\alpha).$$

(8)

右辺は すべて収束する。又 $\frac{d u_\lambda}{dt}(t)$ は H で有界と V の H での dense 性より すべて t で収束する。今 $\frac{d}{dt}u \in L_2(0, T; H)$ より

$$Y_0 = \{t \in [0, T]; \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d}{dt}u_\lambda(t) = \frac{d}{dt}u(t)\} \text{ とおく。}$$

Y_0 上で $\forall \alpha \in V$ に対し (3.1) で $\lambda \rightarrow 0$ とし 予備定理 3.1 より

$(\frac{d}{dt}u(t), \alpha)$ は 総変動量有界がわかる。

$\frac{d}{dt}u(t)$ の H での有界性を考えると $\forall \alpha \in H$ で $(\frac{d}{dt}u(t), \alpha)$ の総変動量有界かわる。故に weak の意味ですべての $t \in [0, T]$ に対し $\frac{d}{dt}u(t)$ が存在する。

予備定理 3.3.

$$F(v-u) \leq \int_0^T \{\phi(v(t)) - \phi(u(t))\} dt \quad \text{for any } v \in C([0, T]; X_1)$$

但し $F(v) = \lim_{t \rightarrow T} F_t(v)$ の事である。

証明. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \phi_\lambda(u_\lambda(t)) \geq \phi(u(t))$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \phi_\lambda(v) = \phi(v)$ と ϕ_λ の定義より自明。

予備定理 3.4

$$u(0) = a, \quad b - \frac{d^+}{dt}u(0) \in \partial I_{K_0} a \quad \text{とみえる。}$$

証明. 前半は自明。後半は $\forall v \in D(\phi) \cap V$ に対して

(0.2) に $v-u(t)$ を積して $\lambda \rightarrow 0$ とすれば $t \in \gamma_0$ で

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} u(t), v-u(t) \right) - (b, v-a) &= \int_0^t (f(u) - Au(u), v-u(u)) \, du \\ &\quad - \int_0^t |u'(u)|_H^2 \, du - F_t(v-u) \end{aligned}$$

となる。

右辺の - 項と = 項は $t \rightarrow 0$ で 0 にゆく。又 $F_t(v-u)$

$$\leq \int_0^t (\phi(v) - \phi(u)) \, du \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow 0 \quad \text{となる。}$$

故に $(b - \frac{d}{dt} u(0), v-a) \leq 0$ と V の dense 性より証明できる。

定理 1 の証明に入ろう。解の定義中 1) は 予備定理

2.1 の (2) と 2.3 より出てくる。 2) は 予備定理 2.1 の

1) と 予備定理 2.3 と (3.1) の収束を考えよと不等式から

右左弱微分の存在は 予備定理 3.2 より出てくる。

3) は 予備定理 3.3 と (0.2) に $v \in C([0, T]; V) \cap W^{1, \infty}(0, T; H)$

を積して部分積分を 1 行式と 予備定理 2.3, 2.4 より

わかる。 4) は 予備定理 3.4 による。 故に証明終了。

4. 一意性について。

定理 2 の 証明については 講究録 464 61-69 を見ていた

でよい。 注意については 注意中の仮定と 予備定理

2.1 の (2) とにより $\|\phi_\lambda u_\lambda(t)\|_H \leq \text{Const}$ かわかり 上記の

講究録中と同じ様な方法より mild solution の存在かわかる。

- 一意性については mild solution が 2 つあると 1 つ 差をとり 注意中の仮定を使用し Gronwall の不等式を用いて矛盾が来る。 mild solution は $\{t_i\}$ -energy conserving solution なので 今の場合 $\{t_i\}$ -energy conserving solution は $\{t_i\}$ の取り方に依らず一意である事は自明の事である。

5. 例

以後 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とし 有界な領域とする。 $\partial\Omega$ は滑か。

$L_2(\Omega) = H$ $A = -\Delta$ (Dirichlet 問題) とする。

$$1.) \quad \phi(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^p u(x) dx \quad \text{とすると} \quad \partial\phi u = (p+1)|u|^{p-1}u$$

となる。今 $X_1 = C(\Omega)$, $X_2 = L_1(\Omega)$ とする。

今 $(n+1) > p(n-2)$ ならば 仮定 1 を満たす。今 $\partial\phi_\lambda f = (p+1)|\omega_\lambda|^{p-1}$

$$\cdot \omega_\lambda \quad \text{すなわち} \quad \omega_\lambda = (1 + \lambda \partial\phi)^{-1} f. \quad \forall x \in \Omega \quad \text{で} \quad \omega_\lambda(x) \cdot f(x) \geq 0$$

$$(|\omega_\lambda(x)| \leq |f(x)| \text{ より}) \quad |\omega_\lambda(x)|^{p-1} - 1 \leq |\omega_\lambda(x)|^{p+1} \leq |\omega_\lambda(x)|^{p-1} \cdot \omega_\lambda(x) \cdot f(x)$$

が成り立つので Ω で積分すれば 仮定 2 が成り立つ。

$$2.) \quad K = \{f \in L_2(\Omega) \mid f(x) \geq \theta(x) \text{ a.e. } x \in \Omega \mid \text{但し } \theta \in C^1(\Omega)$$

かつ $\theta(x) < 0$ on $\partial\Omega$. $I_K(f) = \phi(f)$ とおくと $z_0 \in C^1(\Omega)$ と

($z_0(x) = 0$ on $\partial\Omega$, $|\theta(x) - z_0(x)| > \delta_0 > 0$ とし)

(11)

仮定 2 により $\partial \phi_\lambda(f)(x) = \frac{1}{\lambda}(f - \text{proj}_K f)(x)$ より

$f(x) > 0(x)$ なら $\partial \phi_\lambda(f)(x) = 0$ $f(x) \leq 0(x)$ なら $f(x) - z_0(x)$

$\leq -\delta_0$ となる λ の λ に対して $(\partial \phi_\lambda f(x) \cdot (f(x) - z_0(x))) \geq \delta_0 \partial \phi_\lambda f(x)$

を得 Ω で積分すれば 仮定 2 が成り立つ。

仮定 1 が成立させる為 $X_1 = C(\Omega)$, $X_2 = L_1(\Omega)$ とし

$n = 1$ としなればなる。

注意中の仮定は例 1 の時 成立している。故に例 1 は一意性が成り立つ。

文 献

- [1] H. Brezis: Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear part. diff. equations
Contributions to Nonlinear Functional Analysis
F. Zanantonello (editor), Acad. Press (1971). 101-179.
- [2] M. Schatzman: Sur une classe de problèmes hyperboliques nonlinéaires, C. R. Acad. Paris, t. 277 (1973), A 671 - A 674.
- [3] M. Schatzman: A class of nonlinear differential (12)

equations of second order in time, *Nonlinear Analysis, Theory, Method & Applications* 2 (1978), 355-373.

[4] M. Schatzman : A Hyperbolic Problem of Second Order with unilateral constraints: The Vibrating String with a concave obstacle; *J. Math. Anal. and Appl.* 73, 138-191 (1980).

[5] K. Jörgens : Das Anfangswertproblem in Größen für eine Klasse nichtlinear Wellengleichungen, *Math. Z.* 77, 295-308 (1961).