

The modularity of Siegel's zeta functions

千葉工業大学 数学教室 杉山 和成

Kazunari Sugiyama*

Department of Mathematics, Chiba Institute of Technology

1 歴史と動機

研究の動機を述べるために、少し歴史をふりかえる。

(1.1) Riemann は 1859 年の記念碑的な論文 [10] において、 $\Re(s) > 1$ に対して定義される Dirichlet 級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

が $\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続され、関数等式

$$\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \xi(1-s)$$

をみたすことを証明した。

(1.2) P をサイズ m の正定値対称行列とする。1903 年の論文 [1] で、Epstein はゼータ関数

$$\zeta_P(s) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \frac{1}{P[a]^s} \quad (P[a] = {}^t a P a)$$

(もともとは領域 $\Re(s) > m/2$ で定義される) が、 $\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続され、 $\xi_P(s) = \pi^{-s} \Gamma(s) \zeta_P(s)$ とおくと、関数等式

$$\xi_{P^{-1}}\left(\frac{m}{2} - s\right) = (\det P)^{1/2} \xi_P(s)$$

が成り立つことを証明した*¹。

* email: skazu@sky.it-chiba.ac.jp

*¹ 実は、1880 年代の終わりには Hurwitz が $\zeta_P(s)$ の関数等式を発見していた。Hurwitz の数学日記の中に投稿のために準備したと思われるノートが残っている。[9] を参照。

(1.3) 1921 年に, Hamburger [2] は次の定理を証明した.

$h(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ および $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ が $\Re(s) > 1$ において絶対収束するとし, $(s-1)h(s)$ と $(s-1)g(s)$ がともに位数有限の整関数であるとする. さらに, 関数等式

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) h(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) g(1-s)$$

が成り立つと仮定する. このとき, $h(s) = g(s) = a_1 \zeta(s)$ となる*2.

(1.4) 1936 年の論文 [3] で, Hecke は Hamburger の結果を次のように一般化した.

$\lambda > 0, k > 0, C = \pm 1$ とする. 複素上半平面 $\mathcal{H}$ 上の正則関数 $f(z)$ で, 3 条件

- $f(z + \lambda) = f(z)$,
- $f(-\frac{1}{z}) = C(\frac{z}{i})^k f(z)$, and
- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}}$.

をみたすもの全体がなす空間を $M(\lambda, k, C)$ とかく. 多項式増大度の複素数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が与えられたとき,

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \Phi(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) \phi(s).$$

とおく. このとき, Hecke は次の 2 条件 (A) と (B) が同値であることを証明した.

(A) $\Phi(s) + \frac{a_0}{s} + \frac{C a_0}{k-s}$ は整関数であり, 任意の垂直領域上で位数有限であり, 関数等式 $\Phi(s) = C \Phi(k-s)$ をみたす.

(B) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}} \in M(\lambda, k, C)$.

Hecke の仕事により, 関数等式をみたす Dirichlet 級数と保型形式の間の対応について研究されるようになった.

(1.5) Epstein ゼータ関数と保型形式の関係を述べる. サイズ m の正定値対称行列 P および $z \in \mathcal{H}$ に対して, テータ級数を

$$\theta_P(z) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \exp(\pi i P[a] \cdot z)$$

のように定義する. このとき,

$$\xi_P(s) = \int_1^{\infty} (\theta_P(iy) - 1) y^s \frac{dy}{y} - \frac{1}{s} + (\det P)^{-1/2} \left\{ \int_1^{\infty} (\theta_{P^{-1}}(iy) - 1) y^{\frac{m}{2}-s} \frac{dy}{y} - \frac{1}{\frac{m}{2}-s} \right\}$$

*2 Hamburger は実際にはもっと一般的な定理を証明している.

が成り立ち、この表示式から $\xi_P(s)$ の関数等式が導かれる。

ここで、簡単のため、 P が even integral でかつ $\det P = 1$ であると仮定する。このとき、 m は 8 の倍数になり、

$$\theta_P\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{m/2}\theta_P(z), \quad \theta_P(z+1) = \theta_P(z)$$

が成り立つ。すなわち、 $\theta_P(z)$ は重さ $m/2$ の正則保型形式になる。さらに、 P による表現の数 (representation number) を

$$r_P(2l) = \sharp\{a \in \mathbb{Z}^m; P[a] = 2l\}$$

と定義すると、 $\theta_P(z)$ は

$$\theta_P(z) = \sum_{l=0}^{\infty} r_P(2l) \exp(2\pi i l z)$$

と Fourier 展開される。 $r_P(2l)$ の性質を調べるのに、 $\theta_P(z)$ の保型性が用いられる。

(1.6) Siegel は不定値 2 次形式に付随するゼータ関数を定義した。 Y を m 次非退化半整数対称行列として、 $V_{\pm} = \{v \in \mathbb{R}^m; \operatorname{sgn} Y[v] = \pm\}$ とおくとき、Siegel のゼータ関数は

$$\zeta_{\pm}(s) = \sum_{v \in SO(Y)_{\mathbb{Z}} \backslash (\mathbb{Z}^m \cap V_{\pm})} \frac{\mu(v)}{|Y[v]|^s}$$

のように与えられる。ここで、 $\mu(v)$ は $SO(Y)_{v, \mathbb{R}}/SO(Y)_{v, \mathbb{Z}}$ の (ある不変測度に関する) 体積である。Siegel は 1938 年の論文 [14] において、 Y の符号が $(1, m-1)$ の場合に $\zeta_{\pm}(s)$ の解析接続・関数等式を証明し、1939 年の論文 [15] において、一般の符号の場合に証明した。Siegel は $\zeta_{\pm}(s)$ の modularity について、論文 [14] の終わりに次のようなコメントを残している。

*Will man die Transformationstheorie von $f(\mathfrak{S}, x)$ für beliebige Modulsstitutionen entwickeln, so hat man außer $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ auch analog gebildete Zetafunktionen mit Restklassen-Chrakteren zu untersuchen. Die zum Beweise der Sätze 1,2,3 führenden Überlegungen lassen sich ohne wesentliche Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall übertragen. Vermöge der Mellinschen Transformation erhält man dann das wichtige Resultat, daß die durch (53) definierte Funktion $f(\mathfrak{S}, x)$ eine Modulform der Dimension $\frac{n}{2}$ und der Stufe $2D$ ist; dabei wird vorausgesetzt, daß n ungerade und $\mathfrak{r}'\mathfrak{S}\mathfrak{r}$ keine ternäre Nullform ist.*³*

*³ もし、任意のモジュラー変換に対する $f(\mathfrak{S}, x)$ の変換理論を展開したいのであれば、 $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ だけでな

注目すべきは、Siegel は 1938 の時点で、指標で捻ったゼータ関数を考えることにより合同部分群に対する保型形式に到達するであろうということ——正則な場合には、今では Weil の逆定理 [22] と呼ばれている事実——を予見していた、ということである。Siegel はその後、1951 の論文 [17] において、

$$M(Y; \pm n) = \sum_{\substack{v \in SO(Y)_{\mathbb{Z}} \backslash (\mathbb{Z}^m \cap V_{\pm}) \\ Y[v] = \pm n}} \mu(v) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(Siegel はこれを表現の体積 (*Darstellungsmaß*) と名づけた) が、局所密度の積として表されるという所謂 Siegel の主定理を証明している*4。また、その証明の過程において、不定値 2 次形式のテータ級数がある基本領域上で積分したものを Fourier 展開した係数の中に $M(Y; \pm n)$ が現れることを示している。厳密にいうと、[14, 15, 17] では測度の定義にズレがあるので全く明らかな話というわけではないが、いずれにせよ、Siegel 自身は論文 [17] の結果をもって、Siegel ゼータ関数の保型性は証明された、と考えていただろうと思われる。

(1.7) 上の引用の中で、Siegel は 2 次形式の変数の個数 n の parity について述べていたことに注意しよう。[14] の設定では、 n が奇数だと Y の負の固有値の個数が偶数個になり、実は Siegel ゼータ関数 (の片方) は正則保型形式に対応する。1949 年の論文 [6] において、Maaß は非正則保型形式 (**Maass 形式**) の概念を導入し、Maass 形式に関する逆定理を証明した。さらに、[7] において、その逆定理の応用として、Maaß は非常に特別な場合 (Y が対角行列で $\det Y = 1$ のとき) に、Siegel ゼータ関数が Riemann ゼータ関数や Dirichlet L -関数 $L(s, \chi)$ などの標準的なゼータ関数の 2 つの積として表されることを証明した。Maaß のこれらの例もすべて正則保型形式である。一方で、Maass 形式に対する Weil 型の逆定理についての論文 ([8] など) が出版されたのはごく最近の事である。Siegel ゼータ関数の重要性を鑑みると、非正則な場合を含めて、「逆定理を用いて保型性を証明する」という Siegel の元々の計画を完遂する、という事には一定の意味があると筆者は考える。これが本研究の動機である。

(1.8) 伊吹山知義氏 [4] は、 m が偶数の場合、一般に、Siegel ゼータ関数がシフトされた 2 つの Dirichlet L -関数の積の $\mathbb{Q}$ -線形結合として表されることを示した。その証明には

く、剰余類の指標を用いて同様に定義されるゼータ関数をも調べなければいけない。定理 1, 2, 3 の証明へと導く考察は、大きな困難を伴わずに、一般の場合へと移行される。このとき、Mellin 変換により、 n が奇数でかつ $\mathfrak{r}'\mathfrak{S}_{\mathfrak{r}}$ が 3 元零形式でなければ、(53) により定義される関数 $f(\mathfrak{S}, x)$ がウェイト $\frac{n}{2}$ 、レベル $2D$ のモジュラー形式である、という重要な結論を得る。

*4 Siegel の 2 次形式論については、上野 [21] に解説がある。

Siegel の主定理を用いており、逆定理は使っていない．これは上述の Maaß [7] の結果を含むきわめて一般的な明示公式である．一方、逆定理の方法は、リフティングの構成に用いられる場合がある．[19] では、係数に Maass カスプ形式の周期を含むような、ある概均質ゼータ関数に対して逆定理を適用して、Shintani-Katok-Sarnak 対応を証明した．

2 Maass 形式

Maass 形式の定義を述べよう． $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ をモジュラー群とし、正整数 N に対して $\Gamma_0(N)$ をレベル N の合同部分群とする． Γ は $\mathcal{H}$ に一次分数変換で作用する． $j(\gamma, z) = cz + d$ とおき、 $\theta(z)$ および $J(\gamma, z)$ を

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i n^2 z), \quad J(\gamma, z) = \frac{\theta(\gamma z)}{\theta(z)}$$

により定義する．良く知られているように、

$$J(\gamma, z) = \varepsilon_d^{-1} \cdot \left(\frac{c}{d}\right) \cdot (cz + d)^{1/2} \quad \text{for } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$$

となる．ここで、

$$\varepsilon_d = \begin{cases} 1 & (d \equiv 1 \pmod{4}), \\ i & (d \equiv 3 \pmod{4}) \end{cases}$$

である． ℓ を整数とする． $\mathcal{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; y > 0\}$ 上の双曲型ラプラシアン $\Delta_{\ell/2}$ を

$$\Delta_{\ell/2} = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{i\ell y}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

と定義する． χ を法 N の Dirichlet 指標とする．同じ記号 χ で

$$\chi(\gamma) = \chi(d) \quad \text{for } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

により定義される $\Gamma_0(N)$ の指標を表す．

定義 1. $\ell \in \mathbb{Z}$ とし、 N を正整数とする．ただし、 ℓ が奇数のときは、 $4|N$ とする． $\mathcal{H}$ 上の C^∞ -関数 $F(z)$ は、次の 3 条件をみたすとき、重さ $\ell/2$ 、固有値 Λ 、指標 χ をもつ $\Gamma_0(N)$ に対する Maass 形式であるといわれる：

(i) 任意の $\gamma \in \Gamma_0(N)$ に対して

$$F(\gamma z) = \begin{cases} \chi(\gamma) j(\gamma, z)^{\ell/2} \cdot F(z) & (\ell \text{ が偶数のとき}) \\ \chi(\gamma) J(\gamma, z)^\ell \cdot F(z) & (\ell \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

をみたく。

(ii) ある $\Lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $\Delta_{\ell/2} F = \Lambda \cdot F$ となる。

(iii) F は任意のカスプにおいて緩増加である。

[8] において証明された Weil 型の逆定理を紹介する。条件を正確に述べると長くなってしまうので, 詳細は [8] を参照していただくことにして, ここでは概略のみ述べる。

λ を $\lambda \notin 1 - \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ をみたく複素数とする。 $\alpha = \{\alpha(n)\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ および $\beta = \{\beta(n)\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ を多項式増大の複素数列とする。 α, β に対して, L -関数 $\xi_{\pm}(\alpha; s), \xi_{\pm}(\beta; s)$ および完備化された L -関数 $\Xi_{\pm}(\alpha; s), \Xi_{\pm}(\beta; s)$ を

$$\begin{aligned} \xi_{\pm}(\alpha; s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\pm n)}{n^s}, & \Xi_{\pm}(\alpha; s) &= (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \xi_{\pm}(\alpha; s), \\ \xi_{\pm}(\beta; s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(\pm n)}{n^s}, & \Xi_{\pm}(\beta; s) &= (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \xi_{\pm}(\beta; s). \end{aligned}$$

により定義する。このとき, 次のような仮定をおく。

- $\xi_{\pm}(\alpha; s), \xi_{\pm}(\beta; s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続され, $(s-1)(s-2+2\lambda)\xi_{\pm}(\alpha; s)$ および $(s-1)(s-2+2\lambda)\xi_{\pm}(\beta; s)$ は整関数で, 任意の垂直領域で位数有限である。
- $\gamma(s)$ および $\Sigma(\ell)$ を

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} e^{\pi si/2} & e^{-\pi si/2} \\ e^{-\pi si/2} & e^{\pi si/2} \end{pmatrix}, \quad \Sigma(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & i^{\ell} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のように定義するとき, 次の関数等式が成り立つ:

$$(\diamond) \quad \gamma(s) \begin{pmatrix} \Xi_{+}(\alpha; s) \\ \Xi_{-}(\alpha; s) \end{pmatrix} = N^{2-2\lambda-s} \cdot \Sigma(\ell) \cdot \gamma(2-2\lambda-s) \begin{pmatrix} \Xi_{+}(\beta; 2-2\lambda-s) \\ \Xi_{-}(\beta; 2-2\lambda-s) \end{pmatrix}.$$

- その他, $\xi_{\pm}(\alpha; s)$ や $\xi_{\pm}(\beta; s)$ の留数について条件を課す (詳細は略す)。

これらの条件の下で, $\alpha(0), \beta(0), \alpha(\infty), \beta(\infty)$ を

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= -\xi_e(\alpha; 0), & \alpha(\infty) &= \frac{N}{2} \operatorname{Res}_{s=1} \xi_e(\beta; s), \\ \beta(0) &= -\xi_e(\beta; 0), & \beta(\infty) &= \frac{i^{-\ell}}{2} \operatorname{Res}_{s=1} \xi_e(\alpha; s), \end{aligned}$$

とおく。ここで, $\xi_e(*; s) = \xi_{+}(*; s) + \xi_{-}(*; s)$. ($*$ = α or β) である。

次に, L -関数の捻り (twist) を定義する. ただし我々は, 指標による捻りではなく, 指標和 (**Gauss** 和) による捻りを考える. この方が, 重さが整数の場合と重さが半整数の場合を一様に扱えて, 都合が良いのである. r を $(N, r) = 1$ なる奇素数とし, ψ を法 r の Dirichlet 指標とする. 以下, 法 N の Dirichlet 指標 χ で, ℓ が偶数 (奇数) のとき, $\chi(-1) = i^\ell$ ($\chi(-1) = 1$) をみたすものを一つ固定する. このとき, 捻った L -関数 $\xi_\pm(\alpha, \psi; s), \Xi_\pm(\alpha, \psi; s)$ を

$$\xi_\pm(\alpha, \psi; s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\pm n) \tau_\psi(\pm n)}{n^s}, \quad \Xi_\pm(\alpha, \psi; s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \xi_\pm(\alpha, \psi; s)$$

により定義する. ここで, $\tau_\psi(n)$ は ψ に付随する指標和

$$\tau_\psi(n) = \sum_{\substack{m \bmod r \\ (m, r)=1}} \psi(m) e^{2\pi i m n / r}.$$

である. $\xi_\pm(\beta, \psi; s), \Xi_\pm(\beta, \psi; s)$ も同様に定義する. $\mathbb{P}_N$ を N を割らない奇素数の集合とする*5. $r \in \mathbb{P}_N$ に対して, X_r を法 r のすべての Dirichlet 指標 (単位指標 $\psi_{r,0}$ を含む) の集合とする*6. $\psi \in X_r$ に対して, Dirichlet 指標 ψ^* を

$$\psi^*(k) = \overline{\psi(k)} \left(\frac{k}{r} \right)^\ell.$$

により定義する. さらに,

$$C_{\ell, r} = \begin{cases} 1 & (\ell \text{ is even}), \\ \varepsilon_r^\ell & (\ell \text{ is odd}) \end{cases}$$

とおく. このとき, $\xi_\pm(\alpha, \psi; s)$ や $\xi_\pm(\beta, \psi^*; s)$ に対して,

$$\begin{aligned} \gamma(s) \begin{pmatrix} \Xi_+(\alpha, \psi; s) \\ \Xi_-(\alpha, \psi; s) \end{pmatrix} &= \chi(r) \cdot C_{\ell, r} \cdot \psi^*(-N) \cdot r^{2\lambda-2} \cdot (Nr^2)^{2-2\lambda-s} \\ &\quad \cdot \Sigma(\ell) \cdot \gamma(2-2\lambda-s) \begin{pmatrix} \Xi_+(\beta, \psi^*; 2-2\lambda-s) \\ \Xi_-(\beta, \psi^*; 2-2\lambda-s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*5 実際には, もっと小さい集合でよい.

*6 もともとの Weil の逆定理 [22] では, 原始的な指標に対してのみ捻りを定義していたが, 重さ半整数の場合を同時に扱うために非原始的指標も含めて考える. なお, 重さ半整数の場合の逆定理については, Shimura [13] 以外に文献がほとんど無く, [13] も概略のみで証明は書かれていない.

のような仮定をおく（詳細は略す）．さらに， $\mathcal{H}$ 上の関数 $F_\alpha(z)$ を

$$F_\alpha(z) = \alpha(\infty) \cdot y^{\lambda-\ell/4} + \alpha(0) \cdot i^{-\ell/2} \cdot \frac{(2\pi)^{1-2\lambda} \Gamma(2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+\frac{\ell}{4}) \Gamma(\lambda-\frac{\ell}{4})} \cdot y^{1-\lambda-\ell/4} \\ + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \alpha(n) \cdot \frac{i^{-\ell/2} \cdot \pi^\lambda \cdot |n|^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda+\frac{\text{sgn}(n)\ell}{4})} \cdot y^{-\ell/4} W_{\frac{\text{sgn}(n)\ell}{4}, \lambda-\frac{1}{2}}(4\pi|n|y) \cdot \mathbf{e}[nx]$$

と定義する．同様の方法で， β から $G_\beta(z)$ を定義する．

補題 1 (逆定理)． $F_\alpha(z)$ (resp. $G_\beta(z)$) は重さ $\ell/2$ ，固有値 $(\lambda-\ell/4)(1-\lambda-\ell/4)$ ，指標 χ (resp. $\chi_{N,\ell}$) をもつ $\Gamma_0(N)$ に対する Maass 形式になる．ここで，

$$\chi_{N,\ell}(d) = \overline{\chi(d)} \left(\frac{N}{d} \right)^\ell$$

である．さらに，

$$F_\alpha \left(-\frac{1}{Nz} \right) (\sqrt{N}z)^{-\ell/2} = G_\beta(z)$$

が成り立つ．

3 Siegel ゼータ関数とその解析的性質

Siegel ゼータ関数は，概均質ベクトル空間のゼータ関数の典型例である．ここでは，Kimura [5], M. Sato-Shintani [12] にしたがって，Siegel ゼータ関数の定義とその解析的性質について述べる． $m \geq 5$ と仮定する． Y をサイズ m の非退化半整数対称行列とし， p を正の固有値の個数とする． $SO(Y) = \{g \in SL_m(\mathbb{C}) \mid {}^t g Y g = Y\}$ とする． $G = GL_1(\mathbb{C}) \times SO(Y)$ の $V = \mathbb{C}^m$ の上への表現 ρ を

$$\rho(\tilde{g})v = \rho(t, g)v = tgv \quad (\tilde{g} = (t, g) \in G, v \in V)$$

とする． $P(v)$ を $P(v) = Y[v] = {}^t v Y v$ と定義される V 上の 2 次形式とする．このとき， $S = \{v \in V \mid P(v) = 0\}$ とすると， $V - S$ はひとつの $\rho(G)$ -軌道となる．すなわち， (G, ρ, V) は（正則）概均質ベクトル空間となる． V の双対空間 V^* を内積 $\langle v, v^* \rangle = {}^t v v^*$ により V 自身と同一視する．そのとき，双対三つ組 (G, ρ^*, V^*) は

$$\rho^*(\tilde{g})v^* = \rho^*(t, g)v^* = t^{-1} \cdot {}^t g^{-1} v^*$$

により与えられる. V^* 上の 2 次形式 $P^*(v^*)$ を $P^*(v^*) = \frac{1}{4}Y^{-1}[v^*] = \frac{1}{4} \cdot {}^t v^* Y^{-1} v^*$ に
より定義する. このとき, P^* の零点集合を S^* とすると, $V - S^*$ は単一の $\rho^*(G)$ -軌道
である. $\epsilon, \eta = \pm$ に対して

$$V_\epsilon = \{v \in V_{\mathbb{R}} \mid \operatorname{sgn} P(v) = \epsilon\}, \quad V_\eta^* = \{v^* \in V_{\mathbb{R}} \mid \operatorname{sgn} P^*(v^*) = \eta\}$$

とおく. $\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ を $V_{\mathbb{R}}$ 上の急減少関数の空間とする. $f, f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して

$$\Phi_\epsilon(f; s) = \int_{V_\epsilon} f(v) |P(v)|^{s-\frac{m}{2}} dv, \quad \Phi_\eta^*(f^*; s) = \int_{V_\eta^*} f^*(v^*) |P^*(v^*)|^{s-\frac{m}{2}} dv^*$$

とおく. また, $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ の Fourier 変換 $\widehat{f}(v^*)$ を

$$\widehat{f}(v^*) = \int_{V_{\mathbb{R}}} f(v) \mathbf{e}[\langle v, v^* \rangle] dv$$

により定義する. $D = \det(2Y)$ とおく. このとき, 次の等式が成り立つ.

補題 2 (局所関数等式).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi_+^*(\widehat{f}; s) \\ \Phi_-^*(\widehat{f}; s) \end{pmatrix} &= \Gamma\left(s+1-\frac{m}{2}\right) \Gamma(s) |D|^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-2s+\frac{m}{2}} \cdot \pi^{-2s+\frac{m}{2}-1} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \sin \pi \left(\frac{p}{2} - s\right) & \sin \frac{\pi p}{2} \\ \sin \frac{\pi(m-p)}{2} & \sin \pi \left(\frac{m-p}{2} - s\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_+(f; \frac{m}{2} - s) \\ \Phi_-(f; \frac{m}{2} - s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$GL_m(\mathbb{R})$ および $\operatorname{Sym}_m(\mathbb{R})$ 上の測度 $dx, d\lambda$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} dx &= |\det x|^{-m} \prod_{1 \leq i, j \leq m} dx_{ij}, \\ d\lambda &= |\det \lambda|^{-\frac{m+1}{2}} \prod_{1 \leq i \leq j \leq m} d\lambda_{ij} \end{aligned}$$

により定義し, Lie 群 $SO(Y)_{\mathbb{R}}$ 上の測度 $d^1 g$ を, 任意の $F(x) \in L^1(GL_m(\mathbb{R}))$ に対して

$$\int_{GL_m(\mathbb{R})} F(x) dx = \int_{SO(Y)_{\mathbb{R}} \backslash GL_m(\mathbb{R})} d\lambda({}^t \dot{x} Y \dot{x}) \int_{SO(Y)_{\mathbb{R}}} F(g \dot{x}) d^1 g$$

が成り立つように定義する. $v \in V - S$ における等方部分群を

$$SO(Y)_v = \{g \in SO(Y) \mid gv = v\}$$

とすると、これは簡約可能な群になる． $v \in V_\epsilon$ に対して、 $SO(Y)_{v,\mathbb{R}}$ 上の Haar 測度 $d\mu_v$ を、任意の $H(t, g) \in L^1(G_\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d^\times t \int_{SO(Y)_\mathbb{R}} H(t, g) d^1 g \\ &= \int_0^\infty \int_{SO(Y)_\mathbb{R}/SO(Y)_{v,\mathbb{R}}} |P(\rho(t, \dot{g})v)|^{-\frac{m}{2}} d(\rho(t, \dot{g})v) \int_{SO(Y)_{v,\mathbb{R}}} H(t, \dot{g}h) d\mu_v(h). \end{aligned}$$

が成り立つように正規化する． $v \in V_\mathbb{Q} - S_\mathbb{Q}$ に対して、

$$\mu(v) = \int_{SO(Y)_{v,\mathbb{R}}/SO_{v,\mathbb{Z}}} d\mu_v(h)$$

とおく． $m \geq 5$ という仮定より、 $SO(Y)_v$ は半単純代数群になるので、 $\mu(v) < +\infty$ となる．

我々は、指標（和）で捻った Siegel ゼータ関数も扱わなければならないが、 $\mathbb{Q}$ 上の Schwartz-Bruhat 関数を導入すると計算が見通しやすくなる．（F. Sato [11] を参照．）

$\phi : V_\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ が Schwartz-Bruhat 関数であるとは、次の 2 条件を満たすことである．

- (1) ある正整数 M があり、 $v \notin \frac{1}{M}V_\mathbb{Z}$ のときは $\phi(v) = 0$,
- (2) ある正整数 N があり、 $v, w \in V_\mathbb{Q}$ が $v - w \in NV_\mathbb{Z}$ をみたすとき、 $\phi(v) = \phi(w)$.

$V_\mathbb{Q}$ 上の Schwartz-Bruhat 関数の全体を $\mathcal{S}(V_\mathbb{Q})$ とかく．さらに、 $\phi \in \mathcal{S}(V_\mathbb{Q})$ の Fourier 変換 $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(V_\mathbb{Q})$ を

$$\widehat{\phi}(v^*) = \frac{1}{[V_\mathbb{Z} : rV_\mathbb{Z}]} \sum_{v \in V_\mathbb{Q}/rV_\mathbb{Z}} \phi(v) \mathbf{e}[-\langle v, v^* \rangle],$$

と定義する．ここで、正整数 r は、値 $\phi(v) \mathbf{e}[-\langle v, v^* \rangle]$ が剰余類 $v \bmod rV_\mathbb{Z}$ のみに依存するように十分大きくとる．（このとき、 $\widehat{\phi}(v^*)$ は r の取り方に依らない．）

補題 3 (Poisson の和公式)． $\phi \in \mathcal{S}(V_\mathbb{Q})$ および $f \in \mathcal{S}(V_\mathbb{R})$ に対して、

$$\sum_{v^* \in V_\mathbb{Q}} \widehat{\phi}(v^*) f(v^*) = \sum_{v \in V_\mathbb{Q}} \phi(v) f(v).$$

定義 2 (Siegel ゼータ関数)． $\epsilon, \eta = \pm$ および $\phi, \phi^* \in \mathcal{S}(V_\mathbb{Q})$ に対して、

$$\begin{aligned} \zeta_\epsilon(\phi; s) &= \sum_{v \in SO(Y)_\mathbb{Z} \setminus V_\epsilon \cap V_\mathbb{Q}} \frac{\phi(v) \mu(v)}{|P(v)|^s}, \\ \zeta_\eta^*(\phi^*; s) &= \sum_{v^* \in SO(Y)_\mathbb{Z} \setminus V_\eta^* \cap V_\mathbb{Q}} \frac{\phi^*(v^*) \mu^*(v^*)}{|P^*(v^*)|^s} \end{aligned}$$

と定義する. これらのゼータ関数は $\Re(s) > m/2$ に対して絶対収束する.

$\phi, \phi^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{Q}})$ および $f, f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して, ゼータ積分を次のように定義する.

$$Z(f, \phi; s) = \int_0^\infty t^{2s} d^\times t \int_{SO(Y)_{\mathbb{R}}/SO(Y)_{\mathbb{Z}}} \sum_{v \in V_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}}} \phi(v) f(\rho(t, g)v) d^1 g,$$

$$Z^*(f^*, \phi^*; s) = \int_0^\infty t^{-2s} d^\times t \int_{SO(Y)_{\mathbb{R}}/SO(Y)_{\mathbb{Z}}} \sum_{v^* \in V_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}}} \phi^*(v^*) f^*(\rho^*(t, g)v^*) d^1 g.$$

補題 4 (ゼータ関数の積分表示). $\phi, \phi^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{Q}})$ が $SO(Y)_{\mathbb{Z}}$ -不変であると仮定する. $\Re(s) > m/2$ に対して,

$$Z(f, \phi; s) = \sum_{\epsilon = \pm} \zeta_{\epsilon}(\phi; s) \Phi_{\epsilon}(f; s),$$

$$Z^*(f^*, \phi^*; s) = \sum_{\eta = \pm} \zeta_{\eta}^*(\phi^*; s) \Phi_{\eta}^*(f^*; s).$$

以下, $\phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{Q}})$ が $SO(Y)_{\mathbb{Z}}$ -不変であるとする.

定理 1. $\zeta_{\epsilon}(\phi; s)$ および $\zeta_{\eta}^*(\hat{\phi}; s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型に解析接続されて, ゼータ関数に $(s-1)(s-\frac{m}{2})$ を乗じた関数は, s の整関数であり, 任意の垂直領域で位数有限である.

補題 3 からゼータ積分の関数等式

$$Z^*\left(\hat{f}, \hat{\phi}; s\right) = Z\left(f, \phi; \frac{m}{2} - s\right)$$

が証明され, 補題 2 および補題 4 と合わせると, 次の関数等式が導かれる.

定理 2 (Siegel ゼータ関数の関数等式).

$$\begin{pmatrix} \zeta_+ \left(\phi; \frac{m}{2} - s \right) \\ \zeta_- \left(\phi; \frac{m}{2} - s \right) \end{pmatrix} = \Gamma \left(s + 1 - \frac{m}{2} \right) \Gamma(s) |D|^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-2s + \frac{m}{2}} \cdot \pi^{-2s + \frac{m}{2} - 1} \\ \times \begin{pmatrix} \sin \pi \left(\frac{p}{2} - s \right) & \sin \frac{\pi(m-p)}{2} \\ \sin \frac{\pi p}{2} & \sin \pi \left(\frac{m-p}{2} - s \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_+^*(\hat{\phi}; s) \\ \zeta_-^*(\hat{\phi}; s) \end{pmatrix}.$$

いま, ゼータ関数の定義を

$$\tilde{\zeta}_{\epsilon}(\phi; s) = |D|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{\pi i}{4}(2p-m)} \cdot \zeta_{\epsilon} \left(\phi; s + \frac{m}{2} - 1 \right),$$

$$\tilde{\zeta}_{\eta}^*(\hat{\phi}; s) = N^{-s} \cdot \zeta_{\eta}^* \left(\hat{\phi}; s + \frac{m}{2} - 1 \right)$$

のように少し修正すると, $\tilde{\zeta}_\epsilon(\phi; s), \tilde{\zeta}_\eta^*(\hat{\phi}; s)$ は次の関数等式をみたす.

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \gamma(s) & \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_+(\phi; s) \\ \tilde{\zeta}_-(\phi; s) \end{pmatrix} \\ &= N^{2-\frac{m}{2}-s} \cdot (2\pi)^{-(2-\frac{m}{2}-s)} \Gamma\left(2 - \frac{m}{2} - s\right) \\ & \quad \times \Sigma(2p-m) \gamma\left(2 - \frac{m}{2} - s\right) \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_+^*\left(\hat{\phi}; 2 - \frac{m}{2} - s\right) \\ \tilde{\zeta}_-^*\left(\hat{\phi}; 2 - \frac{m}{2} - s\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これは, 逆定理の仮定にある関数等式 ($\diamond$) の形に一致している.

4 主結果

$D = \det(2Y)$ として, N を $2Y$ のレベルとする^{*7}. 半整数対称行列 $\hat{Y}$ を

$$\hat{Y} = \frac{1}{4} N Y^{-1}$$

と定義する. V^* 上の 2 次形式 $\hat{P}(v^*)$ を

$$\hat{P}(v^*) = \hat{Y}[v^*]$$

と定義する. 体 K を

$$K = \begin{cases} \mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{m/2}D}) & (m \equiv 0 \pmod{2}) \\ \mathbb{Q}(\sqrt{2|D|}) & (m \equiv 1 \pmod{2}) \end{cases},$$

と定義し, χ_K を K に付随する Kronecker 指標とする. $(N, r) = 1$ をみたす奇素数 r および法 r の Dirichlet 指標 ψ に対して, $V_{\mathbb{Q}}$ 上の Schwartz-Bruhat 関数 $\phi_{\psi, P}(v)$ を

$$\phi_{\psi, P}(v) = \tau_{\psi}(P(v)) \cdot \text{ch}_{\mathbb{Z}^m}(v) \quad (\text{ch}_{\mathbb{Z}^m}(v) \text{ は特性関数})$$

と定義すると,

$$\zeta_{\epsilon}(\phi_{\psi, P}; s) = \sum_{v \in SO(Y)_{\mathbb{Z}} \backslash V_{\epsilon} \cap V_{\mathbb{Z}}} \frac{\tau_{\psi}(P(v)) \mu(v)}{|P(v)|^s}$$

となり, Siegel ゼータ関数の指標和での捻りが現れる.

^{*7} すなわち, $N(2Y)^{-1}$ が even integral となるような最小の正整数を N としている.

補題 5 (Stark [18]). $\widehat{\phi_{\psi,P}(v^*)}$ を $\phi_{\psi,P}$ の Fourier 変換とする. このとき, $\widehat{\phi_{\psi,P}(v^*)}$ の台は $r^{-1}\mathbb{Z}^m$ に含まれ, 任意の $v^* \in \mathbb{Z}^m$ に対して

$$\widehat{\phi_{\psi,P}(r^{-1}v^*)} = r^{-m/2} \chi_K(r) \cdot C_{2p-m,r} \cdot \psi^*(-N) \cdot \tau_{\psi^*}(\widehat{P}(v^*)),$$

が成り立つ. ここで, $\psi^*(k) = \overline{\psi(k)} \left(\frac{k}{r}\right)^m$ であり,

$$C_{2p-m,r} = \begin{cases} 1 & (m \equiv 0 \pmod{2}) \\ \varepsilon_r^{2p-m} & (m \equiv 1 \pmod{2}) \end{cases}$$

である.

定義 3 (Siegel). $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して,

$$M(P; n) = \sum_{\substack{v \in SO(Y)_{\mathbb{Z}} \setminus V_{\pm} \cap V_{\mathbb{Z}} \\ P(v)=n}} \mu(v),$$

$$M^*(\widehat{P}; n) = \sum_{\substack{v^* \in SO(Y)_{\mathbb{Z}} \setminus V_{\pm}^* \cap V_{\mathbb{Z}} \\ \widehat{P}(v^*)=n}} \mu^*(v^*)$$

とおく. $M(P; n)$, $M^*(\widehat{P}; n)$ を n の P , $\widehat{P}$ による表現の体積 (*Darstellungsmaß*) とよぶ.

$S_{1,\mathbb{R}} = \{v \in V_{\mathbb{R}} \mid P(v) = 0, v \neq 0\}$ とする. 詳細は略すが, 実は, $v \in S_{1,\mathbb{R}}$ に対しても $SO(Y)_{v,\mathbb{R}}/SO(Y)_{v,\mathbb{Z}}$ の体積 $\sigma(v)$ を定義することができる. 一般には, $SO(Y)_{\mathbb{Z}} \setminus S_{1,\mathbb{Z}}$ は有限集合ではないが,

$$\{v \in SO(Y)_{\mathbb{Z}} \setminus S_{1,\mathbb{Z}}; v \text{ は原始的}\}$$

は有限集合になる. $a_1, \dots, a_h$ をこの集合の完全代表系とする. ゼータ関数の留数に $\sigma(a_i)$ ($i = 1, \dots, h$) が現れる.

整数 ℓ を $\ell \equiv 2p - m \pmod{4}$ をみたすようにとる. $\mathcal{H}$ 上の C^∞ -関数 $F(z)$ を

$$F(z) = y^{(m-\ell)/4} \cdot \int_{SO(Y)_{\mathbb{R}}/SO(Y)_{\mathbb{Z}}} d^1 g$$

$$+ (-1)^{(2p-m-\ell)/4} \zeta(m-2) \cdot \sum_{i=1}^h \frac{\sigma(a_i)}{|D|^{\frac{1}{2}}} \times \frac{(2\pi)2^{1-\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}-1)}{\Gamma(\frac{m+\ell}{4}) \Gamma(\frac{m-\ell}{4})} \cdot y^{1-(m+\ell)/4}$$

$$+ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} (-1)^{(2p-m-\ell)/4} \cdot \frac{M(P; n)}{|D|^{\frac{1}{2}}} \frac{\pi^{\frac{m}{4}} \cdot |n|^{-\frac{m}{4}}}{\Gamma(\frac{m+\text{sgn}(n)\ell}{4})} y^{-\frac{\ell}{4}} W_{\frac{\text{sgn}(n)\ell}{4}, \frac{m}{4}-\frac{1}{2}}(4\pi|n|y) \mathbf{e}[nx]$$

のように定義する. $M^*(\hat{P}; n)$ から同様に $G(z)$ が定義される. このとき, 補題 1 (逆定理) を適用することにより, 次の定理が得られる.

定理 3. m または p の少なくとも一方が奇数であると仮定する. このとき, $F(z)$ は重さ $\ell/2$, 指標 χ_K , 固有値 $(m - \ell)(4 - m - \ell)/16$ をもつ, $\Gamma_0(N)$ に対する Maass 形式である. さらに,

$$F\left(-\frac{1}{Nz}\right)(\sqrt{N}z)^{-\ell/2} = G(z)$$

が成り立つ.

Y の符号 $(p, m - p)$ の条件次第で, Siegel ゼータ関数から正則保型形式が構成できることがある. いま, Y の負の固有値が偶数個, すなわち $m - p$ が偶数であると仮定しよう. すると, 定理 2 の関数等式の第 1 行は次の形になる.

$$\zeta_+\left(\phi; \frac{m}{2} - s\right) = \Gamma\left(s + 1 - \frac{m}{2}\right) \Gamma(s) |D|^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-2s + \frac{m}{2}} \cdot \pi^{-2s + \frac{m}{2} - 1} \sin \pi \left(\frac{p}{2} - s\right) \zeta_+^*(\hat{\phi}; s).$$

これは, $\zeta_+(\phi; s)$ と $\zeta_+^*(\phi; s)$ が Hecke の関数等式を満たすことを示唆している. (1.4) を参照せよ. また, p が偶数のときは, 第 2 行を考える.

$m - p$ が偶数であるとする. $\mathcal{H}$ 上の正則関数 $F(z)$ および $G(z)$ を

$$\begin{aligned} F(z) &= (-1)^{\frac{m-p}{2}} (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int_{SO(Y)_{\mathbb{R}}/SO(Y)_{\mathbb{Z}}} d^1g \\ &\quad + |D|^{-1/2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} M(P; n) \mathbf{e}[nz], \\ G(z) &= i^{-\frac{m}{2}} \cdot (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) N^{\frac{m}{4}} |D|^{-1/2} \int_{SO(Y)_{\mathbb{R}}/SO(Y)_{\mathbb{Z}}} d^1g \\ &\quad + (-1)^{\frac{m-2p}{4}} \cdot N^{\frac{m}{4}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} M^*(\hat{P}; n) \mathbf{e}[nz] \end{aligned}$$

と定義する. このとき,

定理 4. $F(z)$ および $G(z)$ は重さ $m/2$ をもつ $\Gamma_0(N)$ に対する正則保型形式であり,

$$F\left(-\frac{1}{Nz}\right)(\sqrt{N}z)^{-m/2} = G(z)$$

が成り立つ.

定理 4 は, Siegel の 1948 年の論文 [16] の結果と整合している. [16] の中で, Siegel は不定値テータ級数に対するある微分作用素の作用を計算し, $\det Y > 0$ の場合には, 不定値テータ級数から正則保型形式が構成できることを示している.

証明の詳細などについては, プレプリント [20] を参照いただければ幸いです.

謝辞. 発表の機会をくださった宮崎直先生, 青木宏樹先生に深く感謝いたします.

参考文献

- [1] P. Epstein, Zur Theorie allgemeiner Zetafunctionen, Math. Ann. **56**(1903), 615–644.
- [2] H. Hamburger, Über die Funktionalgleichung der ζ -Funktion, Math. Z., **10** (1921), 240–258, **11** (1921), 224–245, **13** (1922), 283–311.
- [3] E. Hecke, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Ann. **112**(1936), 664–699.
- [4] 伊吹山知義, 保型形式特論, 共立出版, 2018.
- [5] T. Kimura, Introduction to prehomogeneous vector spaces, Translations of Mathematical Monographs, vol. **215**(2003), American Mathematical Society, Providence, RI, Translated by Makoto Nagura and Tsuyoshi Niitani and revised by the author.
- [6] H. Maaß, Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann. **121**(1949), 141–183.
- [7] H. Maaß, Automorphe Funktionen und indefinite quadratische Formen, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, 1949.
- [8] T. Miyazaki, F. Sato, K. Sugiyama and T. Ueno, Converse theorems for automorphic distributions and Maass forms of level N , Research in Number Theory **6**(2020), no. 6.
- [9] N. Oswald and J. Steuding, Aspects of Zeta-Function Theory in the Mathematical Works of Adolf Hurwitz. In *From Arithmetic to Zeta-Functions*, Springer, 2016, 309–351.
- [10] B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Mon. Not. Berlin Akad (Nov. 1859), 671–680.

- [11] F. Sato, On functional equations of zeta distributions, Adv. Studies in pure Math., **15**(1989), 465–508.
- [12] M. Sato and T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. (2) **100** (1974), 131–170.
- [13] G. Shimura, On modular forms of half integral weight, Ann. of Math. **97**(1973), 440–481.
- [14] C. L. Siegel, Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen, Math. Z. **43**(1938), 682–708.
- [15] C. L. Siegel, Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen, II., Math. Z. **44**(1939), 398–426.
- [16] C. L. Siegel, Indefinite quadratische Formen und Modulfunktionen, in “Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948”, 395–406, 1948.
- [17] C. L. Siegel, Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie. I., Math. Ann. **124**(1951), 17–54.
- [18] H. M. Stark, L -functions and character sums for quadratic forms (I), Acta Arith. **XIV**(1968), 35–50.
- [19] K. Sugiyama, Shintani correspondence for Maass forms of level N and prehomogeneous zeta functions, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **98**(2022), 41–46.
- [20] K. Sugiyama, The modularity of Siegel’s zeta functions, [arXiv:2210.01871](https://arxiv.org/abs/2210.01871).
- [21] 上野健爾, 『ジークル 2 2次形式論の発展と現代数学』, 現代数学社 (2022).
- [22] A. Weil, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann. **168**(1967), 149–156.