

群上の閉集合と群代数

都大理 佐伯貞浩

§ 1. 代数 $A(\hat{G})$

G を任意の局所コンパクト・アーベル群, dx をその Haar 測度とする. dx に関する L^1 空間 $L^1(G)$ にノルムを

$$(1.1) \quad \|f\|_1 = \int_G |f(x)| dx \quad (f \in L^1(G))$$

で定義し, 積を convolution

$$(1.2) \quad (f * g)(x) = \int_G f(x-y) g(y) dy \quad (x \in G; f, g \in L^1(G))$$

で定義すれば, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ が成立して, $L^1(G)$ は可換, 準単純, 正則なバナッハ代数となる.

さて $\hat{G}$ を G の指標群とすると, $f \in L^1(G)$ の Fourier 変換は,

$$(1.3) \quad \hat{f}(\gamma) = \int_G f(x) \overline{\gamma(x)} dx \quad (\gamma \in \hat{G})$$

で定義される. $\gamma \in \hat{G}$ を固定するとき, 対応 $f \longrightarrow \hat{f}(\gamma)$

は自明でない $L^1(G)$ の複素準同型写像を定め、又、この自明でない $L^1(G)$ の複素準同型写像はこの形に表わせられる。実際、 $\hat{G}$ は $L^1(G)$ のスペクトラムと同一視できる。

$L^1(G)$ の準単純性、即ち Fourier 変換の一意性によって、 $L^1(G)$ を $C(\hat{G})$ の部分代数として考える事が可能である。そこで

$$(1.4) \quad A(\hat{G}) = \{ \hat{f} : f \in L^1(G) \}$$

とおき、これにノルムを $\|\hat{f}\| = \|f\|_1$ で定義する。従って、 $A(\hat{G})$ は 1 つのバナッハ代数であって、 $A(\hat{G}) \subset C(\hat{G})$ は norm-decreasing embedding である。

今後、これらの記号を断りなく使用する。又、 G がコンパクトであるときは、常に $\int_G dx = 1$ とし、 G が無限デスクリートであるときは、1 点の Haar 測度は常に 1 であるとする。

例 1. $\mathbb{Z}$ を、整数全体が加法に關して作るデスクリートな群とする。このとき、 $f \in L^1(G)$ は絶対収束する数列

$$f = \{f(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}, \quad \|f\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$$

であり、 $f, g \in L^1(\mathbb{Z})$ の積は

$$(f * g)(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-m) g(m)$$

で定義される数列 $f * g = \{ (f * g)(m) \}_{m=-\infty}^{\infty}$ である。又 $\mathbb{Z}$ の指標群はトーラス T (circle group) で、 $f \in \mathcal{L}(\mathbb{Z})$ の Fourier 変換は

$$\hat{f}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) z^n \quad (z \in T)$$

で定義される単位円周上の連続関数である。よって $A(T)$ は、絶対収束する Fourier 級数を持つ連続な関数全体からなるバナッハ代数である。

例 2. $\mathbb{R}^n$ を、普通の加法と位相とを持った n 次元ユークリッド空間とすれば、 $\mathbb{R}^n$ の指標群は $\mathbb{R}^n$ 自身であって、 $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ の Fourier 変換は

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i x \cdot y} dy \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

そして、 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset A(\mathbb{R}^n)$ である。

定理 1.1. (a) $\hat{G}$ の指標群は G であり、 $\hat{G}$ がコンパクトであるための必要十分条件は、 G がデスクリータな事である。

(b) $\hat{G}$ が距離付け可能であるための必要十分条件は、 G が σ -コンパクトな事である。

(c) $\hat{G}$ がデスクリータでないならば、 $\hat{G}$ は距離付け可能な

無限コンパクト群, 又はそれの閉部分群として含む.

定理 1.2. $\hat{G}$ の任意の閉部分群 A に対して, $A(A) = A(G)$ である. 即ち, $f \in A(A)$ は, ある $F \in A(G)$ の A への制限と一致する.

定理 1.3. $f \in A(\hat{G})$, $\gamma_0 \in \hat{G}$, $f(\gamma_0) = 0$ とすれば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $g \in A(\hat{G})$ で

(i) $\|f - g\| < \varepsilon$, (ii) γ_0 のある近傍で $g = 0$,

(iii) $0 \leq g \leq 1$

を満たすものが存在する.

§ 2. $A(\hat{G})$ の閉イデアル.

よく知られている様に, $L^1(G)$ の閉部分空間がイデアルであるための必要十分条件は, それが平行移動で不変な事である. $L^1(G)$ の閉イデアル I [又は $A(\hat{G})$ の閉イデアル I'] に

$$\text{対して} \quad Z(I) = \bigcap_{f \in I} \{ \gamma \in \hat{G} : \hat{f}(\gamma) = 0 \}$$

$$\left[\text{又は } Z(I') = \bigcap_{f \in I'} \{ \gamma \in \hat{G} : f(\gamma) = 0 \} \right]$$

とおく. 明らかに, $Z(I)$ [又は $Z(I')$] は $\hat{G}$ の閉集合である.

さて E を $\hat{G}$ の任意の閉集合とする. このとき, $E = Z(I)$ となる $A(\hat{G})$ の閉イデアルが唯一つしか存在しないならば, E は S -集合であるという. 次に

$$I(E) = \{ f \in A(\hat{G}) : \hat{f}(y) = 0, \forall y \in E \}$$

$$I_0(E) = \{ f \in A(\hat{G}) : E \text{ のある近傍で } f = 0 \}$$

とおけば, $I(E)$ 及び $J(E) = \overline{I_0(E)}$ は各々, $Z(I) = E$ を満たす最大及び最小の閉イデアルである. 従って, E が S -集合である事と, $I(E) = J(E)$ である事とは同値である. 一般の, 可換・準単純・正則なバナッハ代数についても, 同じ事がいえる. もし E が開かつ閉ならば, $I(E) = J(E)$ であるから, E は S -集合である. 特に $\hat{G}$ がデスクリートならば, $\hat{G}$ のすべての (閉) 集合は S -集合である.

非 S -集合の最初の例は, L. Schwartz [11] により与えられた.

定理 2.1. R^3 の単位球面 $E = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$ は $A(R^3)$ に対する非 S -集合である.

証明. $C_c^\infty(R^3) \subset A(R^3)$ に注意して (例 2),

$$I_1 = \{ f \in L(R^3) : \hat{f} \in C_c^\infty, E \text{ 上で } \hat{f} = 0 \}$$

$$J_1 = \{ f \in I_1 : E \text{ 上で } (\partial/\partial x_1) \hat{f} = 0 \}$$

とおく. I_1, J_1 とともに平行移動によって不変だから, それらの L -閉包は $L(R^3)$ の閉イデアルである. 又容易にわかる様に,

$$Z(\bar{I}_1) = Z(\bar{J}_1) = E.$$

$\bar{I}_1 \neq \bar{J}_1$ を示すために, μ を E の面積測度 (但し $\mu(E)=1$) とする. このとき,

$$\hat{\mu}(x) = \int_E e^{i x \cdot y} d\mu(y) = \frac{\sin \|x\|}{\|x\|}$$

だから, すべての $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して, $|x_1 \hat{\mu}(x)| \leq 1$. よって

$$\Psi(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) x_1 \hat{\mu}(-x) dx \quad (f \in L^1(\mathbb{R}^3))$$

は $L^1(\mathbb{R}^3)$ 上の有界汎関数である. ところで, $\hat{f} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ なら

$$\begin{aligned} \Psi(f) &= \int_{\mathbb{R}^3} x_1 f(x) \left\{ \int_E e^{-i x \cdot y} d\mu(y) \right\} dx \\ &= \int_E \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} x_1 f(x) e^{-i x \cdot y} dx \right\} d\mu(y) \\ &= \int_E \left\{ i \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-i x \cdot y} dx \right\} d\mu(y) \\ &= i \int_E \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \hat{f} \right)(y) d\mu(y). \end{aligned}$$

よって $f \in J_1$ なら $\Psi(f)=0$. しかし $\Psi(f) \neq 0$ となる $f \in I_1$ が存在する. 従って, $\bar{J}_1 \neq \bar{I}_1$ となり, E は非 S -集合である.

(Q.E.D.). 又, 上の証明から直ぐわかる様に,

系. T^3 は $A(T^3)$ に対する非 S -集合を含む.

この Schwartz の結果 (1948) の後, Helson は次の定理を与えた (1952).

定理 2.2 ([1], [9]). もし $A(\hat{G})$ が

$$I \not\supset J \quad \text{かつ} \quad Z(I) = Z(J) = E$$

となる 2 つの閉イデアル I と J を含むならば, $I \not\supset K \not\supset J$ を満たす閉イデアル $K \subset A(\hat{G})$ が存在する.

又, Herz ([2], [3]) は, Cantor の 3 連集合 $\subset [0, 1]$ 及び $\mathbb{R}^2$ の単位円周が S -集合である事を示した (1956, 58). 非 S -集合の存在に関する最終的な結果は, Malliarin により与えられた (1959).

Malliarin の定理 ([5], [6], [7]). すべてのデスクリートでない $\hat{G}$ は $A(\hat{G})$ に対する非 S -集合を含む.

彼の最初の証明は非常に難解であったが, Kahane [4] が確率を用いて比較的容易な証明を与えた. その後, Varopoulos ([13], [14], [15]) は tensor 代数を用いて全く別の証明を与えた. ここでは彼の証明を述べる.

§ 3. テンソル代数

この章では、可換・準単純・正則なバナッハ代数を、単に B -代数とよぶことにする。

B_1, B_2 を 2 つの B -代数, π_1, π_2 をそれぞれのスペクトラム, $B_1 \hat{\otimes} B_2$ を π -ノルムに関するテンソル積 (1 つのバナッハ代数) とする。容易にわかる様に, $B_1 \hat{\otimes} B_2$ のスペクトラムは $\pi_1 \times \pi_2$ である。いま各 π_i から閉集合 E_i を取り,

$$I_i = I(E_i) \subset B_i$$

$$g_i : B_i \longrightarrow B_i/I_i \quad (\text{自然な写像})$$

$$g = g_1 \otimes g_2 : B_1 \hat{\otimes} B_2 \longrightarrow B_1/I_1 \hat{\otimes} B_2/I_2$$

とする。

定理 3.1. (a) $\mathcal{K} \equiv I_1 \otimes B_2 + B_1 \otimes I_2 = (B_1 \otimes B_2) \cap \ker g$.

(b) $\mathcal{K}$ は $\ker g$ で dense である。

(c) $B_1 \hat{\otimes} B_2 / \ker g \equiv B_1/I_1 \hat{\otimes} B_2/I_2$ (等長的)。

(d) もし $B_1/I_1 \hat{\otimes} B_2/I_2$ が準単純ならば, $\ker g = I(E_1 \times E_2)$.

証明. (a). 明らかに $\mathcal{K} \subset (B_1 \otimes B_2) \cap \ker g$ であるから逆を示せば良い。そのために $x \in (B_1 \otimes B_2) \cap \ker g$:

$$x = \sum_{i=1}^m x_1^{(i)} \otimes x_2^{(i)} \quad (x_1^{(i)} \in B_1, x_2^{(i)} \in B_2)$$

を任意に固定する。 $\{x_j^{(i)}\}_{i=1}^m$ から $\text{mod } I_j$ で 1 次独立な元の

極大集合 $\{e_j^{(k)}\}_k$ を取り出すと、 x は

$$x = \sum_j \sum_k \lambda(j, k) e_1^{(j)} \otimes e_2^{(k)} \quad (\text{mod } \mathcal{K})$$

の形に表わせる。 $x \in \ker q$ より

$$0 = q(x) = \sum_j \sum_k \lambda(j, k) q_1(e_1^{(j)}) \otimes q_2(e_2^{(k)})$$

となるが、 $\{q_1(e_1^{(j)}) \otimes q_2(e_2^{(k)})\}_{j,k}$ は $B_1/I_1 \otimes B_2/I_2$ の 1 次独立な元だから、すべての (j, k) に対して $\lambda(j, k) = 0$ である。従って $x \in \mathcal{K}$ を得る。

(b) 及び (c): $x \in B_1 \otimes B_2$ を固定する。 $\|q\| \leq 1$ より $\|q(x)\|_\pi \leq \|x + \mathcal{K}\|_a$ は明らか。逆の不等式を示すために $\varepsilon > 0$ を固定すると、 π -ノルムの定義から、

$$q(x) = \sum_{i=1}^n q_1(x_1^{(i)}) \otimes q_2(x_2^{(i)}) \quad (x_j^{(i)} \in B_j)$$

$$: \|q(x)\|_\pi + \varepsilon/2 > \sum_i \|q_1(x_1^{(i)}) \otimes q_2(x_2^{(i)})\|$$

又商ノルムの定義より $y_j^{(i)} \in x_j^{(i)} + I_j$ が存在して

$$\sum_i \|q_1(x_1^{(i)})\| \cdot \|q_2(x_2^{(i)})\| > \sum_i \|y_1^{(i)}\| \cdot \|y_2^{(i)}\| - \varepsilon/2.$$

よって $y = \sum y_1^{(i)} \otimes y_2^{(i)}$ とすると、 $q(x) = q(y)$ だから $y \in x + \mathcal{K}$ であり

$$\|q(x)\|_\pi + \varepsilon > \sum_i \|y_1^{(i)}\| \cdot \|y_2^{(i)}\| \geq \|y\|_\pi \geq \|x + \mathcal{K}\|_a.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから、前の不等式と合わせて

$$\|g(x)\|_{\pi} = \|x + \mathcal{K}\|_a = \|x + \overline{\mathcal{K}}\|_a \quad (x \in B_1 \otimes B_2)$$

を得る。この事からさらに (b) 及び (c) を得る。

(d): (a) 及び (b) から明らかに $Z(\ker g) = E_1 \times E_2$ である。一方仮定より、 $B_1/I_1 \hat{\otimes} B_2/I_2$ は準単純であるから、(c) によって $(B_1 \hat{\otimes} B_2)/\ker g$ も準単純でないといけない。従って、 $\ker g = I(E_1 \times E_2)$ である。

一般に、 K を任意のコンパクト・Hausdorff 空間とすると、 $C(K) \hat{\otimes} C(K)$ を $V(K)$ で表わす事にする。従って、 $V(K)$ のスペクトラムは $K \times K$ であり、バナッハ代数 $V(K)$ は可換・準単純・正則である (Tomiya [12])。

定理 3.2. $\hat{G}$ を任意のコンパクト群とする。このときもし $\hat{G}$ が $A(\hat{G})$ に対する非 S -集合を含めば、 $\hat{G} \times \hat{G}$ はテンソル代数 $V(\hat{G}) = C(\hat{G}) \hat{\otimes} C(\hat{G})$ に対する非 S -集合を含む。

証明. まず写像 $M: A(\hat{G}) \longrightarrow V(\hat{G})$ を

$$(Mf)(\alpha, \beta) = f(\alpha + \beta) \quad (f \in A(\hat{G}); \alpha, \beta \in \hat{G})$$

で定義すると、 $\|M\| \leq 1$ 。次に写像 $P: V(\hat{G}) \longrightarrow A(\hat{G})$ を

$$(Pf)(\alpha) = \int_{\hat{G}} f(\alpha - \beta, \beta) d\beta \quad (f \in V(\hat{G}); \alpha \in \hat{G})$$

で定義する。もし,

$$f \in V(\hat{G}) : f(\alpha, \beta) = \sum_1^\infty g_i(\alpha) h_i(\beta), \quad \sum_1^\infty \|g_i\|_\infty \cdot \|h_i\|_\infty < \infty$$

とすれば,

$$(Pf)(\alpha) = \sum_1^\infty \int_{\hat{G}} g_i(\alpha - \beta) h_i(\beta) d\beta = \sum_1^\infty (g_i * h_i)(\alpha)$$

となるから,

$$\begin{aligned} \|Pf\|_{A(\hat{G})} &\leq \sum_1^\infty \|g_i * h_i\|_{A(\hat{G})} = \sum_1^\infty \|\hat{g}_i \hat{h}_i\|_{L(G)} \\ &\leq \sum_1^\infty \|\hat{g}_i\|_2 \cdot \|\hat{h}_i\|_2 = \sum_1^\infty \|g_i\|_2 \cdot \|h_i\|_2 \leq \sum_1^\infty \|g_i\|_\infty \cdot \|h_i\|_\infty. \end{aligned}$$

従って, $\|P\| \leq 1$ である。更に任意の $f \in A(\hat{G})$ に対して,

$$((P \circ M)f)(\alpha) = \int_{\hat{G}} (Mf)(\alpha - \beta, \beta) d\beta = \int_{\hat{G}} f(\alpha) d\beta = f(\alpha).$$

$$\text{即ち } P \circ M : A(\hat{G}) \xrightarrow[\gg]{M} V(\hat{G}) \xrightarrow[\gg]{P} A(\hat{G})$$

において, $P \circ M$ は恒等写像, 従って特に M は等長写像である。

さて, $A(\hat{G})$ に対する非 S -集合 $E_1 \subset \hat{G}$, 及び $f \in I(E_1)$ で $f \notin J(E_1)$ となるものを取る。そして

$$E_2 = \{(\alpha, \beta) : \alpha + \beta \in E_1\} \subset \hat{G} \times \hat{G}$$

が $V(\hat{G})$ に対する非 S -集合である事を示そう。まず M の

定義から Mf は E_2 上で 0 であるから, $Mf \in \perp E_2$ である. 又容易に分かる様に

$$g \in I_0(E_2) \implies Pg \in I_0(E_1)$$

であるから,

$$\inf_{g \in I_0(E_2)} \|Mf - g\|_V \geq \inf_{g \in I_0(E_2)} \|P(Mf - g)\|_V$$

$$= \inf_{g \in I_0(E_2)} \|f - Pg\|_A \geq \inf_{h \in I_0(E_1)} \|f - h\|_A > 0.$$

従って, $Mf \notin J(E_2) = \overline{I_0(E_2)}$. 即ち E_2 は $V(\hat{G})$ に対する非 S -集合である (Q.E.D.).

補助定理 3.3. $\hat{G}_1, \hat{G}_2$ を 2 つのコンパクト・アーベル群とし, $V'(\hat{G}_1, \hat{G}_2) = L^\infty(\hat{G}_1) \hat{\otimes} L^\infty(\hat{G}_2)$ とおく. このとき $V'(\hat{G}_1, \hat{G}_2)$ は代数的に $L^\infty(\hat{G}_1 \times \hat{G}_2)$ の部分代数とみなせる. 即ち, 写像 $J : V'(\hat{G}_1, \hat{G}_2) \longrightarrow L^\infty(\hat{G}_1 \times \hat{G}_2)$ を

$$f = \sum_i g_i \otimes h_i : \sum_i \|g_i\|_\infty \|h_i\|_\infty < \infty$$

$$\xrightarrow{J} (Jf)(\alpha, \beta) = \sum_i g_i(\alpha) h_i(\beta) \in L^\infty(\hat{G}_1 \times \hat{G}_2)$$

で定義するとき, J は (1:1) である.

証明. Tomiyama の定理から, $f \neq 0$ に対して,

$$\langle f, F_1 \otimes F_2 \rangle = \sum_i \langle g_i, F_1 \rangle \langle h_i, F_2 \rangle \neq 0$$

を満たす $L(\hat{G}_j)$ 上の有界線形汎函数 $F_j \in [L(\hat{G}_j)]'$ が存在する。一方、 L の単位球は、 $[L']$ の単位球で $[L']$ の汎弱位相に関して dense であるから、

$$\langle f, f_1 \otimes f_2 \rangle = \sum_i \langle g_i, f_1 \rangle \langle h_i, f_2 \rangle \neq 0$$

を満たす $f_j \in L(\hat{G}_j)$ が存在する。このとき $f_1 \cdot f_2 \in L(\hat{G}_1 \times \hat{G}_2)$ であって、

$$\int_{\hat{G}_1 \times \hat{G}_2} (Jf) f_1 \cdot f_2 \, d\alpha = \sum_i \int_{\hat{G}_1 \times \hat{G}_2} (g_i \cdot h_i)(f_1 \cdot f_2) \, d\alpha = \langle f, f_1 \otimes f_2 \rangle \neq 0.$$

よって $Jf \neq 0$ である (Q.E.D.).

次に D_∞ を 2 進群, 即ち 2 個の元 $\{0, 1\}$ からなる群 $Z(2)$ の可附番直積群

$$D_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} Z_n(2) ; Z_n(2) = Z(2)$$

とする。このとき、距離付け可能・完全不連結・コンパクトな完全集合は D_∞ と同位相である。又、明らかに、任意の $\omega = 1, 2, 3, \dots, \aleph_0$ に対して、 D_∞^ω と D_∞ とは、同位相である。

補助定理 3.4. $D_\infty \times D_\infty$ は $V(D_\infty) = C(D_\infty) \hat{\otimes} C(D_\infty)$ に対する非 $\mathcal{S}$ -集合を含む.

証明. 最初に写像 $p: D_\infty \longrightarrow T^3$ を

$$x = \{x_n\}_n^\infty \in D_\infty \xrightarrow{p} p(x) = (p_0(x), p_1(x), p_2(x)) \in T^3$$

$$: p_j(x) = \exp\left[2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{3n+j}}{2^{n+1}}\right] \quad (j=0,1,2)$$

で定義すれば, これは D_∞ から T の上への連続な写像である. 容易に分かる様に, T^3 から D_∞ への Borel 写像で

$$\forall t \in T^3 : p(q(t)) = t$$

を満たすものが存在する.

次に, 2つの写像

$$V(T^3) \xrightarrow{P} V(D_\infty) \xrightarrow{Q} V'(T^3) = L^\infty(T^3) \hat{\otimes} L^\infty(T^3)$$

を次の様に定義する:

$$(Pf)(x, y) = f(p(x), p(y)) \quad (f \in V(T^3); x, y \in D_\infty)$$

$$(Qf)(s, t) = f(q(s), q(t)) \quad (f \in V(D_\infty); s, t \in T^3)$$

もち論, $V'(T^3) \subset L^\infty(T^3 \times T^3)$ とみなしての事である; これは前の補助定理から可能である. このとき, 明らかに

$\|P\| \leq 1$, $\|Q\| \leq 1$ であり, $\times f \in V(T^3)$ ならば $Q \circ P f = f$ が成立する.

さて, p^{-1} の系と定理 3.2 から, $T^3 \times T^3$ は $V(T^3)$ に対する非 S -集合 E を含む. いま, 写像

$$p^2 = p \times p : D_\infty \times D_\infty \longrightarrow T^3 \times T^3$$

に属する E の逆像を $\tilde{E} = (p^2)^{-1}(E)$ とし, $\tilde{E}$ が $V(D_\infty)$ に対する非 S -集合である事を示そう. そのためには, $J(E) \subseteq I(E) \subset V(T^3)$ であるから,

$$P^{-1}[J(\tilde{E})] = J(E) \text{ かつ } P^{-1}[I(\tilde{E})] = I(E)$$

を示せばよい. まず p^2 が "上へ" の写像である事に注意すると, 任意の集合 $S \subset T^3 \times T^3$ 及び $f \in V(T^3)$ に対して

$$S \text{ 上で } f = 0 \iff \tilde{S} = (p^2)^{-1}(S) \text{ 上で } Pf = 0$$

であるから, $P^{-1}[I(\tilde{E})] = I(E)$ 及び $P^{-1}[J(\tilde{E})] \supset J(E)$ を得る. 従って, $P^{-1}[J(\tilde{E})] \subset J(E)$ を示せば証明は終わる.

そこで, $0 \in T^3$ の各近傍 U に対して,

$$\chi_U \in C(T^3); \chi_U \geq 0, \text{ supp } \chi_U \subset U, \int_{T^3} \chi_U dt = 1$$

を取り, 写像 $\omega_U : V'(T^3) \longrightarrow V(T^3)$ を

$$(\omega_v F)(x, t) = \iint_{T^3 \times T^3} F(x-x', t-t') \chi_v(x') \chi_v(t') dx' dt'$$

で定義すると, 明らかに $\|\omega_v\| \leq 1$ である.

さて $f \in P^{-1}[J(\hat{E})]$ に対して, $\varepsilon > 0$ を任意に固定する.

$Pf \in J(\hat{E})$ であるから, $g \in I_0(\hat{E})$ が存在して,

$$\|Pf - g\|_{V(D_\infty)} < \varepsilon.$$

このとき $\emptyset = (\text{supp } g) \cap \hat{E} = (\text{supp } g) \cap [(p^*)^{-1}E]$ であるから,

$p^2(\text{supp } g) \cap E = \emptyset$ となる. 従って $0 \in T^3$ の近傍 U_1 を適当にとると,

$$[p^2(\text{supp } g) + U_1 \times U_1] \cap E = \emptyset$$

となる. 一方 $(Q \circ P)f = f$ に注意すれば, ある $0 \in T^3$ の近傍 U_2 が存在して,

$$U \subset U_2 \implies \|f - \omega_v[(Q \circ P)f]\|_{V(T^3)} < \varepsilon$$

が成立する. よって $U = U_1 \cap U_2$ とおけば,

$$\omega_v[Qg] \in I_0(E) \quad \because \text{supp } \omega_v[Qg] \subset p^2(\text{supp } g) + U \times U$$

であって,

$$\|f - \omega_v[Qg]\|_{V(T^3)} \leq \|f - \omega_v[(Q \circ P)f]\| + \|\omega_v \circ Q[Pf - g]\|$$

$\|\omega_0 \circ Q\| \leq \|\omega_0\| \|Q\| < 1$ であるから、この不等式の右辺は 2ε でおさえられる。 $\varepsilon > 0$ は任意だから、これは f が $I_0(E)$ の元で任意に近似される事を意味する。よって $f \in J(E)$ (Q.E.D.).

§ 4. テンソル代数と群代数

E を $\hat{G}$ の任意のコンパクト・完全不連結な集合とする。

$|f|=1$ となる任意の $f \in \mathbb{C}(E)$ 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$(4.1) \quad \sup_{x \in E} |f(x) - (x, y)| < \varepsilon$$

となる $x \in G$ が存在するとき、 E を Kronecker 集合 (又は K_∞ -集合) という。又、ある正整数 $m \geq 2$ が存在して、 $\{f(x)\}^m = 1$ となる任意の $f \in \mathbb{C}(E)$ 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対して、(4.1) を満たす $x \in G$ が存在するとき、 E を K_m -集合という。以下 m は 2 以上の整数又は記号 ∞ を表わすものとする。

いま、 $\hat{G}$ を距離付け可能・ P を $\hat{G}$ の完全部分集合とすれば、 $y_0 \in \hat{G}$ が存在して、 $P + y_0$ はある K_m -集合を含む ([8], [15])。[証明は多少めんどうであるが、それほど難しくはない。] 従って特に、デスクリートでない $\hat{G}$ は、定理 1.1 によって、ある K_m -集合を含む。

K_m 集合はいくつかの興味ある性質を持つ。たとえば、それは独立であり、従って、それにより生成される部分群は ($\hat{G}$ がデスクリートでない限り) Haar 測度が 0 である。更にすべての K_m -集合は S -集合である ([13],[10])。ここで必要とするのは:

定理 4.1. E を $\hat{G}$ の K_m -集合とする。このとき任意の $f \in C(E)$ に対して,

$$F \in A(\hat{G}) : \|F\|_A \leq 3 \|f\|_\infty, F|_E = f$$

を満たす F が存在する。

次に E を $\hat{G}$ の任意のコンパクト集合とする。このとき、商代数 $A(\hat{G})/I(E)$ のスペクトラムは E であり、 $A(\hat{G})/I(E)$ は E 上の函数代数 $A(E)$ として表現される:

$$A(\hat{G})/I(E) = A(E) \equiv \{ \hat{f}|_E : \hat{f} \in A(\hat{G}) \}.$$

よって今後常に $A(E)$ には $A(\hat{G})/I(E)$ の商ノルムを代入して考える事にする。従って、定理 4.1 は、すべての K_m -集合 E に対して,

$$A(E) \cong C(E) \quad (\text{代数的に同型; ノルム同値})$$

である事を示している。

定理 4.2. $\hat{G}$ をコンパクト, E_1 と E_2 とをその互に交わらない閉部分集合として,

$$E^* = E_1 \cup E_2, \quad \hat{E} = E_1 + E_2 \subset \hat{G}$$

とおく. このとき, もし E^* が K_m -集合であれば,

$$A(\hat{E}) \equiv A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2) \cong C(E_1) \hat{\otimes} C(E_2).$$

最初に次の事を証明する.

補助定理. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次の性質を持つ定数 $\eta(\varepsilon) > 0$ が存在する: $\hat{G}$ をコンパクト, E をその任意の閉部分集合とする. しかば,

$$\sup \{ |(x, \gamma) - (y, \gamma)| : \gamma \in E \} < \eta(\varepsilon)$$

を満たす任意の $x, y \in G$ に対して

$$\|x|_E - y|_E\|_{A(E)} < \varepsilon.$$

証明. T 上の函数 $g(t) = 1 - t$ ($|t| = 1$) を考えると, $g \in A(T)$ かつ $g(1) = 0$. よって, p-4 の定理 1.3 より $h \in A(T)$ で

$$\|g - gh\| < \varepsilon, \quad \text{かつ } 1 \text{ の近傍で } h = 0$$

を満たすものが存在する. ここで $f = g - gh$ とおくと, ある $\eta(\varepsilon) > 0$ が存在して,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n t^n \quad ; \quad \|f\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n| < \varepsilon$$

かつ

$$t \in T, \quad |1-t| < \eta(\varepsilon) \implies f(t) = 1-t$$

となる. いま $x, y \in G$ が上記の仮定を満たすとして

$$F(y) = (x, y) f((y-x, y)) \quad (y \in \hat{G})$$

とおけば, $\|F\|_A \leq \sum |\alpha_n| < \varepsilon$ であり, しかも

$$|1 - (y-x, y)| < \eta(\varepsilon) \implies F(y) = (x, y) - (y, y).$$

よって, $\|x|E - y|E\|_{A(E)} = \|F\|_{A(E)} \leq \|F\|_{A(G)} < \varepsilon$ (Q.E.D.).

定理 4.2 の証明. 仮定より $E_1 \cup E_2$ は K_m -集合であるから E_1 と E_2 も K_m -集合である. よって前に注意した事から,
 $A(E_j) \cong C(E_j)$ となり,

$$A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2) \cong C(E_1) \hat{\otimes} C(E_2)$$

を得る. 従って, 特に $A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2)$ は準単純である. 一方よく知られている様に, $A(\hat{G} \times \hat{G}) = A(\hat{G}) \hat{\otimes} A(\hat{G})$ であるから, p-8 の定理 3.1 を適用して

$$A(E_1 \times E_2) \equiv A(\hat{G}) \hat{\otimes} A(\hat{G}) / I(E_1 \times E_2) \equiv A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2).$$

次に、写像

$$A(G) \xrightarrow{\lambda} A(E_1 \times E_2) : \lambda f(e_1, e_2) = f(e_1 + e_2)$$

を考えると、明らかに $\|\lambda\| \leq 1$ であって λ は準同型である。

しかも $\ker \lambda = I(E_1 + E_2) = I(\hat{E})$ であるから、写像

$$A(\hat{E}) \xrightarrow{\lambda} A(E_1 \times E_2) : \lambda g(e_1, e_2) = g(e_1 + e_2)$$

は、 $\|\lambda\| \leq 1$ を満たす 1対1 の準同型写像である。

従って λ が等長写像である事を示せば証明は終わる。このために、 $f \in A(E_1 \times E_2) : \|f\| < 1$ 及び $\varepsilon > 0$ を任意に固定する。 $A(E_1 \times E_2) = A(\hat{G} \times \hat{G}) / I(E_1 \times E_2)$ だから、

$$F \in A(\hat{G} \times \hat{G}) : F = \sum_{g \in G^2} \alpha_g \varphi$$

$$\|F\|_{A(\hat{G})} = \sum_g |\alpha_g| < 1$$

で $F|_{E_1 \times E_2} = f$ となるものが存在する。仮定より $E_1 \cup E_2$ は K_m -集合だから、任意の $g \in G^2$ 及び $\eta > 0$ に対して、

$$\sup \{ |\varphi(e_1, 0) - \chi(e_1)| : e_1 \in E_1 \} < \eta$$

かつ

$$\sup \{ |\varphi(0, e_2) - \chi(e_2)| : e_2 \in E_2 \} < \eta$$

を満たす $\alpha = \alpha_{\varphi, \eta} \in G$ が存在する。よって, $\forall \varphi \in G^2$ に対し,

$$\sup \{ |\varphi(e_1, e_2) - \alpha_{\varphi}(e_1 + e_2)| : e_1 \in E_1, e_2 \in E_2 \} < \eta(\varepsilon)$$

を満たす $\alpha_{\varphi} \in G$ が取れる; こゝに, $\eta(\varepsilon)$ は補助定理で与えた定数である。そこで

$$g = \sum_{\varphi} \alpha_{\varphi}(\alpha_{\varphi} | \tilde{E}) \in A(\tilde{E})$$

とおけば,

$$\|g\|_{A(\tilde{E})} \leq \sum_{\varphi} |\alpha_{\varphi}| < 1,$$

$$\|f - \lambda g\|_{A(E)} = \|F|E - \lambda g\|_{A(E)} \quad (E = E_1 \times E_2)$$

$$\leq \sum_{\varphi} |\alpha_{\varphi}| \|\varphi|E - \lambda \alpha_{\varphi}\|_{A(E)}$$

$$\leq \sum_{\varphi} |\alpha_{\varphi}| \varepsilon < \varepsilon.$$

即ち次の事が示された:

$$(\forall f \in A(E): \|f\| < 1)(\forall \varepsilon > 0)(\exists g \in A(\tilde{E}): \|g\| < 1)$$

$$: \|f - \lambda g\| < \varepsilon.$$

この事と λ が $\|\lambda\| \leq 1$ なる 1対1 写像である事から, λ は等長写像である. 以上により, 定理 4.2 の証明は完全に終わる. (Q. E. D.).

定理 4.3. デスクリートでないすべての $\hat{G}$ は,

$$(*) \quad A(E) \cong V(D_\infty) = C(D_\infty) \hat{\otimes} C(D_\infty)$$

を満たすコンパクト集合 E を含む.

証明. デスクリートでない $\hat{G}$ を固定する. いま $\hat{G}$ のある内部分群 Λ が $(*)$ を満たすコンパクト集合 E を含んだとする. このとき写像

$$r = q \circ p : A(\hat{G}) \xrightarrow{p} A(\Lambda) \xrightarrow{q} A_\Lambda(E) = A(\Lambda) / I_\Lambda(E) \\ (\quad I_\Lambda(E) \subset A(\Lambda))$$

を次の形に定義する:

$$p(F) = F|_\Lambda \quad (F \in A(\hat{G}))$$

$$q(f) = f|_E \quad (f \in A(\Lambda)).$$

そうすると, p は定理 1.2 によって $A(\hat{G})$ を $A(\Lambda)$ の上に写像し, q も定義から $A(\Lambda)$ を $A_\Lambda(E)$ の上に写像する. そして容易に分かる形に, $\ker r = I_\Lambda(E) \subset A(\hat{G})$ であるから, r は写像

$$A_{\hat{G}}(E) = A(\hat{G})/I_{\hat{G}}(E) \xrightarrow{1:1} A_A(E) = A(A)/I_A(E)$$

を生じ、これは“上へ”のノルム減少・準同型写像である。

$A_A(E)$ は準単純だから、結局

$$A_{\hat{G}}(E) \cong A_A(E) \cong V(D_{\infty})$$

となり、定理の結論は $\hat{G}$ に対しても成立する。だから、 $\hat{G}$ の適当な閉部分群 A が定理の結論を満たす事を示せばよい。

$\hat{G}$ はデスクリートでないから、定理 1.1 の (c) により、距離付け可能な無限群 A 又は R をその閉部分群として含む。最初の場合、 A は D_{∞} に同位相の集合 E^* を含むから、 E^* を2つの交わらないコンパクト集合 E_1, E_2 に分割し $E = E_1 + E_2$ とおく。このとき、定理 4.2 より E は④を満たす。次に $\hat{G}$ が R を閉部分群として含む場合は、まずトーラス T を考える。上の議論を T に適用して、 T は $A_T(E) \cong V(D_{\infty})$ を満たすコンパクト集合 E を含む。 E を適当な方法で、 R の部分集合と同一視すれば、 $A_R(E) \cong A_T(E)$ が成立する。よってこの場合の証明も終わる。(Q.E.D.)

Malliarin の定理の証明。以上の定理をもとにして、p-7 で述べた Malliarin の定理の証明を与える。 $\hat{G}$ を任意

のデスクリートでない局所コンパクト・アーベル群とする。
 定理 4.3 から $\hat{G}$ は $A(E) \cong V(D_\infty)$ を満たすコンパクト
 集合 E を含む。一方 $D_\infty \times D_\infty$ は $V(D_\infty)$ に対する非 S -集合を含
 むから (p-14), E も $A(E)$ に対する非 S -集合 E_1 を含む。
 よって $A(E)$ は $Z(I) = Z(J) = E_1$ となる 2 つの異なる
 両イデアル I と J を含む。そこで $A(\hat{G})$ から $A(E)$
 の上への自然な準同型写像を p として, $I_1 = p^{-1}(I)$,
 $J_1 = p^{-1}(J)$ とおけば, I_1 と J_1 は $A(\hat{G})$ の異なる両
 イデアルであって, $Z(I_1) = Z(J_1) = E_1$. 従って, E_1
 は $A(\hat{G})$ に対する非 S -集合である. (Q. E. D.).

系. K を, ある無限コンパクト群に同位相のコンパクト集
 合とすれば, $K \times K$ は テンソル代数 $V(K)$ に対する非
 S -集合を含む.

証明. Malliaris の定理と p-10 の定理 3.2 から
 明らか.

文 献 表

- [1] H. Helson, On the ideal structure of group algebras.
Arch. Mat. 2, 83-86 (1952)
- [2] C.S. Herz, Spectral synthesis for the Cantor set.
Proc. Nat. Acad. Sci. US. 42, 42-43 (1956).
- [3] ———, Spectral synthesis for the circle.
Ann. Math. 68, 709-712 (1958).
- [4] J. P. Kahane, Sur un théorème de Paul Malliarin.
C. R. Acad. Sci. Paris 248, 2943-2944 (1959).
- [5] P. Malliarin, Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale dans une algèbre de fonctions presque périodiques.
C. R. Acad. Sci. Paris 248, 1756-1759 (1959).
- [6] ———, Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite. Ibid. 2155-2157 (1959).
- [7] ———, Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts.
Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. Paris, 61-68 (1959).
- [8] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Intersc. New York, 1962.
- [9] S. Sasaki, An elementary proof of a theorem of H. Helson.
Tohoku Math. Jour., 20, 244-247 (1968)
- [10] ———, On Kronecker sets homeomorphic to the unit interval.

To appear.

[11] L. Schwartz, sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes noncompacts.

C. R. Acad. Sci. Paris 227, 424-426 (1948).

[12] J. Tomiyama, Tensor products of commutative Banach algebras, Tôhoku Math. Jour., 12, 147-154 (1960).

[13] [14] N. Th. Varopoulos, sur les ensembles parfaits et les séries trigonométriques, C. R. Acad. Sci. Paris, 260
4668-4670, 5165-5168 (1965)

[15] ———, Tensor algebras & Harmonic analysis.
Acta. Math., 119, 51-112 (1967).