

代数方程式の数値実験例

岡山大学理学部電子計算室 川端 親雄

今回は、たまたま、直面した 8 次の代数方程式を解いた際
の数値実験例をここに紹介する。

与えられた代数方程式は下記のようにある。K を 0 から可
成り大きい値をとる範囲にパラメーターとして数値解を求め
た。(式 1)

K=0 のときは $x=x$ とすれば

$$x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 28x^2 + 8x + 1 = (1+x)^8$$

= 0 と解くことを意味する。

明らかに、解は $x=-1$ である。

さて、これを Bairstow 法の变形である McAuley 法を使
いたる結果は図 1 の如くである。(図 1)

Bairnstow 法では $K=0$ の降は解けない。 $K=0.2, 0.6$ の場合は図 2, 3 の如くである。(図 2, 3)

次によく知られてゐる Gauss の方法で追試してみた。

$$\begin{aligned}
 \text{つまり、 } f(z) &= \sum_{k=1}^n a_k z^k + 1 \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k r^k e^{ik\varphi} + 1 \quad (z = re^{i\varphi}) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n a_k r^k \cos k\varphi + 1 \right) + i \left(\sum_{k=1}^n a_k r^k \sin k\varphi \right) \\
 &= u + i v
 \end{aligned}$$

$$f(z)=0 \rightarrow \begin{cases} v = \sum_{k=1}^n a_k r^k \sin k\varphi = 0 \\ u = \sum_{k=1}^n a_k r^k \cos k\varphi + 1 = 0 \end{cases}$$

今 $r=1$ とし、単位円周上を追跡した結果は図 4, 5 の如くである。(図 4, 5)

今問題としてゐる式数方程式は相及定理を満足してゐるというこゝに着目して次のような式 2 に変形して根が単位円周上にありかどうか調べた。

$K=0.01, 0.2, 0.6$ の結果が図 6, 7, 8 の如くである。

(式 2, 図 6, 7, 8)

最後に、式は相互定理も満足しているから、簡単に4次方程式
 式になる。ところが4次方程式は非常に難しい。Ferrari
 によって解かれているからそれを用いれば $K=0.0, 0.2, 0.6$
 については図9, 10, 11の如くである。(図9, 10, 11)

本筆下から御討論のこころを教える理原部一松信教授、
 京大数理解析研究所古部寅教授に心からの感謝の意を表
 す。

$$Z = (Z^4 + Z^{-4}) a_4$$

$$+ (Z^3 + Z^{-3}) (a_4 + a_3)$$

$$+ (Z^2 + Z^{-2}) (a_4 + a_3 + a_2)$$

$$+ (Z^1 + Z^{-1}) (a_4 + a_3 + a_2 + a_1)$$

$$+ (a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$$

$$= 0$$

$$\begin{cases} \lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0 \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\ \lambda^3 + 5\lambda'^3 - \lambda' - 9 = 0 \\ (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3) \end{cases}$$

$$a_{44} = e^{4k}$$

$$a_{33} = 3e^{4k} + 3e^{2k} + 1$$

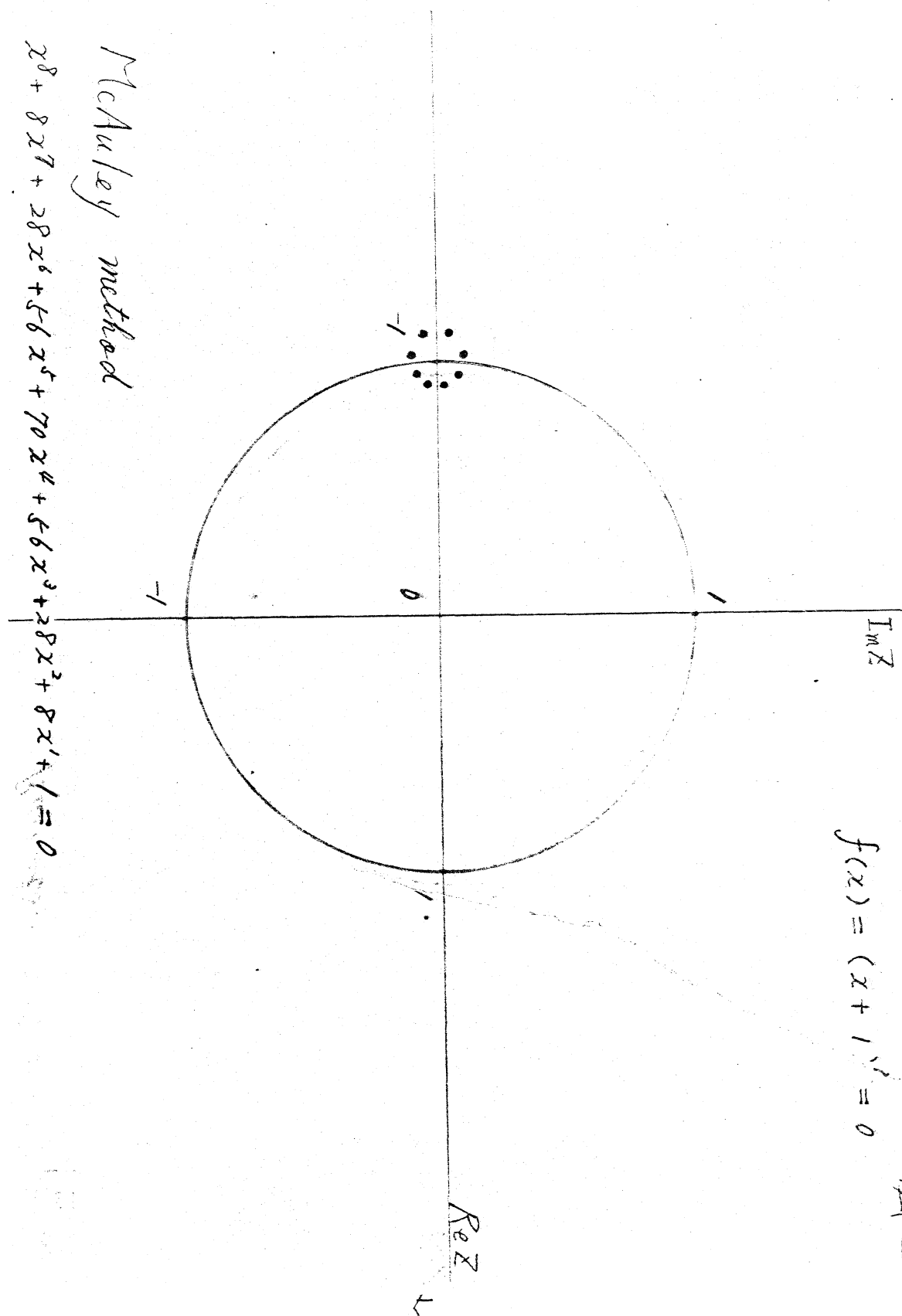
$$a_{22} = 2e^{2k} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} [5]^{1/2} \right) + 2e^{2k} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} [5]^{1/2} \right) + 3e^{2k} + 3e^{2k}(-1) + e^{2k}(-1 + [2]^{1/2}) + e^{2k}(-1 - [2]^{1/2}) + 3e^{2k} + 3e^{2k}(-1) + 2$$

$$a_{11} = 3e^{2k}\lambda_1 + 3e^{2k}\lambda_2 + 3e^{2k}\lambda_3 + 3e^{2k} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} [5]^{1/2} \right) + 3e^{2k} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} [5]^{1/2} \right) + 1 + 1e^{8k}(-1) + 3e^{2k} \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} [5]^{1/2} \right) + 3e^{2k} \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} [5]^{1/2} \right) + 3 + 2e^{2k}(-1)$$

$$a_{00} = 2e^{2k}(-1 + [2]^{1/2}) + 2e^{2k}(-1 - [2]^{1/2}) + 1 + 3e^{2k}(-1) + 3e^{4k}(-1) + e^{2k}\lambda'_1 + e^{2k}\lambda'_2 + e^{2k}\lambda'_3$$

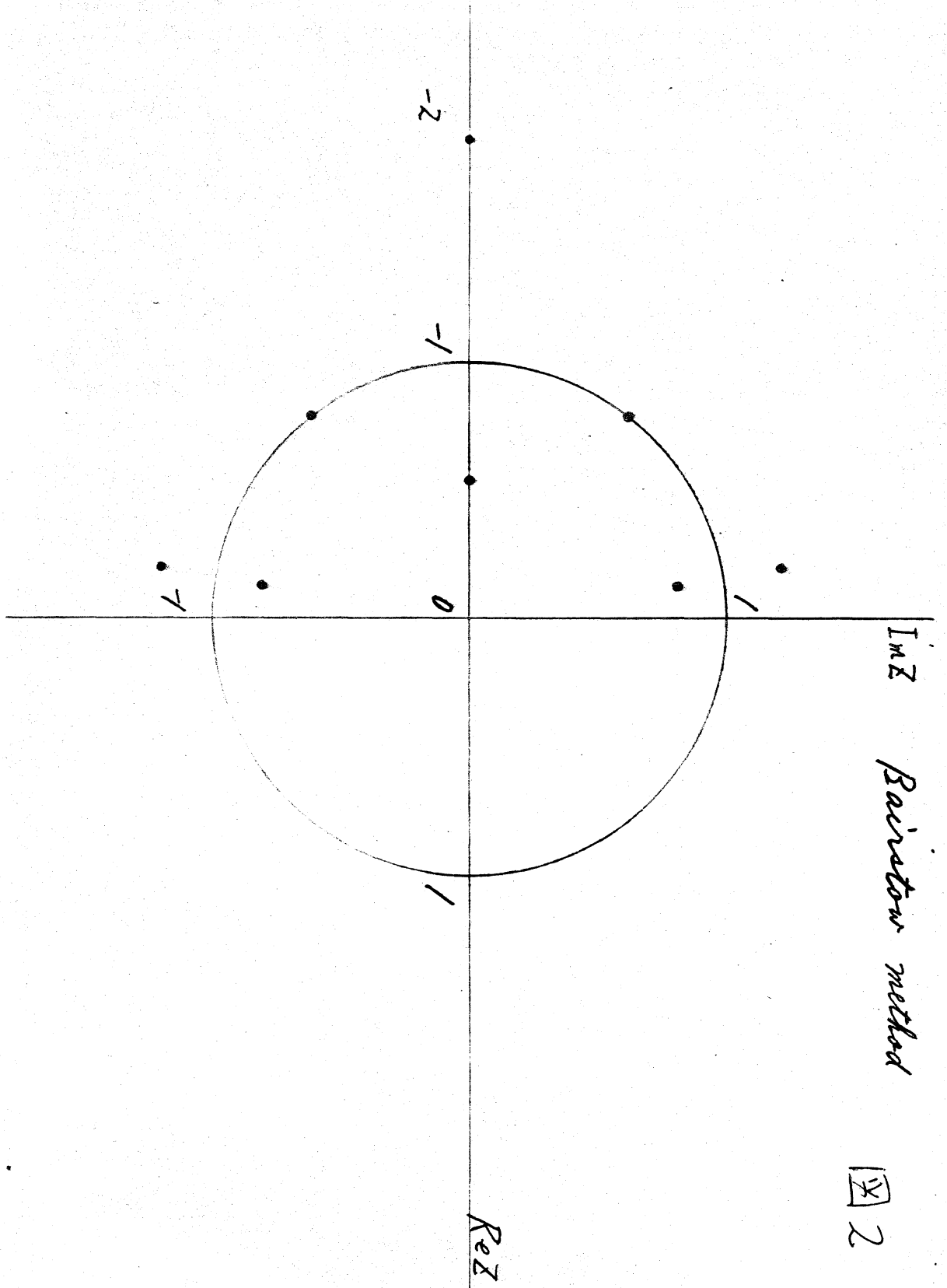
$$f(x) = (x+1)' = 0$$

图 1



McAuley method

$$x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 28x^2 + 8x + 1 = 0$$



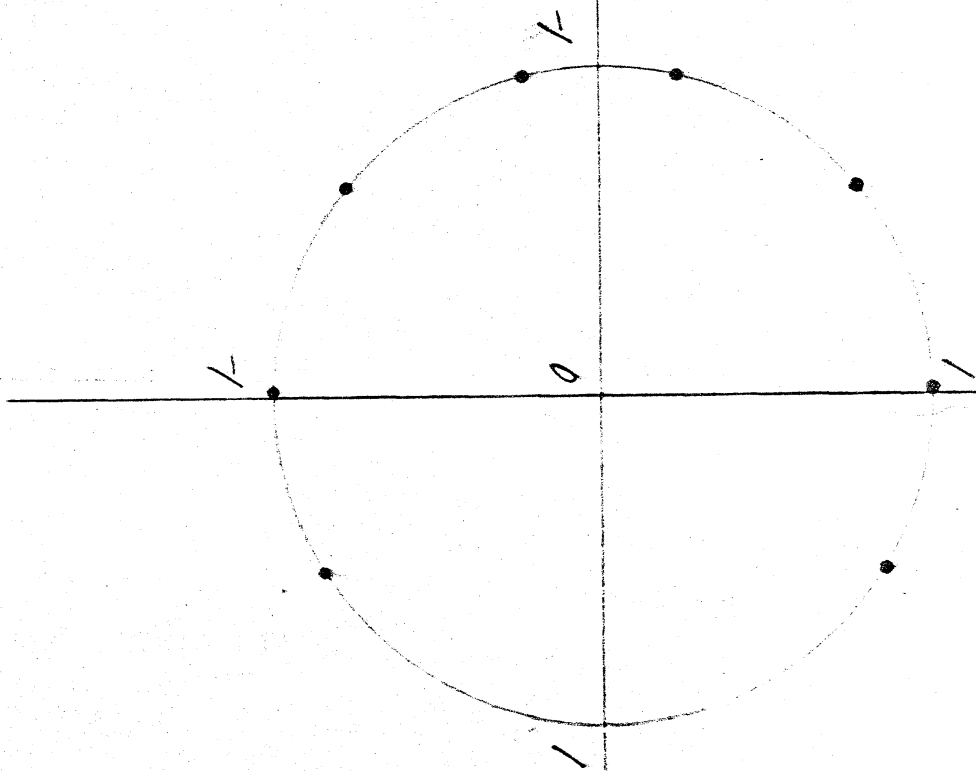
ml

harmonic method

图 3

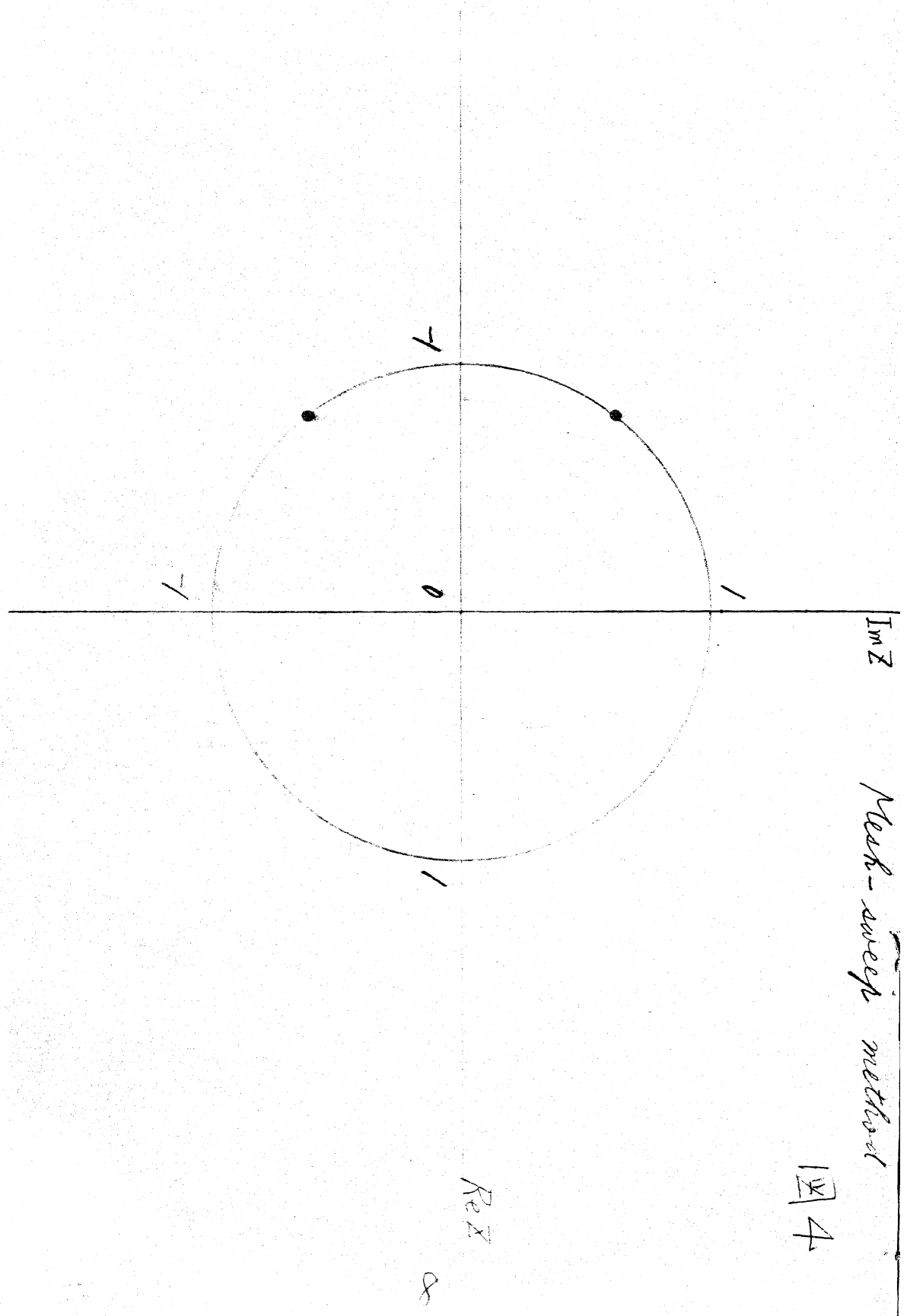
ReZ

∠



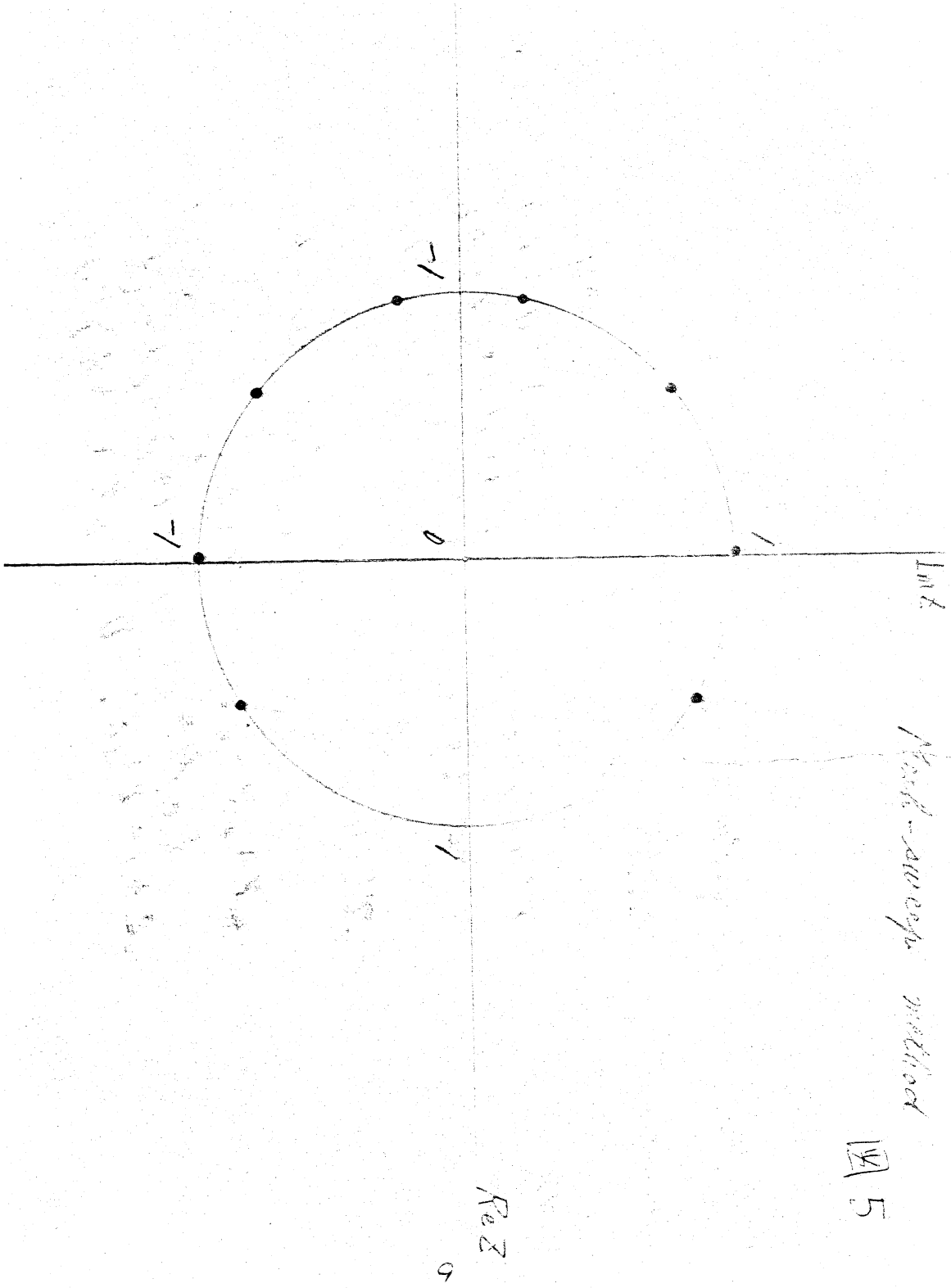
Peak-sweep method

图4



Root-locus method

Ex 5



$$Z = a_0 + a_1 (Z + 1 + Z^{-1}) + a_2 (Z^2 + Z + 1 + Z^{-1} + Z^{-2}) \\ + a_3 (Z^3 + Z^2 + Z + 1 + Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3}) \\ + a_4 (Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 + Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3} + Z^{-4})$$

$$Z + 1/Z = x, \quad f(x) = C_4 x^4 + C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0$$

$$C_0 = a_4 - a_3 - a_2 + a_1 + a_0 \quad f(x) = 0$$

$$C_1 = -2a_4 - 2a_3 + a_2 + a_1 \quad -2 < x_1, x_2, x_3, x_4 < 2 \dots \text{unit circle}$$

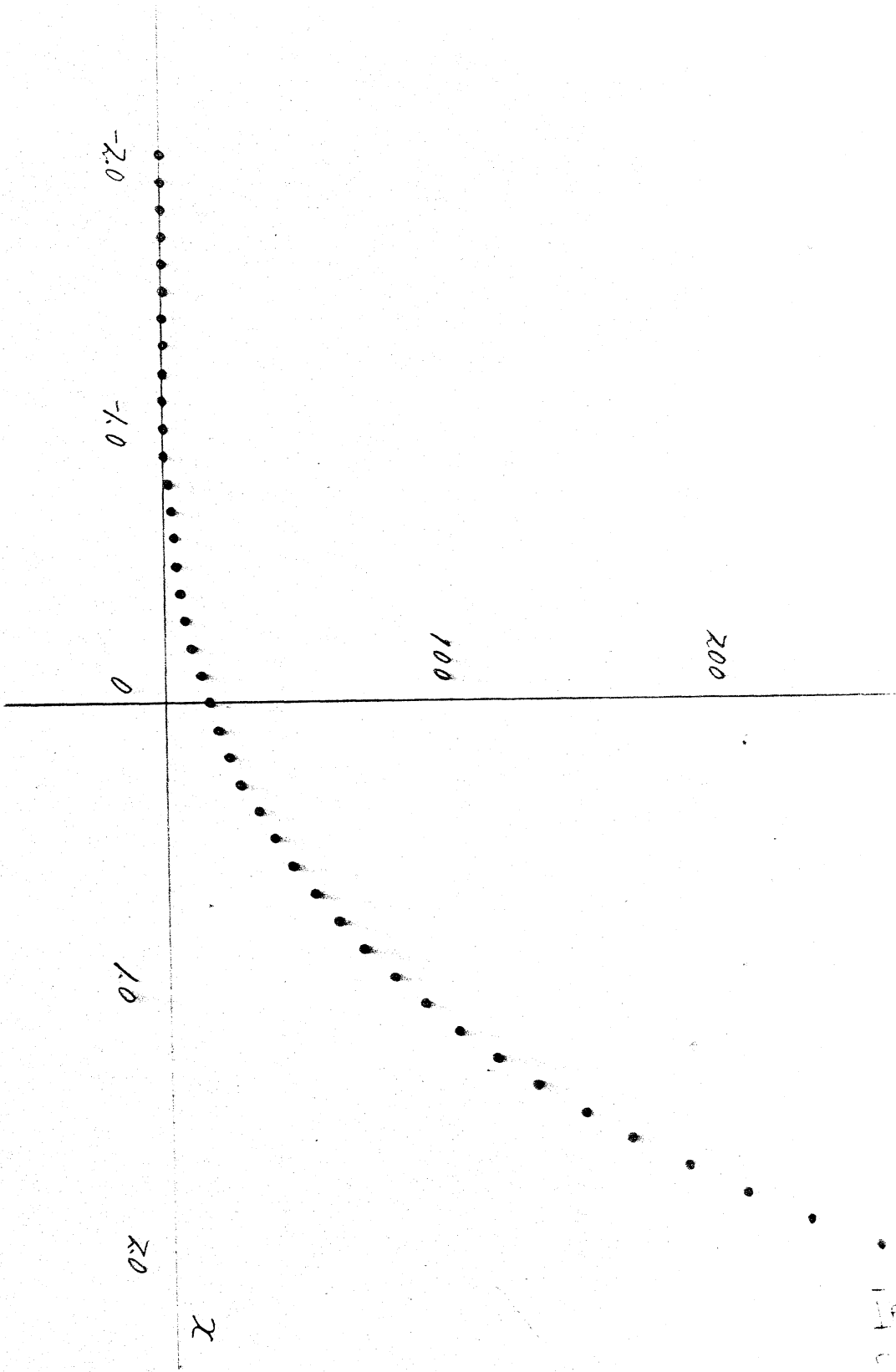
$$C_2 = -3a_4 + a_3 + a_2$$

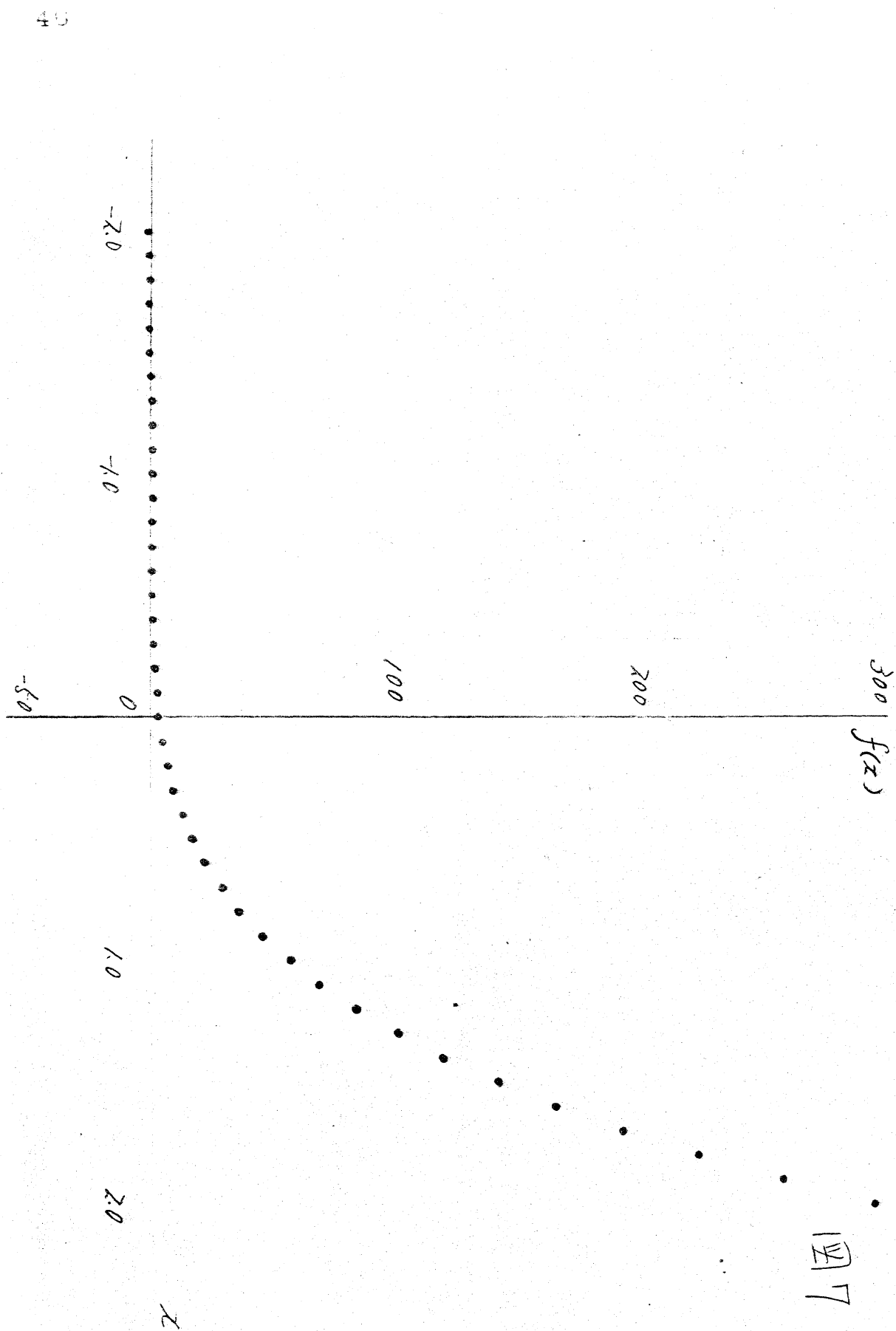
$$C_3 = a_4 + a_3 \quad x_i < -2 \dots \text{negative real}$$

$$C_4 = a_4$$

x_i complex ... not unit circle,

not negative
real





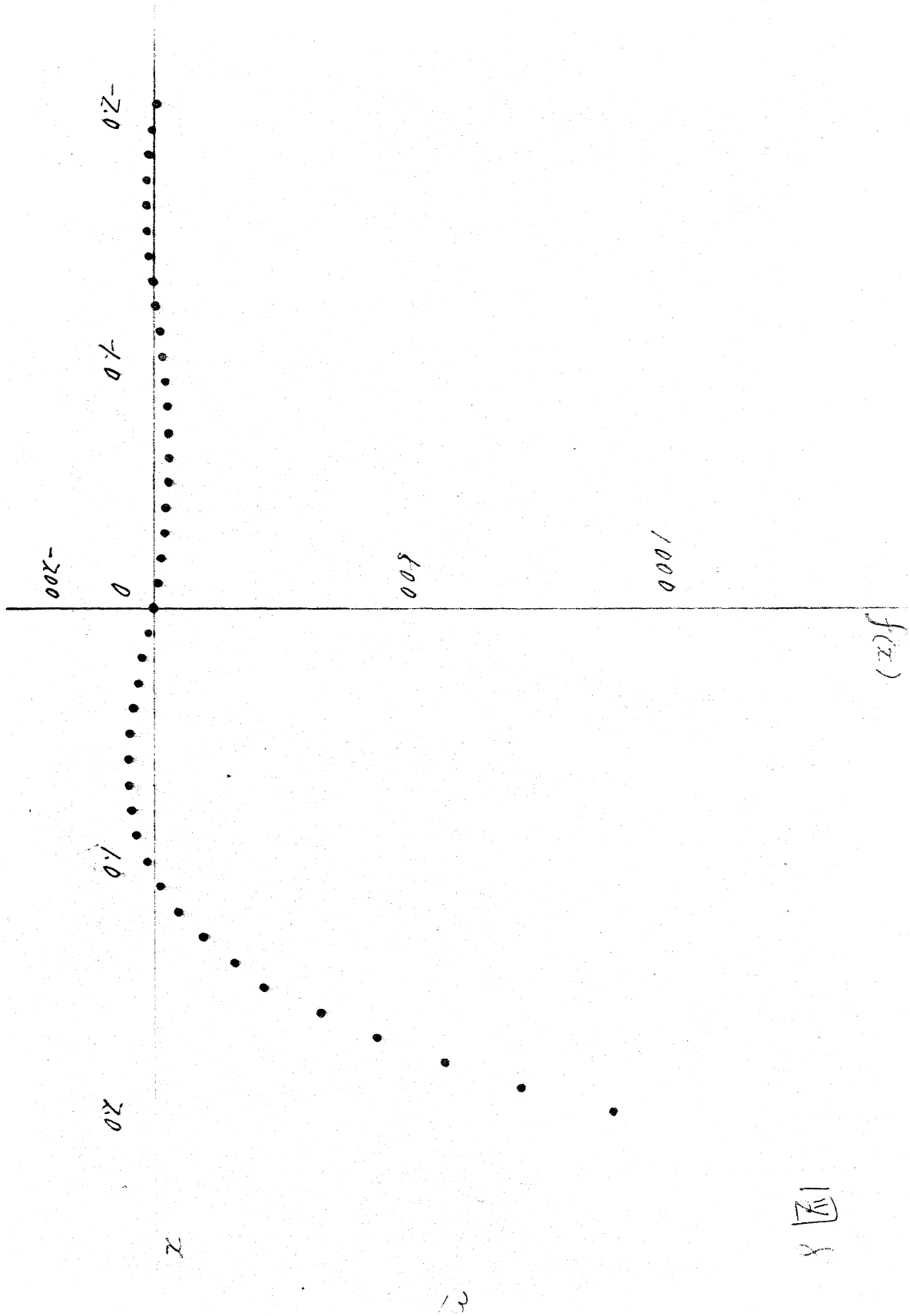
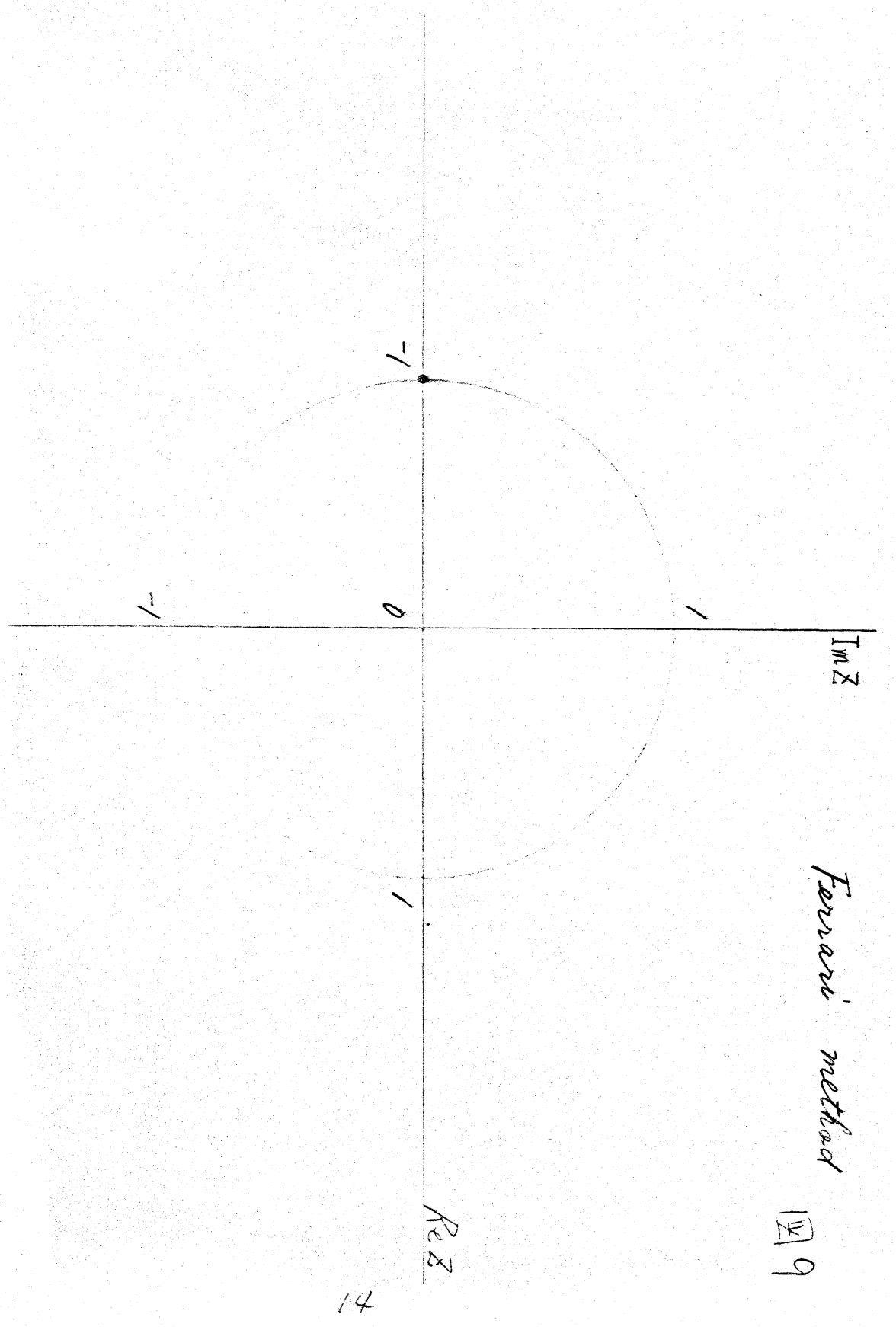
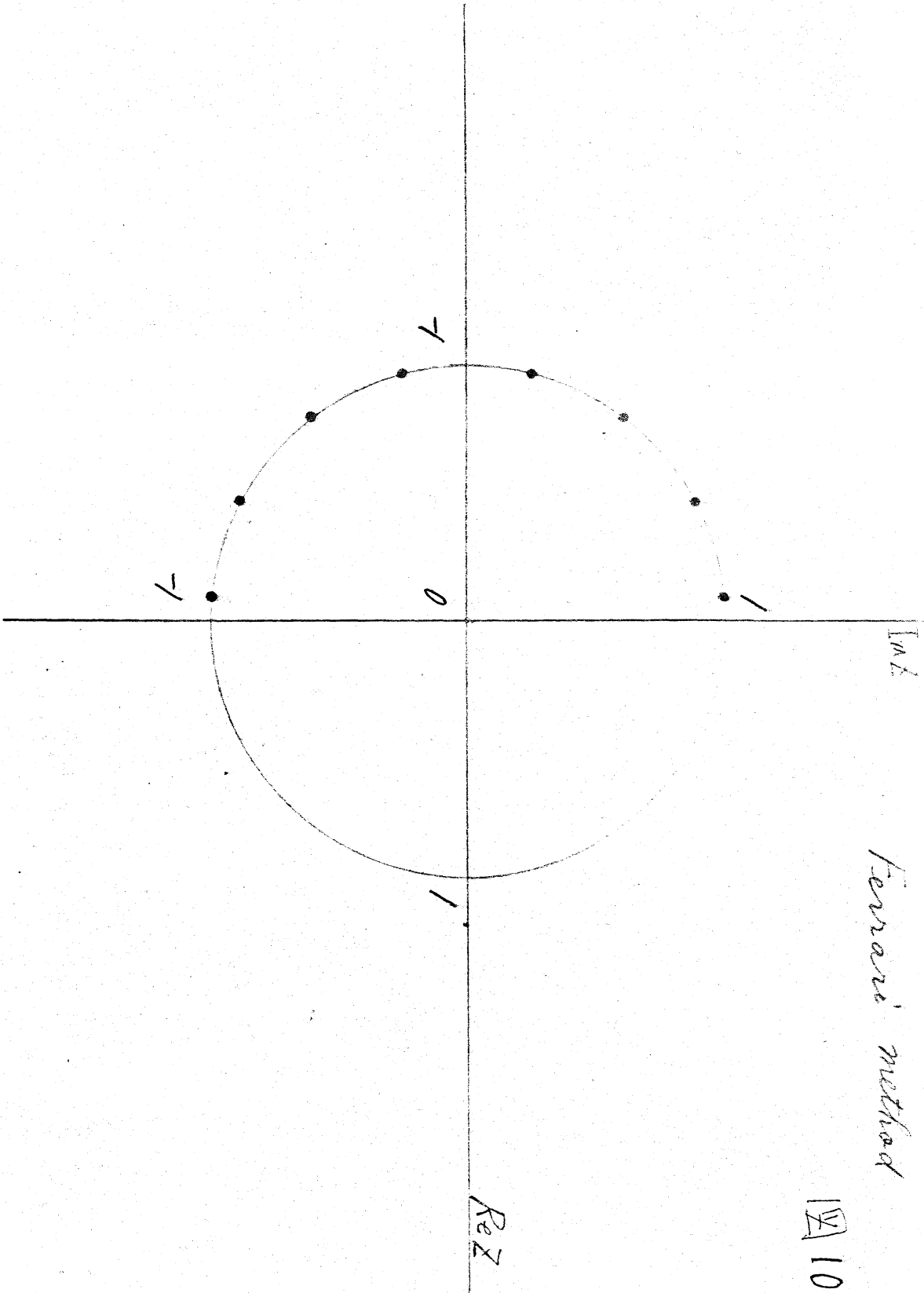


图 8

Ferrari's method Ex 9





Fermat's method

图 10

Ferrari method

图 11

