

ファイル伝達網における最適ファイル伝達法

An Optimal File Transfer on a File Transmission Net

金子 美博 † 篠田 庄司 ‡ 堀内 和夫 †

Yoshihiro KANEKO Shoji SHINODA Kazuo HORIUCHI

† 早稲田大学理工学部電子通信学科

‡ 中央大学理工学部電気電子工学科

SUMMARY

ファイル伝達網 (file transmission net) N は, 点集合及び枝集合がそれぞれ V 及び B であり, B 上の各枝 e が正のコスト $c_a(e)$ を持ち, V 上の各点 u が正のコスト $c_v(u)$ 及び非負整数である需要値 $d(u)$ を持つ有向グラフである. N 上で提供される情報はファイルに書かれており, そのようなファイルを J で表す.

小文では, N 上のファイル伝達法 (file transfer) を用いて点 v_1 から V 上の各点 v へ $d(v)$ 個の J のコピーを提供する問題を考える. その結果, 定義する母点集合 M 及び正の需要値を持つ点の集合 U が $M \subseteq U$ を満たす N に対して, J のコピーを送るコストと J のコピーを作るコストの和が最小であるファイル伝達法 (最適ファ

イル伝達法)を求める, $O(nm + n^2 \log n)$ の手間のアルゴリズムを提案する. 但し, $n = |V|$ 及び $m = |B|$ である.

1. まえがき

ファイル伝達網 (file transmission net) N は, 点集合及び枝集合がそれぞれ V 及び B であり, B 上の各枝 e が正のコスト $c_a(e)$ を持ち, V 上の各点 u が正のコスト $c_v(u)$ 及び非負整数である需要値 $d(u)$ を持つ有向グラフである. N 上で提供される情報はファイルで書かれており, これを J で表す. J は適当な点においてコピーすることができるものとする.

N 上の file transfer (ファイル伝達法) を用いて点 v_1 から V 上の各点 v へ $d(v)$ 部の J のコピーを提供する問題を考える. 小文では, 定義する母点集合 M 及び正の需要値を持つ点の集合 U が $M \subseteq U$ を満たす N に対して, J のコピーを送る総コストと J のコピーを作る総コストの和が最小である file transfer を求めるアルゴリズムを提案する.

2. 準備

グラフ及びネットワークに関する基本的な用語は, 文献 [1] を参照されたい. 小文では, 単に枝といえば有向枝を指すものとし, 辺といえば無向枝を指すものとする. また, $\mathbb{Z}_+$ は非負整

数の集合を指す.

ファイル伝達網 N とは, 点集合を V , 枝集合を B とし, (1) N の基礎グラフは連結で自己閉路をもたない, (2) N の枝集合 B に対して, $(x, y) \in B$ ならば, $(y, x) \in B$ である, (3) V 上の各点 u が $c_v(u)$ 及び $d(u)$ という2個の重みを持ち, B 上の各枝 e が $c_a(e)$ という重みを持つ. 但し, $c_v(u) > 0$, $d(u) \in \mathbb{Z}_+$, 及び $c_a(e) > 0$ が成り立つ, 及び (4) B 上の各枝 (x, y) に対して, $c_a((x, y)) = c_a((y, x))$ が成り立つ, ような有向グラフである. (2) と (4) より, N は無向であるともいえる. 簡単のため, 枝 (x, y) のコストを $c_a((x, y))$ の代わりに $c_a(x, y)$ とする. 以下では, 単に $N = (V, B, c_v, d, c_a)$ といえば, このようなファイル伝達網を指すものとする.

N に対して, N の外から V 上のある点 v_1 に, 複製可能なファイル J が1部与えられるものとする. 点 u のコスト $c_v(u)$ は, u において J のコピーを1部作るのに必要なコストであり, 正の値をとる. J をコピーする機能を持たない点 u のコストを $c_v(u) = +\infty$ とし, $W = \{u \in V \mid c_v(u) < +\infty\}$ を N 上の複製可能点集合と呼ぶ. 点 u の需要値は, u が必要とする J の部数を意味し, 0 または正の整数をとる. 枝 (v, w) のコスト $c_a(v, w)$ は, 点 v から点 w へ J のコピーを1部送るのに要するコストであり, 正の値をとる. 点のコストも枝のコストも共に, 部数に対する線形のコストとする.

N 上の点 v に対して, 点集合 $A(v)$ を $A(v) = \{w \mid (v, w) \in B \text{ または}$

$(w, v) \in B\}$ とする. N 上の u から v へのパスを単に $u-v$ パスと呼び, $P_{u, v}$ で表す. N 上のパス P に対して, $c(P)$ は P 上の全ての枝のコストの総和を表し, P のコストと呼ぶ. $u-v$ パスでコストが最も小さいパスを, u から v への最小コストパスと呼び, $\tilde{P}_{u, v}$ で表す. 任意のグラフ G に対して, $B(G)$ 及び $E(G)$ は, それぞれ, G の枝集合及び辺集合を表す. P 上の各枝 e の重みが均一な値 w であるならば, P は w で均一に重みづけられている, または, P の重みが w であるという. 均一に重みづけされたパスの集合 $\mathbb{P}$ に対して, $\mathbb{P}$ 上の各パスを重ね合わせた結果得られるネット $N(\mathbb{P})$ を $\mathbb{P}$ による重ね合わせネットと呼ぶ. 但し, $N(\mathbb{P})$ 上での各枝 e の重みは, $\mathbb{P}$ 上の個々のパスにおける対応する枝 e の重みの総和とする. B 上の関数 f に対して, パス P 上の全ての枝 e が $f(e) > 0$ ならば, P は f -positiveであるという. B 上の各枝 (x, y) 上の関数 $f((x, y))$ を簡単のため $f(x, y)$ で表す.

N の外から点 v_1 に与えられたファイル J のコピーは, 次の file transferを通して, V 上の各点 u へ $d(u)$ 部ずつ提供される.

[定義 1] $N=(V, B, c_v, d, c_a)$ に対して, V を $\mathbb{Z}_+$ に写像する関数 ψ , 及び B を $\mathbb{Z}_+$ に写像する関数 f が以下の2個の条件を満たすならば, $D=(\psi, f)$ を N 上の file transferと呼ぶ.

$$(C1) \quad \sum_{x \in A(v)} f(x, v) + \psi(v) = \sum_{y \in A(v)} f(v, y) + d(v) \quad (v \in V \setminus \{v_1\}),$$

$$1 + \sum_{x \in A(v_1)} f(x, v_1) + \psi(v_1) = \sum_{y \in A(v_1)} f(v_1, y) + d(v_1).$$

(C2) $d(u) > 0$ である点 u に対して, v_1 から u へ f -positiveな

パスが存在する. $\square$

file transfer D に対して, 各点で J をコピーするのに要する総コストと各枝で J のコピーを送るのに要する総コストの和を, D のコストとする.

[定義 2] $N = (V, B, c_v, d, c_a)$ 上の file transfer $D = (\psi, f)$ のコスト $C(D)$ を,

$$C(D) = \sum_{u \in V} c_v(u) \cdot \psi(u) + \sum_{(x, y) \in B} c_a(x, y) \cdot f(x, y)$$

とする. N 上のある file transfer D が, N 上の任意の file transfer D' に対して, $C(D) \leq C(D')$ ならば, D を N における 最適な file transfer であるという. $\square$

最適な file transfer を求める上で, 次で定義する母点集合が役に立つ.

[定義 3] $N = (V, B, c_v, d, c_a)$ において, W を複製可能点集合とする. V 上のある点 x が $W \setminus \{x\}$ 上の任意の点 y に対して, $c_v(x) < c_v(y) + c(\tilde{P}_{y, x})$ であるならば, x を N 上の母点と呼ぶ. また N 上の全ての母点の集合を M で表す. $\square$

3. $M \subseteq U$ であるファイル伝達網^[6]

ここでは、必要な定義を幾つか行なって、 $M \subseteq U$ であるファイル伝達網 N 上の最適な file transfer を求めるアルゴリズムを提案する。 V から 2^M への対応を表す関数を H とし、この H を用いて、 M からの delivery transfer を定義する。

[定義 4] $N=(V, B, c_v, d, c_a)$ において、 W を複製可能点集合とする。 V 上の各点 v に対して、 $H(v)=\{w \in W \mid W \text{ 上の任意の点 } w' \text{ に対して、} c_v(w)+c(\tilde{P}_{w,v}) \leq c_v(w')+c(\tilde{P}_{w',v})\}$ とする。□

[定義 5] ファイル伝達網 $N=(V, B, c_v, d, c_a)$ における、 $U \setminus M$ 上の各点 u に対して、 $H(u) \cap M$ 上の点を 1 個ずつ選んで、 $h(u)$ とする。 M 上の点 m に対して、点集合 $S(m)$ を、 $S(m)=\{u \in U \setminus M \mid h(u)=m\}$ とする。 $h(u)$ から u への最小コストパス P_u を 1 個決め、 P_u の重みを $d(u)$ とする。 $U \setminus M$ 上の各点 u に対して、このようにして求めた $|U \setminus M|$ 個の P_u の重ね合わせネット N_h 上の枝 e の重みを $w(e)$ とする。 V 上の関数 ψ_h 及び B 上の関数 f_h が

$$\psi_h(v) = d(v) + \sum_{u \in S(v)} d(u) \quad (v \in M),$$

$$\psi_h(v) = 0 \quad (v \in V \setminus M),$$

$$f_h(e) = w(e) \quad (e \in B(N_h)),$$

$$f_h(e) = 0 \quad (e \in B \setminus B(N_h)),$$

を満たすならば, $D_h = (\psi_h, f_h)$ を, N における M からの delivery transfer と呼ぶ. $\square$

[定義 6] $N = (V, B, c_v, d, c_a)$ 上の母点集合を M とする. $M' = M \cup \{v_1\}$ を点集合とし, v_1 が根である根付木を T とする. $B(T)$ 上の各枝 $e = (x, y)$ に対して, N における x から y への最小コストパス P_e を 1 個決め, 重みを 1 とする. このようにして求めた $|M'| - 1$ 個のパスの重ね合わせネット N_T 上の各枝 e の重みを $w(e)$ とする. V 上の関数 ψ_T 及び B 上の関数 f_T が

$$\psi_T(v) = \delta_T^+(v) - 1 \quad (v \in M'),$$

$$\psi_T(v) = 0 \quad (v \in V \setminus M'),$$

$$f_T(e) = w(e) \quad (e \in B(N_T)),$$

$$f_T(e) = 0 \quad (e \in B \setminus B(N_T)),$$

を満たすならば, $D_T = (\psi_T, f_T)$ を, M への supply transfer と呼ぶ. 但し, $\delta_T^+(v)$ は T における点 v の出次数を表す. $\square$

[定義 7] $N = (V, E, c_v, d, c_a)$ における母点集合を M とする. 点集合が $M' = M \cup \{v_1\}$ である無向な完全グラフ構造であり, 各辺 (x, y) の重み $w((x, y))$ が, $c_v(x) + c(\tilde{P}_{x, y}) + c_v(y)$ であるグラフを随伴ネット (Associated Net) と呼び, AN で表す. $\square$

[命題 1] ^[6] $N = (V, E, c_v, d, c_a)$ における母点集合を M , M からの delivery transfer $D_h = (\psi_h, f_h)$ を定義 5 のように決める. 随

伴ネット AN 上の最小木を T_m とし、基礎グラフが T_m と同じ構造である、 v_1 を根とする根付木を T とする。この T に対して、 M への supply transfer $D_T = (\psi_T, f_T)$ を定義 6 のように決める。 D_h と D_T を重ね合わせたネットは、 N 上の最適な file transfer である。

□

この命題より、 N における最適な file transfer を求めるアルゴリズムは次のようになる。

Algorithm

step1 与えられたファイル伝達網 $N = (V, B, c_v, d, c_a)$ に対して、 $W \cup U$ 上の 2 点間の最小コストパスを求め、これを基に N 上の母点集合 M を求める。 $U \leftarrow U \setminus M$ とする。

step2 U 上の各点 u に対して、 $H(u) \cap M$ 上の点を 1 個選び、step 1 で求めた最小コストパスを用いて、 M からの delivery transfer $D_h = (\psi_h, f_h)$ を作る。 V 上の各点 v に対して $\psi(v) \leftarrow \psi_h(v)$ とし、 B 上の各枝 e に対して、 $f(e) \leftarrow f_h(e)$ とする。

step3 随伴ネット AN を作り、 AN 上の最小木 T_m を求め、根が v_1 であり、基礎グラフが T_m と一致する根付木を T とする。 T を基に、 M への supply transfer $D_T = (\psi_T, f_T)$ を作る。 V 上の各点 v に対して、 $\psi(v) \leftarrow \psi(v) + \psi_T(v)$ とし、 B 上の各

枝 e に対して, $f(e) \leftarrow f(e) + f_T(e)$ とする.

step4 V 上の各点 v の $\psi(v)$ 及び B 上の各枝 e の $f(e)$ を出力し,

終了. 以上の結果得られた $D=(\psi, f)$ が N 上の最適な

file transfer である.

Algorithm 終了

上記のアルゴリズムでは, グラフにおける 2 点間の Shortest Path を求めるアルゴリズム^[2]と Minimum Spanning Tree を求めるアルゴリズム^[3]とが基本となっている. 点集合 V , 枝集合 B であるグラフに対して, Fibonacci Heap を用いると, 両者共に計算の手間が $O(m+n \log n)$ であることが知られている.^[4] 但し, $n=|V|$, $m=|B|$ である. その結果, 提案したアルゴリズム全体では, $O(nm+n^2 \log n)$ の手間がかかる.

例として Fig. 1 のようなファイル伝達網 N を考える. 簡単のため N は無向グラフの構造で表す. 図において, Δ は点または枝のコストを表し, $\square$ は需要値を表す. この N においては, 複製可能な点集合 W 及び需要値が正である点の集合 U に対して, $W=U=V$ が成り立つ. 母点集合 M は, $M=\{v_1, v_2, v_5\}$ であり, $U=V$ より, $U \setminus M=\{v_3, v_4, v_6\}$ である. $H(v_3) \cap M=\{v_5\}$, $H(v_4) \cap M=\{v_2\}$ 及び $H(v_6) \cap M=\{v_5\}$ より, $h(v_3)=v_5$, $h(v_4)=v_2$ 及び $h(v_6)=v_5$ が成り立つ.

$\tilde{P}_{v_5, v_3}$, $\tilde{P}_{v_2, v_4}$ 及び $\tilde{P}_{v_5, v_6}$ を適当にとると, M からの delivery

transferは, Fig. 2 のようになる. 但し, 図中の枝 e 付近の数値は $f_h(e)$ を指す.

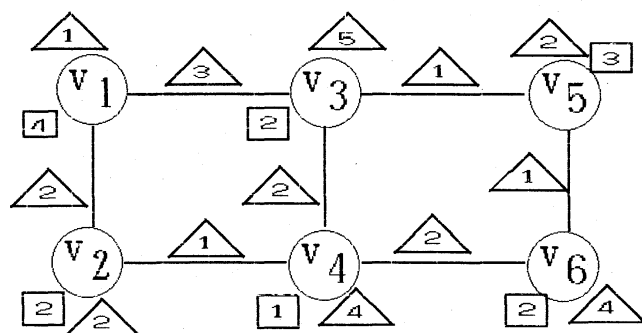
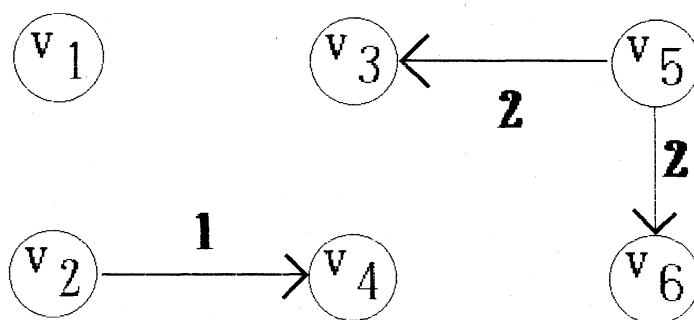


Fig. 1 An example of a file transmission net N



$$\psi_h(v_1) = 4, \psi_h(v_2) = 3, \text{ and } \psi_h(v_5) = 7$$

Fig. 2 A delivery transfer D_h from M

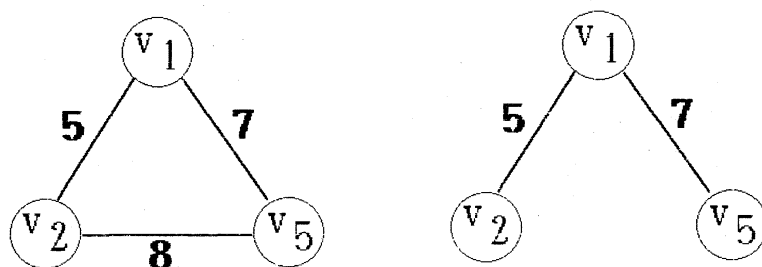
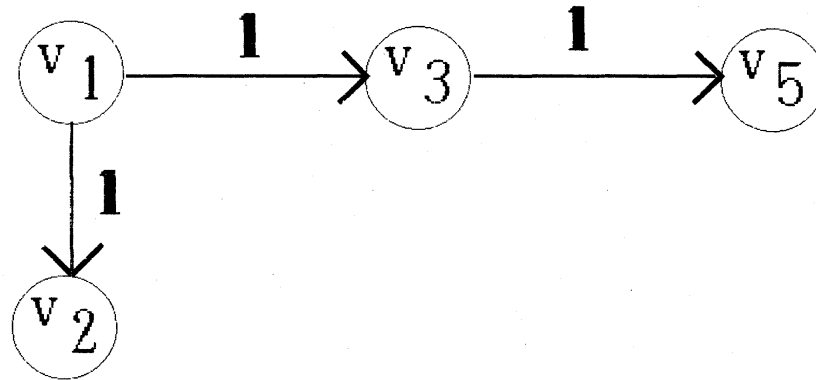


Fig. 3 Associated net AN and its minimum spanning tree T_m on AN

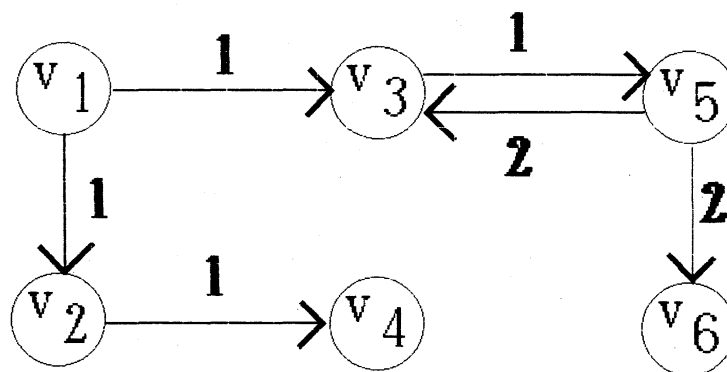


$$\psi_T(v_1)=1, \psi_T(v_2)=-1, \text{ and } \psi_T(v_5)=-1.$$

Fig. 4 A supply transfer D_T to M

Fig. 1のファイル伝達網 N に対して、随伴ネット AN 及びその最小木は Fig. 3 のようになる。図において辺 e 付近の数値は $w(e)$ を指す。従って、 M への supply transfer D_T は Fig. 4 のようになる。尚、Fig. 4 において図中の枝 e 付近の値は $f_T(e)$ を表す。

以上より、Fig. 5 のような最適な file transfer $D_m = (\psi_m, f_m)$ が得られる。図中の枝 e 付近の数値は $f_m(e)$ を表す。



$$\psi_m(v_1)=5, \psi_m(v_2)=2, \text{ and } \psi_m(v_5)=6$$

Fig. 5 An optimal file transfer $D_m = (\psi_m, f_m)$ on N

4. まとめと今後の課題

小文では、点と枝にコストを持つファイル伝達網 N において、 N の外から、複製可能なファイル J を、各点に需要値分の部数のコピーを提供する file transfer D を考察の対象とした。 D を通して、各点において J をコピーするのに要するコストと、 J のコピーが各枝を通して送るのに要するコストとの和を D のコストとし、コストが最小となる file transfer を最適な file transfer と定義した。考察の結果、母点集合 M 及び需要値が正である点の集合 U に対して、 $M \subseteq U$ であるファイル伝達網 N に対する、最適な file transfer を構成する、 $O(nm + n^2 \log n)$ のアルゴリズムを提案した。今後、 $M \setminus U \neq \emptyset$ であるファイル伝達網 N に対する考察が必要であると思われる。

謝辞

本研究を推進するに当たり、有益な御助言を賜った、中央大学築山修治教授に深謝します。

参考文献

- [1] Iri M., Shirakawa I., Kajitani Y., & Shinoda S., et al. "Graph Theory with Exercise," Corona Co. Ltd., (1983).

- [2] Dijkstra E. W, "A Note on two problems in connection with graphs," Numerische Math., 1, pp. 269-271. (1959)
- [3] Prim R. C., "Shortest connection networks and some generalizations," Bell System Technical J. 36, pp. 1389-1401 (1957).
- [4] M.L.Fredman & R.E.Tarjan, "Fibonacci Heaps and Their Uses in Improved Network Optimization Algorithms," Proc. of the 25th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, Singer Island, Florida, pp. 338-346.
- [5] Kaneko Y., Tashiro R., Shinoda S., & Horiuchi K.: "A Linear-Time Algorithm for Designing an Optimal File Transfer through an Arborescence-Net," IEICE Transactions E75-A, No. 7, pp. 901-904 (1992-07)
- [6] Kaneko Y. Shinoda S., & Horiuchi K., "A Synthesis of an optimal file transfer on a file transmission net," (IEICE Trans. 投稿中).