

N. Levinson の結果の Dirichlet の L-関数への拡張について

上智大学理工 平野照比古

§ 0. 序

この小論において、Levinson [7] の結果を Dirichlet の L-関数へ拡張する。計算の方針はほとんど同じなので、重要な部分のみくわしい証明をつけることにする。結果の報告が Hilano [8] に出ている。

§ 1. 基本的な $L(s, \chi)$ の性質

ここでは、 χ は常に modulo g の原始指標とする。まず、次の記法を使う。

$$a = \frac{1}{2} (1 - \chi(-1)) \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} h(s) &= h(s, \chi) \\ &= \left(\frac{\pi}{g}\right)^{-(s+a)/2} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$f'(s) = h'(s)/h(s) \quad (1.3)$$

$$\varepsilon(\chi) = \frac{(-i)^a}{g^{1/2}} \sum_{m=1}^g \chi(m) e^{2\pi i m/g} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= G(s, \chi) \\ &= L(s, \chi) + L'(s, \chi) / (f'(s) + f'(1-s)) \end{aligned} \quad (1.5)$$

このとき、Hilano[8]で証明したように次の定理が成立する。

Theorem 1 $\mathcal{D}$ を

$$1/2 \leq \sigma \leq 3$$

$$T \leq t \leq T+U$$

なる領域とし、 $N_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})$ を $\mathcal{D}$ 内における $G(s)$ の零点の数とする。このとき、

$$\begin{aligned} N_0(T+U, \chi) - N_0(T, \chi) \\ \geq \frac{U}{2\pi} \log \frac{8T}{2\pi} - 2N_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}) + O\left(\frac{U^2}{T} + 1\right) \end{aligned}$$

が、成り立つ。

§2. 主定理

この小論における主定理は次のように述べられる。

Main Theorem

任意の $\varepsilon > 0$ に対し.

$$\log \delta \leq (\log T)^{1-\varepsilon} \quad (2.1)$$

とする。さらに.

$$U = \frac{T}{\delta \log^4 \frac{\delta T}{2\pi}}$$

とおく。このとき $T > C_\varepsilon$ であれば.

$$N_0(T+U, \chi) - N_0(T, \chi) > \frac{1}{3} (N(T+U, \chi) - N(T, \chi))$$

が成立する。

§3. $N_G(D)$ の評価のための準備

以下の節では、 $N_G(D)$ の上からの評価をする。そのために

$$\psi(s) = \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) b_n}{n^s} \quad (3.1)$$

において、 $N_{\psi G}(D)$ の評価をすれば十分である。ここで、次の仮定をおく。

$$L = \log \frac{\delta T}{2\pi}$$

$$X \geq 1$$

$$\log X \ll L$$

$$|b_n| \leq 1$$

$$b_1 = 1$$

(Levinson の論文では、 χ と b_n がはじめから与えられている。
しかし、ここでは当面の計算に必要な条件だけを与えておく。
 b_n の定義は §9 で与えられる。)

さて、 $G(s)\psi(s)$ の σ での零点の個数を計算するために、
Littlewood の定理と $L(s, \chi)$ の近似関数等式を引用する。

Theorem 2 (Littlewood)

$F(s)$ が、 $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, $T \leq t \leq T+U$ で一価で、
有理型とする。さらに、 $\sigma = \sigma_2$ 上で $F(s) \neq 0, \infty$
とする。 $\nu(\alpha)$ を

$$(\sigma_1 \leq) \alpha < \sigma < \sigma_2, \quad T \leq t \leq T+U$$

内の零点の個数から極の個数を引いた数とする。このとき

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\alpha}^{\sigma_2} \nu(\sigma) d\sigma &= \int_T^{T+U} \left\{ \log |F(\alpha+it)| - \log |F(\sigma_2+it)| \right\} dt \\ &\quad + \int_{\alpha}^{\sigma_2} \left\{ \arg F(\sigma+i(T+U)) - \arg F(\sigma+iT) \right\} d\sigma \end{aligned}$$

が成立する。

Theorem 3 ($L(s, \chi)$ の近似関数等式)

$$|t| \geq c > 0, \quad \delta = O\left(\frac{1}{\log 8|t|}\right) \quad \text{とする。}$$

$$g_1(s, \chi) = \sum_{n \leq \sqrt{\frac{8|t|}{2\pi}}} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad (3.2)$$

$$g_2(s, \chi) = \sum_{n \leq \sqrt{\frac{8|t|}{2\pi}}} \frac{\chi(n) \log n}{n^s} \quad (3.3)$$

このとき、 $\sigma = \frac{1}{2} - \delta$ 、 $\log 8|t| = O(\frac{1}{\delta})$
に対して

$$L(s, \chi) = g_1(s, \chi) + \varepsilon(\chi) \frac{\bar{\kappa}(1-s)}{\kappa(s)} g_1(1-s, \bar{\chi}) \\ + O(8^{\frac{1}{4}} |t|^{-\frac{1}{4}})$$

$$L'(s, \chi) = -g_2(s, \chi) + \varepsilon(\chi) \left\{ \frac{d}{ds} \left(\frac{\bar{\kappa}(1-s)}{\kappa(s)} \right) \cdot g_1(1-s, \bar{\chi}) \right. \\ \left. + \frac{\bar{\kappa}(1-s)}{\kappa(s)} g_2(1-s, \bar{\chi}) \right\} \\ + O(8^{\frac{1}{4}} |t|^{-\frac{1}{4}} \log 8|t|)$$

が成立する。

(この証明は、たとえば Lavrik [2, 3] か、もしくはそのくわしい解説である本橋[4]を参照のこと。もちろん、ここでは特殊な s に対してのみ引用してある。)

さて、

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\bar{\kappa}(1-s)}{\kappa(s)} \right) = - \frac{\bar{\kappa}(1-s)}{\kappa(s)} (f'(s) + f'(1-s))$$

であるから、上のようなる s については $G(s)$ は簡単な計算により

$$G(s) = g_1(s, \chi) + \frac{1}{(f'(s) + f'(1-s))} \left\{ -g_2(s, \chi) + \varepsilon(\chi) \frac{h(1-s)}{h(s)} g_2(1-s, \bar{\chi}) \right\} \\ + O(\delta^{\frac{1}{4}} |t|^{-\frac{1}{4}}) \quad (3.4)$$

さて、 $\delta > 0$ とするとき、Littlewood の定理を

$$\alpha = \frac{1}{2} - \delta, \quad \sigma_2 = \beta, \quad F = \psi G$$

として応用すれば、定理の仮定は $\zeta(s)$ の場合と同様に示せるから、

$$2\pi\delta N_G(\mathcal{D}) \leq \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\beta} \nu(\sigma) d\sigma \\ = \int_T^{T+U} \log |(\psi G)(\frac{1}{2}-\delta+it)| dt + O\left(\frac{U}{L}\right) \\ \leq \frac{U}{2} \log \left\{ \frac{1}{U} \int_T^{T+U} |(\psi G)(\frac{1}{2}-\delta+it)|^2 dt \right\} \quad (3.5)$$

が得られる。Stirling の公式により、 $\sigma = \frac{1}{2} - \delta$, $t > 0$ に対し

$$\frac{h(1-s)}{h(s)} = \theta(t) + O\left(\frac{1}{t}\right) \quad (3.6)$$

と書ける。ここに

$$\theta(t) = \left(\frac{\delta t}{2\pi} \right)^{\delta} e^{-\frac{\pi}{2}(\alpha-\frac{1}{2})t} e^{-it \log \frac{\delta t}{2\pi e}} \quad (3.7)$$

である。さらに、

$$f'(s) + f'(1-s) = \log \frac{st}{2\pi} + O\left(\frac{1}{|t|}\right)$$

であり、

$$|g_2(\frac{1}{2} \pm \delta \mp it, \bar{x})| = O((st)^{\frac{1}{4}} \log st)$$

であるから、(3.4), (3.6) により

$$\begin{aligned} G(\frac{1}{2} - \delta + it) &= g_1(\frac{1}{2} - \delta + it, x) + \frac{1}{\log \frac{st}{2\pi}} (-g_2(\frac{1}{2} - \delta + it, x) + \varepsilon(x) \theta(t) g_2(\frac{1}{2} + \delta - it, \bar{x})) \\ &\quad + O(st^{\frac{1}{4}} |t|^{-\frac{1}{4}}) \\ &= H(\frac{1}{2} - \delta + it, x) + H_1(\frac{1}{2} - \delta + it, x) \quad (\text{Say!}) \\ &\quad (\text{剰余項}) \end{aligned}$$

となる。これを (3.5) に代入すると、Levinson の場合と同様に、

$$\begin{aligned} &\int_T^{T+U} |\psi G(\frac{1}{2} - \delta + it)|^2 dt \\ &= \int_T^{T+U} |\psi H|^2 dt + O(U^{\frac{1}{2}} st^{\frac{1}{4}} T^{-\frac{1}{4}} (UL+x)^{\frac{1}{2}} + st^{\frac{1}{2}} T^{-\frac{1}{2}} (UL+x)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

を得る。(ただし、 $\int_T^{T+U} |\psi H|^2 dt = O(U)$ を用いた。

これを示すのが、以下の計算の目的でもある。)

H の定義より、

$$\begin{aligned}
& \int_T^{T+U} |\psi H(\tfrac{1}{2}-\delta+it, \chi)|^2 dt \\
&= I_{11} + I_{22} + I_{33} - 2 \operatorname{Re} I_{12} - 2 \operatorname{Re} I_{23} + 2 \operatorname{Re} I_{13} \\
& \qquad \qquad \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

と書ける。こゝに

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int_T^{T+U} |(\psi g_1)(\tfrac{1}{2}-\delta+it, \chi)|^2 dt \\
I_{22} &= \int_T^{T+U} |(\psi g_2)(\tfrac{1}{2}-\delta+it, \chi)|^2 \frac{dt}{\log^2 \frac{8t}{2\pi}} \\
I_{33} &= \int_T^{T+U} |\theta(t)|^2 |(\psi g_2)(\tfrac{1}{2}+\delta-it, \bar{\chi})|^2 \frac{dt}{\log^2 \frac{8t}{2\pi}} \\
I_{12} &= \int_T^{T+U} (|\psi|^2 g_1 g_2)(\tfrac{1}{2}-\delta+it, \chi) \frac{dt}{\log \frac{8t}{2\pi}} \\
I_{13} &= \int_T^{T+U} \overline{\varepsilon(\chi)} |\psi|^2 \overline{\theta(t)} g_1(\tfrac{1}{2}-\delta+it, \chi) \overline{g_2(\tfrac{1}{2}+\delta-it, \bar{\chi})} \frac{dt}{\log \frac{8t}{2\pi}} \\
I_{23} &= \int_T^{T+U} \overline{\varepsilon(\chi)} |\psi|^2 \overline{\theta(t)} g_2(\tfrac{1}{2}-\delta+it, \chi) \overline{g_2(\tfrac{1}{2}+\delta-it, \bar{\chi})} \frac{dt}{\log^2 \frac{8t}{2\pi}}
\end{aligned}$$

とおいた。

§4. Lemmas

この節では、あとに使われるいくつかの Lemma を述べる。

証明は Levinson [7] とほとんど同じなので省略する。(各 Lemma のみとに対応する Lemma の番号をつける。)

Lemma 4.1

$0 < |\delta| < \frac{c}{\log Y}$, $Y > c'g$ (c, c' はある定数) なる δ に対して

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq Y \\ (j, g)=1}} \frac{1}{j^{1-2\delta}} = \frac{\varphi(g)}{g} \left(\frac{Y^{2\delta}}{2\delta} - \frac{1}{2\delta} \right) + c_1(g, \delta) + O(\varphi(g) Y^{-1+2\delta})$$

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq Y \\ (j, g)=1}} \frac{\log j}{j^{1-2\delta}} = \frac{\varphi(g)}{g} \left(\frac{Y^{2\delta}}{2\delta} \log Y - \frac{Y^{2\delta}}{(2\delta)^2} + \frac{1}{(2\delta)^2} \right) + c_2(g, \delta) + O(\varphi(g) Y^{-1+2\delta} \log Y)$$

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq Y \\ (j, g)=1}} \frac{\log^2 j}{j^{1-2\delta}} = \frac{\varphi(g)}{g} \left(\frac{Y^{2\delta}}{2\delta} \log^2 Y - 2 \frac{Y^{2\delta}}{(2\delta)^2} \log Y + 2 \frac{Y^{2\delta}}{(2\delta)^3} - \frac{1}{(2\delta)^3} \right) + c_3(g, \delta) + O(\varphi(g) Y^{-1+2\delta} \log^2 Y)$$

が成立する。ここに $c_k(g, \delta)$ は g と δ のみによる定数で

$$|c_k(g, \delta)| \ll \frac{1}{g^{k-1}} (\log \log g)^2$$

となる。(Lemma 3.1, 3.9)

Lemma 4.2

$m = 0, 1, 2$ とし. A を十分大きな数で

$$A^\delta = o(1)$$

とする. このとき

$$A \leq r \leq B \leq A + A/\log A$$

なる r に対して

$$\begin{aligned} & \int_A^B \exp(it \log \frac{t}{er}) \left(\frac{rt}{2\pi}\right)^\delta \frac{dt}{\log^m \frac{rt}{2\pi}} \\ &= f^\delta (2\pi)^{\frac{1}{2}-\delta} r^{\frac{1}{2}+\delta} e^{-ir+\pi i/4} / \log^m \frac{rf}{2\pi} + f^\delta E(r) / \log^m fA \end{aligned}$$

となる. ことに

$$E(r) = o(1) + o\left(\frac{A}{|A-r|+A^{1/2}}\right) + o\left(\frac{B}{|B-r|+B^{1/2}}\right)$$

である. 上記以外の r に対しては, 上の積分は

$$f^\delta E(r) / \log^m fA$$

と評価される. (Lemma 3.4, 3, 5)

Lemma 4.3

$K \in$

$$C_1 \leq (u+\beta_1)(v+\beta_2) \leq C_2$$

$$C_3(u+\beta_1) \leq (v+\beta_2) \leq C_4(u+\beta_1)$$

と与えられる領域とする。ここに、 $C_1, C_2 > 0$, $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ とする。 $f \in C^1(K)$ とし、さらに

$|K|$: K の面積

$$u_M = \max_{(u,v) \in K} u$$

$$v_M = \max_{(u,v) \in K} v$$

$$|f|_M = \max_{(u,v) \in K} |f| \quad \text{etc.}$$

とおく。このとき、

$$\sum_{(m,n) \in K} f(m,n) = \iint_K f(u,v) du dv + J$$

となり、

$$|J| \ll |f|_M (u_M + v_M + 1) + (|K| + v_M) \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|_M + |K| \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|_M$$

が成立する。(Lemma 3.7)

§5. Notation

以後の節での簡単のため、次の記法を用いる。

$$\tau = \left(\frac{gT}{2\pi} \right)^{1/2}, \quad \tau_1 = \left(\frac{g(T+U)}{2\pi} \right)^{1/2}$$

k_1, k_2 : ψ から現われる変数

j_1, j_2 : g_1 か g_2 から現われる変数

さらに, $k = (k_1, k_2)$

とおく, $k_1 = k A_1$, $k_2 = k A_2$

$$A_M = \max(A_1, A_2)$$

$$k_M = \max(k_1, k_2)$$

$$k_m = \min(k_1, k_2)$$

$$T_1 = \max\left(T, \frac{2\pi f_1^2}{f}, \frac{2\pi f_2^2}{f}\right)$$

とおく。さらに,

$$X \leq \tau / (fL)$$

$$f \leq T$$

と仮定する。

また, Σ^* で f と互いに素な j や k に関する和を表わすものとする。

§6. I_{11} , I_{22} , I_{33} と I_{12} の評価

これらの積分は, Lemma 4.1 を用いて同様の方法で計算できる。

Proposition 6.1

$$I_{11} = \frac{\varphi(f)}{f} U P_0(1, 1-2\delta) \frac{\tau^{2\delta}}{2\delta} - \left(\frac{\varphi(f)}{f} \frac{1}{2\delta} - c_1^* \right) U S_0$$

$$+ O(R)$$

$$\begin{aligned}
I_{22} = & \frac{\varphi(\delta)}{\delta} U \tau^{2\delta} \left(\frac{2}{(2\delta)^3 L^2} P_0(1, 1-2\delta) - \frac{1}{2(2\delta)^2 L} P_0(1, 1-2\delta) \right. \\
& \left. - \frac{1}{(2\delta)^2 L^2} P_1(1, 1-2\delta) + \frac{1}{2(2\delta) L} P_1(1, 1-2\delta) \right) \\
& + \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \frac{U}{L^2} \left\{ - \left(\frac{2}{(2\delta)^3} - \frac{\delta}{\varphi(\delta)} C_3^* \right) s_0 + \left(\frac{2}{(2\delta)^2} + \frac{\delta}{\varphi(\delta)} 2 C_2^* \right) s_1 \right. \\
& \left. - \left(\frac{1}{2\delta} - \frac{\delta}{\varphi(\delta)} C_1^* \right) s_2 \right\} + O(R)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{33} = & \frac{\varphi(\delta)}{\delta} U \tau^{2\delta} \left\{ - \frac{2}{(2\delta)^3 L^2} P_0(1-2\delta, 1) - \frac{1}{2(2\delta)^2 L} P_0(1-2\delta, 1) \right. \\
& \left. - \frac{1}{(2\delta)^2 L^2} P_1(1-2\delta, 1) - \frac{1}{2(2\delta) L} P_1(1-2\delta, 1) \right\} \\
& + \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \frac{U \tau^{4\delta}}{L^2} \left\{ \left(\frac{2}{(2\delta)^3} + \frac{\delta}{\varphi(\delta)} C_6^* \right) s_0' + \left(\frac{2}{(2\delta)^2} + \frac{\delta}{\varphi(\delta)} 2 C_5^* \right) s_1' \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{2\delta} + \frac{\delta}{\varphi(\delta)} C_4^* \right) s_2' \right\} + O(R)
\end{aligned}$$

$$2 \operatorname{Re} I_{12} = I_{12} + I_{21}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{\varphi(\delta)}{\delta} U \tau^{2\delta} \left\{ - \frac{2 P_0(1, 1-2\delta)}{(2\delta)^2 L} + \frac{2 P_0(1, 1-2\delta)}{2(2\delta)} + \frac{P_1(1, 1-2\delta)}{(2\delta) L} \right\} \\
& + \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \frac{U}{L} \left\{ \left(\frac{2}{(2\delta)^2} + \frac{2\delta}{\varphi(\delta)} C_2^* \right) s_0 + 2 \left(- \frac{1}{2\delta} + \frac{\delta}{\varphi(\delta)} C_1^* \right) s_1 \right\} + O(R)
\end{aligned}$$

ここに.

$$R = X \tau L + \frac{U^2}{T} L^3 + \varphi(q) \frac{XU}{T} L^3$$

であり.

$$S_0 = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq X}^* \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{1-2\delta}}{(k_1 k_2)^{1-2\delta}}$$

$$S_1 = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq X}^* \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{1-2\delta}}{(k_1 k_2)^{1-2\delta}} \log\left(\frac{k_1}{k}\right)$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq X}^* \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{1-2\delta}}{(k_1 k_2)^{1-2\delta}} \log\left(\frac{k_1}{k}\right) \log\left(\frac{k_2}{k}\right)$$

$$P_0(\alpha, \beta) = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq X}^* \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M^\alpha k_m^\beta}$$

$$P_1(\alpha, \beta) = \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq X}^* \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M^\alpha k_m^\beta} \log\left(\tau \frac{k_m}{k_M}\right)$$

である。ここに於ける C^* は Lemma 4.1 と同様な不等式とみえる。

§7. I_{13} と I_{23} の評価

I_{13} の定義より.

$$I_{13} = \overline{\varepsilon(\chi)} \int_T^{T+U} \sum_{\substack{1 \leq k_1, k_2 \leq X \\ 1 \leq j_1, j_2 \leq \left(\frac{\delta T}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}} \frac{b_{k_1} b_{k_2} \chi(k_1 j_1 j_2) \overline{\chi}(k_2) \log j_2}{(k_1 k_2 j_1)^{\frac{1}{2}-\delta} j_2^{\frac{1}{2}+\delta}} \\ \times \frac{\left(\frac{\delta t}{2\pi}\right)^\delta}{\log \frac{\delta t}{2\pi}} e^{\frac{\pi(a-\frac{1}{2})}{2} i + it \log \frac{k_2 \delta t}{2\pi e k_1 j_1 j_2}} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{\varepsilon(\chi)} e^{\frac{\pi}{2}(a-\frac{1}{2})i} \sum_{\substack{1 \leq k_1, k_2 \leq X \\ 1 \leq j_1, j_2 \leq T_1}} \frac{b_{k_1} b_{k_2} \chi(k_1 j_1 j_2) \overline{\chi}(k_2) \log j_2}{(k_1 k_2 j_1)^{\frac{1}{2}-\delta} j_2^{\frac{1}{2}+\delta}} \\
&\quad \times \int_T^{T+U} \left(\frac{gt}{2\pi}\right)^{\delta} \frac{e^{it} \log \frac{k_2 gt}{2\pi e k_1 j_1 j_2}}{\log \frac{gt}{2\pi}} dt \\
&= I_{13}^{(0)} + I_{13}^{(R)} \tag{7.1}
\end{aligned}$$

ここに $I_{13}^{(R)}$ は、Lemma 4.2 を内側の積分に適用したときに現われる剰余項の和を表わす。この項は同様な計算で評価でき
て、

$$I_{13}^{(R)} \ll g(g) g^{-\frac{1}{2}} X L^3$$

となる。一方、

$$\begin{aligned}
I_{13}^{(0)} &= \overline{\varepsilon(\chi)} e^{\frac{\pi}{2}(a-\frac{1}{2})i} \sum'_{\substack{1 \leq k_1, k_2 \leq X \\ 1 \leq j_1, j_2 \leq T_1}} \frac{b_{k_1} b_{k_2} \chi(k_1 j_1 j_2) \overline{\chi}(k_2) \log j_2}{(k_1 k_2 j_1)^{\frac{1}{2}-\delta} j_2^{\frac{1}{2}+\delta}} \\
&\quad \times g^{\delta} (2\pi)^{\frac{1}{2}-\delta} \left(\frac{2\pi j_1 j_2 k_1}{g k_2}\right)^{\frac{1}{2}+\delta} e^{\frac{2\pi i k_1 j_1 j_2}{g k_2} + \pi i} / \log \frac{j_1 j_2 k_1}{k_2} \\
&\tag{7.2}
\end{aligned}$$

となる。ここで $\sum'$ は

$$T_1 \leq \frac{2\pi j_1 j_2 k_1}{g k_2} \leq T+U \tag{7.3}$$

にわたる和を表わす。この条件は、

$$\frac{g T k_2}{2\pi k_1} \leq j_1 j_2 \leq \frac{g(T+U)k_2}{2\pi k_1} \quad (7.4)$$

$$\frac{j_1 k_2}{k_1} \leq j_2 \leq \frac{j_1 k_1}{k_2} \quad (7.5)$$

と同値である。(7.5)より、

$$k_2 \leq k_1 \quad (7.6)$$

と仮定してよい。

さて、まず j_2, k_1, k_2 と

$$\sum_I = \sum'_{Y_1 \leq j_1 \leq Y_2} \chi(j_1) e^{-\frac{2\pi i j_1 j_2 k_1}{g k_2}} \quad (7.7)$$

なる和を考える。この和を $j_1 \equiv \ell_1 \pmod{g}$ なる関係で、 g 個の和に分け、それらについて同様な方法を用いる。

$\ell_2 \ (0 \leq \ell_2 < A_2)$ と、

$$j_2 A_1 \equiv \ell_2 \pmod{A_2}$$

を定義すると、 $\ell_2 \neq 0$ のとき、

$$\sum_I = O\left(\varphi(g) \left(\frac{A_2}{\ell_2} + \frac{A_2}{A_2 - \ell_2}\right)\right)$$

となる。したがって部分和の方法により、 $\ell_2 \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \sum'_{j_1} \frac{j_1^{2\delta}}{\log(j_1 j_2 k_1 / k_2)} e^{-\frac{2\pi i j_1 j_2 k_1}{g k_2}} \\ = O\left(\varphi(g) \left(\frac{A_2}{\ell_2} + \frac{A_2}{A_2 - \ell_2}\right)\right) \end{aligned}$$

$(A_1, A_2) = 1$ であるから. $j_2 A_1 \not\equiv 0 \pmod{A_2}$ であるための必要十分条件は $j_2 \not\equiv 0 \pmod{A_2}$ である。

$$\begin{aligned} & \sum'_{\substack{j_1, j_2 \\ j_2 A_1 \not\equiv 0 \pmod{A_2}}} j_1^{2\delta} \log j_2 \chi(j_1 j_2) e^{-\frac{2\pi i j_1 j_2 k_1}{f k_2}} / \log \frac{j_1 j_2 k_1}{k_2} \\ &= O\left(\left(\frac{\tau_1}{A_2} + 1\right) \varphi(f) \sum_{k_2=1}^{A_2-1} \left(\frac{A_2}{k_2} + \frac{A_2}{A_2-k_2}\right)\right) \\ &= O(\varphi(f) \tau L) \end{aligned}$$

となる。これによって、これらの項の $I_{13}^{(0)}$ への寄与は、高々

$$O(\varphi(f) f^{-\frac{1}{2}} \tau X L^2)$$

である。ゆえに、

$$I_{13}^{(0)} = I_{13}^{(1)} + O(f^{\frac{1}{2}} \tau X L^2) \quad (7.8)$$

を得る。ここに、

$$\begin{aligned} I_{13}^{(1)} &= \overline{\varepsilon(\chi)} f^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{2} a i} 2\pi \sum_{\substack{1 \leq k_1, k_2 \leq X \\ 1 \leq j_1, j_2 \leq \tau_1 \\ j_2 A_1 \equiv 0 \pmod{A_2}}} \frac{b_{k_1} b_{k_2} \chi(j_1 j_2 k_1) \overline{\chi(k_2)} \log j_2}{k_1^{-2\delta} k_2 j_1^{-2\delta}} \\ &\quad \times e^{-\frac{2\pi i j_1 j_2 k_1}{f k_2}} / \log \frac{j_1 j_2 k_1}{k_2} \\ &= \overline{\varepsilon(\chi)} f^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{2} a i} 2\pi \sum_{1 \leq k_2 \leq k_1 \leq X}^* \frac{b_{k_1} b_{k_2} k_1^{2\delta}}{k_2} \end{aligned}$$

$$\times \sum_{(j_1, j) \in K} j_1^{2\delta} \frac{\log j A_2}{\log j_1 j A_1} \chi(A_1 j_1 j) e^{-\frac{2\pi i j_1 j A_1}{j}}$$

であり、 K は、

$$\frac{jT}{2\pi A_1} \leq uv \leq \frac{j(T+U)}{2\pi A_1}$$

$$\frac{u}{A_1} \leq v \leq \frac{uA_1}{A_2^2}$$

で与えられる領域である。(上の注意により $j_2 = jA_2$ とおいた。) $(j_1, j) \in K$ に対し、

$$\frac{1}{\log j_1 j A_1} - \frac{1}{L} = O\left(\frac{U}{TL^2}\right)$$

であるから、Lemma 3.6 を用いて、

$$\begin{aligned} I_{13}^{(1)} &= \frac{1}{L} I_{13}^{(2)} + O\left(\frac{U}{TL^2} j^{-\frac{1}{2}} \sum_{k_1, k_2} \frac{1}{k_2} \sum_{(j_1, j) \in K} L\right) \\ &= \frac{1}{L} I_{13}^{(2)} + O\left(j^{\frac{1}{2}} \frac{U^2}{T} L^3 + j^{-\frac{1}{2}} \frac{UX}{T^{\frac{1}{2}}}\right) \quad (7.9) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} I_{13}^{(2)} &= \overline{\varepsilon(\chi)} j^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i a_L}{2}} 2\pi \sum_{1 \leq k_2 \leq k_1 \leq X}^* \frac{b_{k_1} b_{k_2} k_1^{2\delta}}{k_2} \\ &\quad \times \sum_{(j_1, j) \in K} j_1^{2\delta} \log j A_2 \chi(A_1 j_1 j) e^{-\frac{2\pi i j_1 j A_1}{j}} \quad (7.10) \end{aligned}$$

$I_{13}^{(3)}$ を上式の一番内側の和とし.

$$I_{13}^{(4)}(l_1, l) = \sum_{\substack{j_1 \equiv l_1 \pmod{f} \\ j \equiv l \pmod{f} \\ (j_1, j) \in K}} j_1^{2\delta} \log j A_2 \quad (7.11)$$

とおく.

$$I_{13}^{(3)} = \sum_{\substack{0 \leq l_1 \leq f-1 \\ 0 \leq l \leq f-1}} I_{13}^{(4)}(l_1, l) \chi(A_1 l, l) e^{\frac{2\pi i l_1 l A_1}{f}} \quad (7.12)$$

となる。ここで $I_{13}^{(4)}$ の計算をする。

$$j_1 = j_1^* f + l_1$$

$$j = j^* f + l \quad (7.13)$$

とおく。このとき、 j_1^*, j^* に関する条件は

$$(j_1^*, j^*) \in K(l_1, l)$$

である。ただし、 $K(l_1, l)$ とは

$$\frac{fT}{2\pi A_1} \leq (fu+l_1)(fv+l) \leq \frac{f(T+U)}{2\pi A_1}$$

$$\frac{fu+l}{A_1} \leq fv+l \leq \frac{fu+l_1}{A_2^2} A_1.$$

で定義された領域である。Lemma 4.2 を $I_{13}^{(4)}(l_1, l)$ に適用すれば、

$$I_{13}^{(4)}(l_1, l) = \sum_{(j_1^*, j^*) \in K(l_1, l)} (fj_1^* + l_1)^{2\delta} \log(fj^* + l) A_2$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{K(l_1, l)} (gu+l_1)^{2\delta} \log(gv+l) A_2 du dv \\
&\quad + O(R(l_1, l)) \quad (7.14)
\end{aligned}$$

となる。前の記法をそのまま用いれば、

$$|u_M| \ll \frac{T}{g}$$

$$|v_M| \ll \tau/gA_2$$

$$|f_M| \ll L$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|_M \ll gA_1/(\tau A_2)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|_M \ll gA_1/\tau$$

であることがすぐわかる。また、

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{0 \leq l_1 \leq g \\ 0 \leq l \leq g}} K(l_1, l) &= \frac{1}{g^2} \sum_{\substack{0 \leq l_1 \leq g \\ 0 \leq l \leq g}} \iint_{(u,v) \in K} du dv \\
&= |K| \\
&\leq \frac{gU}{A_1} L
\end{aligned}$$

であるから、剰余項の全体への寄与は、

$$\ll g^{-\frac{1}{2}} \tau X L^2 + \frac{g^{\frac{1}{2}} U X L}{\tau} + g^{\frac{3}{2}} X^2 \quad (7.15)$$

となる。一方、

$$\iint_{K(l_1, l)} (gu+l_1)^{2\delta} \log(gv+l) A_2 du dv$$

$$= \frac{1}{g^2} \iint_K u^{2\delta} \log v A_2 du dv$$

$$= \frac{1}{g^2} F$$

であり、 F は l_1 や l に無関係である。 l に代わって、 $(A_1 l_1, g)=1$ に注意して、

$$I_{13}^{(3)} = \frac{F}{g^2} \sum_{\substack{0 \leq l_1 < g \\ 0 \leq l < g}}^* \chi(A_1 l_1 l) e^{-2\pi i l_1 l A_1 / g}$$

$$= \frac{F}{g^2} \varphi(g) \sum_{m=1}^{g^*} \chi(-m) e^{2\pi i m / g}$$

$$= \frac{\varphi(g)}{g^2} F(-1)^a \sum_{m=1}^{g^*} \chi(m) e^{2\pi i m / g}$$

$$= \frac{\varphi(g)}{g^{\frac{3}{2}}} i^{-a} \varepsilon(\chi) F$$

となる。 l に代わって、(7.10)に代入して、

$$I_{13}^{(2)} = 2\pi \frac{\varphi(g)}{g^2} \sum_{1 \leq k_2 \leq k_1 \leq X}^* \frac{b_{k_1} b_{k_2} k_1^{2\delta}}{k_2} F$$

$$+ O\left(g^{\frac{1}{2}} \tau X L^2 + \frac{g^{\frac{1}{2}} U X L}{\tau} + g^{\frac{3}{2}} X^2\right)$$

また、

$$F = \frac{1}{8\pi} \tau g U \left(-\frac{A_2 L}{\delta A_1^{1+2\delta}} + \frac{2}{\delta A_1} \log \tau \frac{k_2}{k_1} + \frac{1}{\delta^2 A_1} - \frac{A_2^{2\delta}}{\delta^2 A_1^{1+2\delta}} \right)$$

$$+ O\left(\frac{UL}{T}\right)$$

となる。 $A_M = A_1$, $k_M = k_1$ に注意すれば.

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} I_{13}^{(2)} &= \frac{1}{4} \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \tau^{2\delta} U \left(-\frac{L}{\delta} P_0(1, 1-2\delta) - \frac{1}{\delta^2} P_0(1, 1-2\delta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta^2} P_0(1-2\delta, 1) + \frac{2}{\delta} P_1(1-2\delta, 1) \right) \\ &\quad + O\left(\delta^{\frac{1}{2}} \tau X L^2 + \frac{\delta^{\frac{1}{2}} U X L^2}{\tau} + \delta^{\frac{3}{2}} X^2\right) \end{aligned}$$

となる。(7.1), (7.8), (7.9) とこの式により I_{13} の計算が終わる。 I_{23} も同様に計算できる。

Proposition 7.1

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} I_{13} &= I_{13} + I_{31} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \tau^{2\delta} U \left(-\frac{1}{\delta} P_0(1, 1-2\delta) - \frac{1}{\delta^2 L} P_0(1, 1-2\delta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta^2 L} P_0(1-2\delta, 1) + \frac{2}{\delta L} P_1(1-2\delta, 1) \right) \\ &\quad + O\left(\delta^{\frac{1}{2}} X \tau L^3 + \delta^{\frac{1}{2}} \frac{U L^3}{T} + \frac{\delta^{\frac{1}{2}} U X L^2}{\tau} + \delta^{\frac{3}{2}} X^2\right) \end{aligned}$$

$$2 \operatorname{Re} I_{23} = I_{23} + I_{32}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \frac{g(\delta)}{\delta} \tau U \left(-\frac{1}{\delta^3 L^2} (p_0(1-2\delta, 1) - p_0(1, 1-2\delta)) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2\delta^2 L} (p_0(1-2\delta, 1) + p_0(1, 1-2\delta)) \\
&\quad - \frac{1}{\delta^2 L^2} (p_1(1-2\delta, 1) + p_1(1, 1-2\delta)) \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta L} (p_1(1-2\delta, 1) - p_1(1, 1-2\delta)) \right) \\
&\quad + O\left(\delta^{\frac{1}{2}} \tau L^3 + \delta^{\frac{1}{2}} \frac{U^2}{T} L^3 + \frac{\delta^{\frac{1}{2}} U \tau L^2}{\tau} + \delta^{\frac{3}{2}} X^2\right)
\end{aligned}$$

§ 8. I の和の値

Prop 6.1 と 7.1 により、すべての主要項は、形の上では、
 [7] のときと $\frac{g(\delta)}{\delta}$ だけ違うことがわかる。したがって、
 ζ -関数のときと同様にすべての p の項は消える。やえに、

$$\begin{aligned}
&\int_T^{T+U} |\Psi_H(\frac{1}{2} - \delta + it, \chi)|^2 dt \\
&= \frac{g(\delta)}{\delta} U \left\{ s_0 \left[-\left(\frac{1}{2\delta} - \frac{\delta}{g(\delta)} c_1^* \right) - \frac{1}{L^2} \left(\frac{2}{(2\delta)^3} - \frac{\delta}{g(\delta)} c_3^* \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{L} \left(\frac{2}{(2\delta)^2} + \frac{2\delta}{g(\delta)} c_2^* \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + s_1 \left[\frac{1}{L^2} \left(\frac{2}{(2\delta)^2} + \frac{2\delta}{g(\delta)} c_2^* \right) - \frac{2}{L} \left(-\frac{1}{2\delta} + \frac{\delta}{g(\delta)} c_1^* \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + S_2 \left[-\frac{1}{L^2} \left(\frac{1}{2\delta} - \frac{\delta}{\varphi(\delta)} C_1^* \right) \right] + S_0' \frac{\tau^{4\delta}}{L^2} \left(\frac{2}{(2\delta)^3} + \frac{\delta}{\varphi(\delta)} C_5^* \right) \\
& + S_1' \frac{\tau^{4\delta}}{L^2} \left(\frac{2}{(2\delta)^2} + \frac{2\delta}{\varphi(\delta)} C_5^* \right) + S_2' \frac{\tau^{4\delta}}{L^2} \left(\frac{1}{2\delta} + \frac{\delta}{\varphi(\delta)} C_4^* \right) \\
& + O \left(\delta^{\frac{1}{2}} X \tau L^3 + \delta^{\frac{1}{2}} U^2 L^3 / T + \varphi(\delta) U X L^2 / \tau + \delta^{\frac{3}{2}} X^2 \right)
\end{aligned}$$

§9. S の計算

はじめに、次の関数を定義しておく。

$$F(n, w) = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^w} \right)$$

$$F_1(n, w) = \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p^w} \right)$$

$$f_0(c, d) = \sum_{1 \leq n \leq X/d}^* \frac{b_n d_n}{n^{1-c\delta}}$$

$$f_1(c, d) = \sum_{1 \leq n \leq X/d}^* \frac{b_n d_n \log \frac{X}{dn}}{n^{1-c\delta}}$$

すると同様の方法で、次の Lemma を示せる。

Lemma 9.1

$$S_0 = \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{F(d, 1-2\delta)}{d^{1-2\delta}} f_0^2(2, d)$$

$$S_1 = \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{F(d, 1-2\delta)}{d^{1-2\delta}} f_0(2, d) \left(\log \frac{X}{d} f_0(2, d) - f_1(2, d) \right)$$

$$- \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{F(d, 1-2\delta)}{d^{1-2\delta}} \left(\sum_{p|d} \frac{\log p}{p^{1-2\delta} - 1} \right) f_0^2(2, d)$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{F(d, 1-2\delta)}{d^{1-2\delta}} \left(\log \frac{X}{d} f_0(2, d) - f_1(2, d) \right)^2$$

$$- 2 \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{F(d, 1-2\delta)}{d^{1-2\delta}} \left(\sum_{p|d} \frac{\log p}{p^{1-2\delta} - 1} \right)$$

$$\times \left(\log \frac{X}{d} f_0(2, d) - f_1(2, d) \right) f_0(2, d)$$

$$+ \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{1}{d^{1-2\delta}} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial w^2}(d, 1-2\delta) f_0^2(2, d)$$

$$S'_0 = \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{F(d, 1+2\delta)}{d^{1-2\delta}} f_0^2(0, d)$$

$$S'_1 = \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{F(d, 1+2\delta)}{d^{1-2\delta}} f_0(0, d) \left(\log \frac{X}{d} f_0(0, d) - f_1(0, d) \right)$$

$$- \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{F(d, 1+2\delta)}{d^{1-2\delta}} \left(\sum_{p|d} \frac{\log p}{p^{1+2\delta} - 1} \right) f_0^2(0, d)$$

$$S'_2 = \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{F(d, 1+2\delta)}{d^{1-2\delta}} \left(\log \frac{X}{d} f_0(0, d) - f_1(0, d) \right)^2$$

$$-2 \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{F(d, 1+2\delta)}{d^{1-2\delta}} \left(\sum_{p|d} \frac{\log p}{p^{1+2\delta}-1} \right) \\ \times \left(\log \frac{X}{d} f_0(o, d) - f_1(o, d) \right) f_0(o, d)$$

$$+ \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{1}{d^{1-2\delta}} \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}(d, 1+2\delta) f_0^2(o, d)$$

さて、これから f_0 と f_1 の計算をしなくてはならないので、 b_n の形を決めておかねばならない。ここでは、Levinson と同様に、

$$b_n = \frac{\mu(n)}{n^\delta} \frac{\log \frac{X}{n}}{\log X}$$

とおく。すると、 $l=0, 1$ に対して

$$f_l(c, d) = \frac{\mu(d)}{d^\delta} \frac{1}{\log X} \sum_{\substack{1 \leq n \leq X/d \\ (n, d)=1}} \frac{\mu(n) \log^{l+1} \frac{X}{nd}}{n^{1-(c-1)\delta}}$$

となる。そこで

$$f^*(Y, l) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq Y \\ (n, d)=1}} \frac{\mu(n) \log^l \frac{Y}{n}}{n^{1-c\delta}}$$

を計算すればよい。

Lemma 9.2

$c = \pm 1$, $\log Y \ll L$ に対して、ある定数 C_1 が存在し、

$$f^*(Y, 1) = \frac{1 - c\delta \log Y}{F(dq, 1 - c\delta)} + O\left(\frac{\log^2 L}{L} + Y^{\sigma_0 - 1} \log^{c_1} L\right)$$

$$f^*(Y, 2) = \frac{2 \log Y - c\delta \log^2 Y}{F(dq, 1 - c\delta)} + O(\log^3 L + Y^{\sigma_0 - 1} \log^{c_1} L)$$

となる。ここに、 σ_0 は、

$$\sigma \geq 1 - 2(1 - \sigma_0) \quad , \quad |t| \leq L^2$$

で、 $\zeta(s)$ が零点をもたないようなものとする。これらの評価は q や L に依らない。

(注意)

σ_0 は c を定数として、

$$\sigma_0 = 1 - \frac{c}{\log L}$$

ととれる。Levinson [7] では、 $f^*(Y, l)$ の剰余項は、

$$O\left(\frac{\log^2 L}{L} + F_1(dq, \sigma_0) Y^{\sigma_0 - 1}\right)$$

の形としている。しにがって、これから上の剰余項が導びかれればよい。実際、 $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ に対し、

$$\log F_1(n, 1 - \alpha) \leq \sum_{p|n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} + O(1)$$

$$\leq \sum_{p \leq (\log n)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \frac{1}{p^{1-\alpha}} + O\left(\frac{\omega(n)}{\log n} + 1\right)$$

$$\leq (\log n)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \log \log \log n + O(1)$$

したがって $1-\alpha = \sigma_0$ に対しては.

$$F_1(dq, \sigma_0) \ll (\log L)^{c_1}$$

となる。

さて、この Lemma から容易に次の Lemma を得る。

Lemma 9.3

ある定数 C_2 が存在して

$$S_0 = \frac{1}{\log^2 X} \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1-2\delta)}{F^2(dq, 1-\delta)} \left(1 - \delta \log \frac{X}{d}\right)^2 + O\left(\frac{\log^{C_2} L}{L^2}\right)$$

$$S_1 = \frac{1}{\log^2 X} \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1-2\delta)}{F^2(dq, 1-\delta)} \left(\delta \log^2 \frac{X}{d} - \log \frac{X}{d}\right) + O\left(\frac{\log^{C_2} L}{L}\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{\log^2 X} \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1-2\delta)}{F^2(dq, 1-\delta)} \log^2 \frac{X}{d} + O(\log^{C_2} L)$$

$$S'_0 = \frac{1}{\log^2 X} \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1+2\delta)}{F^2(dq, 1+\delta)} \left(1 + \delta \log \frac{X}{d}\right)^2 + O\left(\frac{\log^{C_2} L}{L^2}\right)$$

$$S'_1 = \frac{-1}{\log^2 X} \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1+2\delta)}{F^2(dq, 1+\delta)} \left(\delta \log^2 \frac{X}{d} + \log \frac{X}{d}\right) + O\left(\frac{\log^{C_2} L}{L}\right)$$

$$S'_2 = \frac{1}{\log^2 X} \sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1+2\delta)}{F^2(dq, 1+\delta)} \log^2 \frac{X}{d} + O(\log^{C_2} L)$$

上の Lemma において、主要項はすべて

$$\sum_{1 \leq d \leq X}^* \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1+2cd)}{F^2(dq, 1+cd)} \log^l \frac{X}{d} \quad (l=0, 1, 2, c=\pm 1)$$

の形の一次結合になっている。ここでは、Levinson [17] の

Lemma 3.11 - 3.13 は直接用いることはできない。

それゆえ、Lemma 9.2 と同様の方法により評価する。

Lemma 9.4

$$\sum_{1 \leq d \leq Y}^* \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1+2cd)}{F^2(dq, 1+cd)} \log^l \frac{Y}{d} = \frac{1}{l+1} \frac{\log^{l+1} Y}{F(q, 1)} + O(L^l \log^4 L)$$

が成立する。ただし、 $l=0, 1, 2$, $c=\pm 1$, $X \leq Y \leq 2X$ とする。

Lemma 9.3, 9.4 により、

Proposition 9.5

C_3 をある定数としたとき、

$$S_0 = \frac{1}{F(q, 1)} \left(\frac{1}{\log X} - \delta + \frac{\delta^2 \log X}{3} \right) + O\left(\frac{\log^{C_3} L}{L^2}\right)$$

$$S_1 = \frac{1}{F(q, 1)} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\delta \log X}{3} \right) + O\left(\frac{\log^{C_3} L}{L}\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{F(q, 1)} \frac{\log X}{3} + O(\log^{C_3} L)$$

$$S'_0 = \frac{1}{F(\delta, 1)} \left(\frac{1}{\log X} + \delta + \frac{\delta^2 \log X}{3} \right) + O\left(\frac{\log^{c_3} L}{L^2}\right)$$

$$S'_1 = \frac{1}{F(\delta, 1)} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\delta \log X}{3} \right) + O\left(\frac{\log^{c_3} L}{L}\right)$$

$$S'_2 = \frac{1}{F(\delta, 1)} \frac{\log X}{3} + O(\log^{c_3} L)$$

が成立する。

§10. Main Theorem の証明

$$F(\delta, 1) = \frac{g(\delta)}{\delta}$$

よって、(8.1) と Proposition 9.5 より、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{U} \int_T^{T+U} |\psi_H(\tfrac{1}{2} - \delta + it, X)|^2 dt \\ &= \frac{L}{\log X} \left(-\frac{1}{2R} - \frac{1}{2R^2} - \frac{1}{4R^3} \right) + \frac{1}{2} \\ &+ \frac{\log X}{3L} \left(\frac{1}{2} - \frac{R}{2} - \frac{1}{4R} \right) + e^{2R} \left(\frac{L}{\log X} \frac{1}{4R^3} + \frac{\log X}{3L} \frac{1}{4R} \right) \\ &+ O\left(\frac{\log^{c_4} L}{L} + \delta^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} L^3 / U + \delta^{\frac{1}{2}} U L^3 / T + \delta X L^2 / T + \delta^{\frac{3}{2}} X^2 \right) \end{aligned}$$

(10.1)

が得られる。

ただし、 $R = \delta L$ とおいた。

こゝで

$$U = \frac{T}{g L^4}$$

$$X = \frac{\tau}{g^{\frac{5}{2}} L^8}$$

とおくと、上の剰余項は、 $O(\log^4 L / L)$ となる。

さらに、 $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\log g \leq (\log T)^{1-\varepsilon}$$

と仮定すると、

$$\frac{\log X}{L} = \frac{1}{2} + O_{\varepsilon}(L^{-\varepsilon})$$

であるから、(10.1) の主要項は、

$$F(R) + O(L^{-\varepsilon})$$

の形となる。こゝに

$$F(R) = e^{2R} \left(\frac{1}{2R^3} + \frac{1}{24R} \right) - \frac{1}{2R^3} - \frac{1}{R^2} - \frac{25}{24R} + \frac{7}{12} - \frac{R}{12}$$

である。したがって、

$$\int_T^{T+U} |\psi_H(\frac{1}{2} - \delta + it, \chi)|^2 dt = UF(R) + O(UL^{-\varepsilon}) \quad (10.2)$$

したがって、(3.5)、(3.8) により、

$$N_G(\mathcal{D}) \leq \frac{UL}{2\pi} \frac{\log F(R)}{R} + O(UL^{1-\varepsilon})$$

となり、Levinson の場合と同様に、 $R = 1.3$ とおくと、

$$\frac{\log F(R)}{R} < \frac{1}{3}$$

となる。これより Main Theorem の証明は終わる。

ABSTRACT

In this note, we extend the result of Levinson [7] to Dirichlet L-functions. Most of proof is similar but we intend to get the result uniformly on q (modulus of χ), so some lemmas cannot be used. The proof of fundamental properties on $L(s, \chi)$, which are analogue to an essential idea of Levinson, and announcement appear in Hilano [8].

REFERENCES

- [1] P.X.Gallagher A large sieve density estimate near $\sigma = 1$, Invent. Math. 11 (1970) 329-339
- [2] A.F.Lavrik A functional equation for Dirichlet L-series and the problem of divisors in arithmetic progressions, A.M.S. Transl.(2) 82(1969) 47-65
- [3] A.F.Lavrik An approximate functional equation for the Dirichlet L-function, Trans. Moscow Math. Soc. 18(1968) 101-115
- [4] Y.Motohashi On an approximate functional equation of Dirichlet L-function, Kokyuroku of Research Institute, Kyoto Univ. No.193(1973)
- [5] K.Prachar Primzahlverteilung, Springer (1957)
- [6] Titchmarsh The theory of the Riemann zeta-function, Oxford(1951)
- [7] N.Levinson More than one-third of zeros of Riemann zeta-function are on line $\sigma=1/2$, Advanced in Math. 13(1974) 383-436

- [8] T.Hilano On the distribution of zeros of Dirichlet's L-function
on the line $\sigma = 1/2$, Proc. Japan Acad. 52(1976) 537-540