

ウルトラ超函数の構造

上智大 理工 森 本 光 生

1° $V \in \mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする. $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ とおく.

$$S(V) = (V \setminus 0) / \mathbb{R}^+$$

と表わす. $S(V)$ は $(n-1)$ -球面であり. V の原点と端点とする半直線の "方向" の集合と考えられる. $S(V)$ の部分集合 Γ が 凸であるとは $\Gamma \ni x, y$ なる任意の 2 点には x と y と結ぶ測地線をすべて Γ が含むことという. もし Γ が 対称点を 1 組含めば, $\Gamma = S(V)$ でなくてはならない.
 (凸で)

$$V^{SC} = V \sqcup S(V)$$

を V の $\mathbb{C} = \mathbb{R}^+$ 化とする. V の "無限遠" に $S(V)$ をくっつけるのである. V^{SC} は閉球と同相となり. その内包が V と同相となるのである. また.

$$p': V^{SC} \setminus 0 \longrightarrow S(V)$$

なる射影が存在する.

2° $X \in V$ の複素化としよう. 可なり

$$X = V \times \sqrt{-1} V.$$

$\mathcal{O}_X$ で X 上の整型 (holomorphic) 函数の芽の層を表わす.

$$\mathcal{B}(V) = H^n[V; \mathcal{O}_X]$$

$$\mathcal{U}(V) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ G \subset X/V}} \text{ind } H^n[t_V^{-1}(G); \mathcal{O}_X]$$

但し, $t_V: X \rightarrow X/V$ は G compact 標準射影 $\mathbb{P}^n$ である. $t_V^{-1}(G)$ は, G を底とする柱状領域に他ならない. $\mathcal{B}(V)$, $\mathcal{U}(V)$ はそれぞれ V 上の超函数 (hyperfunctions) の空間, ウルトラスーパー函数 (ultra-hyperfunctions ultradistributions cohomologiques) の空間と呼ばれている. 共に $\mathcal{O}(X)$ -加群としての構造をもち.

$$0 \rightarrow \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{U}(V)$$

なる $\mathcal{O}(X)$ -加群としての完全列がある.

$U \in V$ の部分空間とする.

$$\mathcal{B}_V[U] = H^n[U; \mathcal{O}_X]$$

とみると, $\mathcal{B}_V[U]$ は U に台をもつ V 上の超函数の空間と一致する.

$$\mathcal{U}_V[U] = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ G \subset X/U \\ G \text{ compact}}} \text{ind } H^n[t_U^{-1}(G); \mathcal{O}_X]$$

とあこう、但し、

$$\pi_U : X \rightarrow X/U$$

は標準的射影である。 $\mathcal{B}_V[U]$, $\mathcal{U}_V[U]$ 共に $\mathcal{O}(X)$ -加群であり、

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_V[U] \rightarrow \mathcal{U}_V[U]$$

なる $\mathcal{O}(X)$ -加群の完全列がある。

U が V に一致するときには、明らかに

$$\mathcal{B}_V[V] = \mathcal{B}(V), \quad \mathcal{U}_V[V] = \mathcal{U}(V)$$

が成立つ。 $U = \{0\}$ のとき、 $\mathcal{B}_V[0]$ は 0 に値が集中している V 上の超函数の空間である。また

$$\mathcal{U}_V[0] = H_X^n(X; \mathcal{O}_X) \quad (\text{コホモロジー空間})$$

であるから、 $\mathcal{U}_V[0]$ は $\mathcal{O}(X)$ の双対空間、すなわち、 X 上の解析的超函数の空間である。

$U_1 \subset U_2$ を V の部分空間とすると、

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_V[U_1] \rightarrow \mathcal{B}_V[U_2]$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$0 \rightarrow \mathcal{U}_V[U_1] \rightarrow \mathcal{U}_V[U_2]$$

なる可換図の各行は $\mathcal{O}(X)$ -加群の完全列である。

我々の目的は、フィルタ超函数 $\mathcal{U}(V)$ の部分空間 $\mathcal{U}_V[U]$ の構造を調査することである。

3° 4つのR上のベクトル空間が次のように与えられている
としよう:

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\quad} & V \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y & \xleftarrow{\quad} & U. \end{array}$$

= の図式を完全化すると次を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & X/U & & X/Y & & V/U \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \leftarrow & X/U & \leftarrow & X & \leftarrow & V & \leftarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \leftarrow & Y/U & \leftarrow & Y & \leftarrow & U & \leftarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & & & 0 \end{array}$$

= 4行の図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \leftarrow & X/Y+V & \leftarrow & X/Y & \leftarrow & V/U & \leftarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ 0 & \leftarrow & X/U & \leftarrow & X/U & \leftarrow & V/U & \leftarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & Y/U & = & Y/U & & \uparrow \\ & & \uparrow & & \uparrow & & 0 \end{array}$$

この図式で双方向に移動して次を得る:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \rightarrow & (X/Y)^* \cap (X/V)^* & \rightarrow & (X/Y)^* & \rightarrow & (V/U)^* & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\
 0 \rightarrow & (X/V)^* & \rightarrow & (X/U)^* & \rightarrow & (V/U)^* & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & (Y/U)^* & = & (Y/U)^* & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 0 & & 0 & & &
 \end{array}$$

注意 $(X/Y)^* \cap (X/V)^* \cong (X/Y+V)^*$

4°. 又, $X = V \times \sqrt{-1} V$ である。

$$X \setminus U \xrightarrow{t_U} X/U \setminus 0 \xrightarrow{p} S(X/U)$$

を自然な射影の列としよう。 $S(X/U)$ 上の $\mathcal{O}(X)$ -加群の層 $\mathcal{P}_{X/U}$ を次のように定義しよう:

$$\mathcal{P}_{X/U} = p_* (t_U)_* (\mathcal{O}_X|_{X \setminus U})$$

亦,

$$X \xrightarrow{t_U} X/U \xrightarrow{i_1} (X/U)^{sc} \xleftarrow{i_2} S(X/U)$$

を考える。 $(X/U)^{sc} = X/U \sqcup S(X/U)$ で i_1 および i_2 は自然な単射である。

$$\mathcal{P}_{X/U} = i_2^{-1} i_{1*} (t_U)_* \mathcal{O}_X$$

もまた $\mathcal{S}(X/U)$ 上の $\mathcal{O}(X)$ 加群の層である。また

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{X/U}^{\circ} \rightarrow \mathcal{P}_{X/U}$$

なる $\mathcal{O}(X)$ -加群の完全列も自然に定義される。

すなわち

$$\begin{array}{ccc} X \setminus U \xrightarrow{t_U} X/U \setminus 0 & \xrightarrow{i_1} & (X/U)^{sc} \setminus 0 \\ & \searrow p & \downarrow p' \uparrow i_2 \\ & & \mathcal{S}(X/U) \end{array}$$

であるから、 $\mathcal{I}_{X/U}^{\circ}$, $\mathcal{P}_{X/U}$ は $(X/U)^{sc} \setminus 0$ 上の $\mathcal{O}(X)$ 加群の層 $i_{1*} (t_U)_* (\mathcal{O}_X|_{X \setminus U})$ のように定まる

$$\mathcal{I}_{X/U}^{\circ} = (p')_* i_{1*} (t_U)_* (\mathcal{O}_X|_{X \setminus U})$$

$$\mathcal{P}_{X/U} = i_2^{-1} i_{1*} (t_U)_* (\mathcal{O}_X|_{X \setminus U}).$$

5° X を位相空間、 $\mathcal{F}$ をその上の層とあるとき、 $(X, \mathcal{F})$ は 組を層付空間 という。 $(Y, \mathcal{G})$ を別の層付空間としたとき、層付空間の 準同型

$$(X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$$

が与えられるとは、 $f: X \rightarrow Y$ なる連続写像と

$$\mathcal{F} \longleftarrow f^* \mathcal{G}$$

なる層の準同型が与えられることをいう。もし層付空間の準同型 $(X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ が与えられたとあると

コホモロジ-空間

$$H^k(Y \leftarrow X; \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{A})$$

が定義できる. これは $\overset{(1=2)}{\text{小松彦}} = \text{郎の論文の結果を用いる.}$

$\mathcal{P}_{X/U}, \mathcal{P}_{X/U}^{\circ}$ と $\mathcal{O}_V[U], \mathcal{U}_V[U]$ が与えられる. すなわち,

命題 1 (i) $0 \leq k \leq n$ なる位相空間を表わす.

$$(\mathcal{S}(X/U); \mathcal{P}_{X/U}^{\circ}) \rightarrow (0, \mathcal{O}(X))$$

なる層付空間の準同型が自然に定まるが, これに対し,

$$\begin{aligned} H^k(0 \leftarrow \mathcal{S}(X/U); \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{P}_{X/U}^{\circ}) \\ = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \mathcal{O}_V[U] & k = n. \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) 層付空間の準同型

$$(\mathcal{S}(X/U); \mathcal{P}_{X/U}) \rightarrow (0, \mathcal{O}(X))$$

に対し次が成立つ.

$$\begin{aligned} H^k(0 \leftarrow \mathcal{S}(X/U); \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{P}_{X/U}) \\ = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \mathcal{U}_V[U] & k = n. \end{cases} \end{aligned}$$

系 $(\bullet, \mathcal{S}(X/U), \mathcal{P}_{X/U}^{\circ}) \rightarrow (0, \mathcal{O}(X))$

および $(\mathcal{S}(X/U); \mathcal{P}_{X/U}) \rightarrow (0, \mathcal{O}(X))$

は共に純 n 次元的である,

注意(i) Γ は $S(X/U)$ の任意の開集合とあるとき,

$$H^k(\Gamma; \mathcal{P}_{X/U}) = H^k((t_U)^{-1} p^{-1}(\Gamma); \mathcal{O}_X)$$

が成立する. したがって, F は $S(X/U)$ の閉じて凸集合とすると,

$$\begin{aligned} & H^k(S(X/U) \setminus F; \mathcal{P}_{X/U}) \\ &= \begin{cases} \mathcal{O}(X) & k=0 \\ H^n[t_U^{-1} p^{-1}(F); \mathcal{O}_X] & k=n-1, \\ 0 & \text{その他の場合.} \end{cases} \end{aligned}$$

故に, $H^k[F; \mathcal{P}_{X/U}]$ は $k \neq n-1$, n かつ $n \neq 0$ になる. また次の完全列も得られる:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^{n-1}[F; \mathcal{P}_{X/U}] &\rightarrow \mathcal{B}_V[U] \rightarrow H^n[t_U^{-1} p^{-1}(F); \mathcal{O}_X] \\ &\rightarrow H^n[F; \mathcal{P}_{X/U}] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(あとで, $H^n[F; \mathcal{P}_{X/U}] = 0$ になることにも注意する.)

注意(ii) $\mathcal{P}_{X/U}$ に対しては同様のことがいえる. $S(X/U)$ の任意の開集合 Γ に対し,

$$\begin{aligned} & H^k(\Gamma; \mathcal{P}_{X/U}) \\ &= \lim_{\substack{\Gamma' \subset \Gamma \\ \Gamma' \text{ open}}} \text{proj} \lim_{\substack{G \subset X/U \\ G \text{ compact}}} \text{ind} H^k(t_U^{-1}(p^{-1}(\Gamma') \setminus G); \mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

今, F は $S(X/U)$ の凸な閉集合とすると, 次式が成立する:

$$\begin{aligned}
 & H^k(S(X/U) \setminus F; \mathcal{P}_{X/U}) \\
 = & \begin{cases} \mathcal{O}(X) & k=0 \\ \lim_{\substack{\text{proj} \\ F' \supset F \\ F' \text{ convex closed}}} \lim_{\substack{\text{ind} \\ x \in X/U}} H^n[t_U^{-1}(p^{-1}(F') + \lambda); \mathcal{O}_x] & k=n-1 \\ 0 & \text{その他の場合.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

命題 2 $(S(X/U); \mathring{\mathcal{P}}_{X/U}) \rightarrow (S(X/U); \mathcal{O}(X))$
 および, $(S(X/U); \mathcal{P}_{X/U}) \rightarrow (S(X/U); \mathcal{O}(X))$
 は共に, 純 1 余次元的である.

証明 $\mathring{\mathcal{P}}^0$ が $\mathring{\mathcal{P}}_{X/U}$ が $\mathcal{P}_{X/U}$ の "すね" を表わし, S で $S(X/U)$ を表わすと, 次の完全列が書ける:

$$\begin{aligned}
 0 & \rightarrow \mathcal{H}^0(S \leftarrow S; \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathring{\mathcal{P}}^0) \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathring{\mathcal{P}}^0 \\
 & \rightarrow \mathcal{H}^1(S \leftarrow S; \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathring{\mathcal{P}}^0) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \\
 & \rightarrow \mathcal{H}^2(S \leftarrow S; \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathring{\mathcal{P}}^0) \rightarrow 0 \dots
 \end{aligned}$$

これより明らか.

$$\mathcal{H}^k(S \leftarrow S; \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathring{\mathcal{P}}^0) = 0, \quad k \neq 1 \quad (\text{q. e. d.})$$

定義 $S(X/U)$ 上の $\mathcal{O}(X)$ 加群の層 $\mathring{\Phi}_{X/U}, \Phi_{X/U}$
 を次のように定義する:

$$\mathring{\Phi}_{X/U} = \mathcal{H}^1(S(X/U) \leftarrow S(X/U); \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathring{\mathcal{P}}_{X/U})$$

$$\Phi_{X/U} = \mathcal{H}^2(S(X/U) \leftarrow S(X/U); \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{P}_{X/U}).$$

注意

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{P}}_{X/\mathbb{C}} \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{X/\mathbb{C}} \rightarrow 0$$

$$\parallel \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{P}_{X/\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathcal{F}}_{X/\mathbb{C}} \rightarrow 0$$

は $\mathcal{O}(X)$ -加群の可換図式、各行は完全である。

命題3 $\text{codim}_V U = d$ とおく。

$$H^k(0 \leftarrow \mathcal{S}(X/\mathbb{C}); \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X))$$

$$= \begin{cases} \mathcal{O}(X) & k = n+d \\ 0 & k \neq n+d. \end{cases}$$

証明 $H^k(0; \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C} & k=0 \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$

$$H^k(\mathcal{S}(X/\mathbb{C}); \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C} & k=0, n+d-1 \\ 0 & \text{其他の場合.} \end{cases}$$

また 系列

$$\cdots \rightarrow H^k(0 \leftarrow \mathcal{S}; \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X)) \rightarrow H^k(0; \mathcal{O}(X)) \rightarrow H^k(\mathcal{S}, \mathcal{O}(X))$$

$$\rightarrow H^{k+1}(0 \leftarrow \mathcal{S}; \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X)) \rightarrow \cdots$$

は完全であるから 命題と得る。

(q. e. d.)

命題4 層付空間の準同型列

$$(\mathcal{S}(X/\mathbb{C}); \overset{\circ}{\mathcal{P}}_{X/\mathbb{C}}) \rightarrow (\mathcal{S}(X/\mathbb{C}); \mathcal{O}(X)) \rightarrow (0; \mathcal{O}(X))$$

および

$$(\mathcal{S}(X/\mathbb{C}); \mathcal{P}_{X/\mathbb{C}}) \rightarrow (\mathcal{S}(X/\mathbb{C}); \mathcal{O}(X)) \rightarrow (0; \mathcal{O}(X))$$

に於ける $\mathcal{O}_X$ の完全列は次の形をとる:

$d=0$ の場合

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{B}(V) \rightarrow H^{n-1}(\mathcal{S}(X/V); \overset{\circ}{\Phi}_{X/V}) \rightarrow 0$$

$$\parallel \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \searrow$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{U}(V) \rightarrow H^{n-1}(\mathcal{S}(X/V); \overline{\Phi}_{X/V}) \rightarrow 0$$

$d=1$ の場合,

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_V[U] \rightarrow H^{n-1}(\mathcal{S}(X/V); \overset{\circ}{\Phi}_{X/V}) \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow 0$$

$$\searrow \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \parallel$$

$$0 \rightarrow \mathcal{U}_V[U] \rightarrow H^{n-1}(\mathcal{S}(X/V); \overline{\Phi}_{X/V}) \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow 0$$

$d \geq 2$ の場合,

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_V[U] \rightarrow H^{n-1}(\mathcal{S}(X/V); \overset{\circ}{\Phi}_{X/V}) \rightarrow 0$$

$$\searrow \quad \quad \quad \searrow$$

$$0 \rightarrow \mathcal{U}_V[U] \rightarrow H^{n-1}(\mathcal{S}(X/V); \overline{\Phi}_{X/V}) \rightarrow 0$$

および

$$0 \rightarrow H^{n+d-2}(\mathcal{S}(X/V); \overset{\circ}{\Phi}_{X/V}) \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow 0$$

$$\searrow \quad \quad \quad \parallel$$

$$0 \rightarrow H^{n+d-2}(\mathcal{S}(X/V); \overline{\Phi}_{X/V}) \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow 0$$

系 $d \geq 2$ の場合

$$H^{n+d-2}(\mathcal{S}(X/V); \overset{\circ}{\Phi}_{X/V})$$

$$\cong H^{n+d-2}(\mathcal{S}(X/V); \overline{\Phi}_{X/V}).$$

証明 次の完全列を考える:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^k(0 \leftarrow S; \theta(x) \rightarrow \theta(x)) &\rightarrow H^k(0 \leftarrow S; \theta(x) \rightarrow \overset{(0)}{P}) \\ &\rightarrow H^k(S \leftarrow S, \theta(x) \rightarrow \overset{(0)}{P}) \\ &\rightarrow H^{k+1}(0 \leftarrow S; \theta(x) \rightarrow \theta(x)) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

λ_1 項は命題3で, λ_2 項は命題3で345の計算と42
213. λ_3 項は命題2より次のように与えられる:

$$H^k(S \leftarrow S; \theta(x) \rightarrow \overset{(0)}{P}) = \begin{cases} 0 & k=0 \\ H^{k-1}(S, \overset{(0)}{P}_{X/U}) & k=1, 2, \dots \end{cases}$$

これを最初の長い完全列に代入すれば, 求める結果を得る.

(q. e. d.)

$$\begin{aligned} 6^\circ. \quad D(X/U) &= \frac{1}{2} (S(X/U) \times S(X/U)^*) \\ &= \{ (\xi, \eta) ; \xi \in S(X/U), \eta \in S(X/U)^*, \\ &\quad \langle \xi, \eta \rangle \geq 0 \} \end{aligned}$$

を考える. 次の γ や $\varepsilon = \delta$ を考える.

$$\begin{array}{ccc} & D(X/U) & \\ \pi \swarrow & & \searrow \varepsilon \\ S(X/U) & & S(X/U)^* \\ \varepsilon \searrow & & \swarrow \pi \\ & 0 & \end{array}$$

注意 $d=0, \pm$ の場合.

$\tau: S(X/U) \rightarrow 0$ は $\overset{(0)}{\Xi}_{X/U}$ に関して純 $n-1$ 次元的であるが, $d \geq 2$ であれば, τ は純次元でない.

命題 5. $\pi: D(X/U) \rightarrow S(X/U)$

なる写像は, $\pi^{-1} \overset{(0)}{\Xi}_{X/U}$ に関して純 0 次元的である.

証明 $\pi: D(X/U) \rightarrow S(X/U)$

のファイバーは可縮なコンパクト集合である. (q.e.d.)

命題 6. $\tau: D(X/U) \rightarrow S(X/U)^*$

は $\pi^{-1} \overset{(0)}{\Xi}_{X/U}$ に関して純 $n-1$ 次元的である.

証明 τ の証明が, τ の議論の中で本質的な部分にある.

$G \subset X$ を閉じた凸集合でいかなる複素 1 次元線形多様体と含まないならば,

$$H^k[G; \mathcal{O}_X] = 0 \quad k \neq n$$

である. τ の事実のいっかえである. (q.e.d.)

定義 $\overset{\circ}{\Xi}_{X/U} = \mathcal{H}_{\tau}^{n-1}(\pi^{-1} \overset{\circ}{\Xi}_{X/U})$

$$\Xi_{X/U} = \mathcal{H}_{\tau}^{n-1}(\pi \Xi_{X/U})$$

よって, τ からは $S(X/U)^*$ 上の $\mathcal{O}(X)$ -加群の層である.

系 $\xi \in S(X/U)^*$ とある.

$$\overset{\circ}{\Xi}_{X/U}(\xi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{ind} H^n[t^{-1}p^{-1}(\bar{F}_{\varepsilon}); \mathcal{O}_X]$$

$$\Xi_{X/U}(\xi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{ind} \lim_{x \in X/U} \text{ind} H^n[t^{-1}(p^{-1}(\bar{F}_{\varepsilon}) + x); \mathcal{O}_x]$$

が成り立つ, 但し

F_ε は ε の 対 称 集 合 に 内 側 から 近 ず く 閉 じ た 凸 集 合
で ある ($\varepsilon \rightarrow 0$ の とき). $F_\varepsilon \subset S(X/U)$ で ある.

命題 7 $d=0$ と する.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\pi^0 \frac{(0)}{\mathbb{Z}}_{X/U} &= \mathcal{H}_\tau^{n-1} \frac{(0)}{\mathbb{Z}}_{X/U} \\ \mathcal{H}_\pi^k \frac{(0)}{\mathbb{Z}}_{X/U} &= 0 \quad k \neq 0 \end{aligned}$$

$d \geq 1$ と する.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\pi^0 \frac{(0)}{\mathbb{Z}}_{X/U} &= \mathcal{H}_\tau^{n-1} \frac{(0)}{\mathbb{Z}}_{X/U} \\ \mathcal{H}_\pi^{d-1} \frac{(0)}{\mathbb{Z}}_{X/U} &= \mathcal{H}_\tau^{n+d-2} \frac{(0)}{\mathbb{Z}}_{X/U} \\ \mathcal{H}_\pi^k \frac{(0)}{\mathbb{Z}}_{X/U} &= 0 \quad k \neq 0, d-1. \end{aligned}$$

証明

下 7.5.1 の X/U は 有 限 性:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\pi^k \frac{(0)}{\mathbb{Z}} &= \mathcal{H}_\pi^k \mathcal{H}_\tau^{n-1} \pi^{-1} \frac{(0)}{\mathbb{Z}} && (\text{定義より}) \\ &= \mathcal{H}_{\pi \cdot \tau}^{k+n-1} \pi^{-1} \frac{(0)}{\mathbb{Z}} && (\text{命題 6}) \\ &= \mathcal{H}_{\tau \pi}^{k+n-1} \pi^{-1} \frac{(0)}{\mathbb{Z}} && (\text{グレイプの可換性}) \\ &= \mathcal{H}_\tau^{k+n-1} \pi_* \pi^{-1} \frac{(0)}{\mathbb{Z}} && (\text{命題 5}) \\ &= \mathcal{H}_\tau^{k+n-1} \frac{(0)}{\mathbb{Z}} && (\pi \text{ onto}) \\ &= \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ \mathcal{H}_\tau^{k+n-1} \frac{(0)}{\mathbb{Z}} & k \neq 0, d-1 \end{cases} && \begin{aligned} & (d=0 \text{ の 特 殊 性}) \\ & (d \geq 1) \\ & (\text{q. e. d.}) \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\text{系 } H^0(S^*(X/U); \overset{\circ}{\Psi}_{X/U}) \cong H^{n-1}(S(X/U); \overset{\circ}{\Phi}_{X/U})$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$H^0(S^*(X/U); \overline{\Psi}_{X/U}) \cong H^{n-1}(S(X/U); \overline{\Phi}_{X/U})$$

よって,

$$H^{d-1}(S^*(X/U); \overset{\circ}{\Psi}_{X/U}) \cong H^{n+d-2}(S(X/U); \overset{\circ}{\Phi}_{X/U})$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$H^{d-1}(S^*(X/U); \overline{\Psi}_{X/U}) \cong H^{n+d-2}(S(X/U); \overline{\Phi}_{X/U})$$

定理

$d=0$ の場合

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{B}(U) \rightarrow H^0(S(X/U)^*; \overset{\circ}{\Psi}_{X/U}) \rightarrow 0$$

$$\parallel \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{U}(U) \rightarrow H^0(S(X/U)^*; \overline{\Psi}_{X/U}) \rightarrow 0$$

$d=1$ の場合.

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_U[U] \rightarrow H^0(S(X/U)^*; \overset{\circ}{\Psi}_{X/U}) \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \parallel$$

$$0 \rightarrow \mathcal{U}_U[U] \rightarrow H^0(S(X/U)^*; \overline{\Psi}_{X/U}) \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow 0$$

$d \geq 2$ の場合.

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_U[U] \rightarrow H^0(S(X/U)^*; \overset{\circ}{\Psi}_{X/U}) \rightarrow 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$0 \rightarrow \mathcal{U}_U[U] \rightarrow H^0(S(X/U)^*; \overline{\Psi}_{X/U}) \rightarrow 0$$

よって,

$$0 \rightarrow H^{d-1}(S(X/U)^*; \overset{\circ}{\Psi}_{X/U}) \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \parallel$$

$$0 \rightarrow H^{d-1}(S(X/U)^*; \Psi_{X/U}) \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow 0$$

Cor $U = \{0\}$ の場合. $S(X)^*$ 上の層 $\Psi_{X/0}$ によ

り.

$$\mathcal{O}(X)^* \cong H^0(S(X)^*; \Psi_{X/0})$$

という解析的IA函数空間の表示式を得る.

文献 (不完全なものですが)

MORIMOTO. [1] Ann. Inst. Fourier 19 129-153 (1970)

[2] J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA
17, 215-239 (1970)

[3] Proc. Japan Acad. 48 (1972) 161-165.

KOMATSU. Cohomology of morphisms of sheafed
spaces. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA