

$$\text{On } u_t(x, t) - \Delta u(x, t) + f(u(x, t-r), u(x, t)) = 0$$

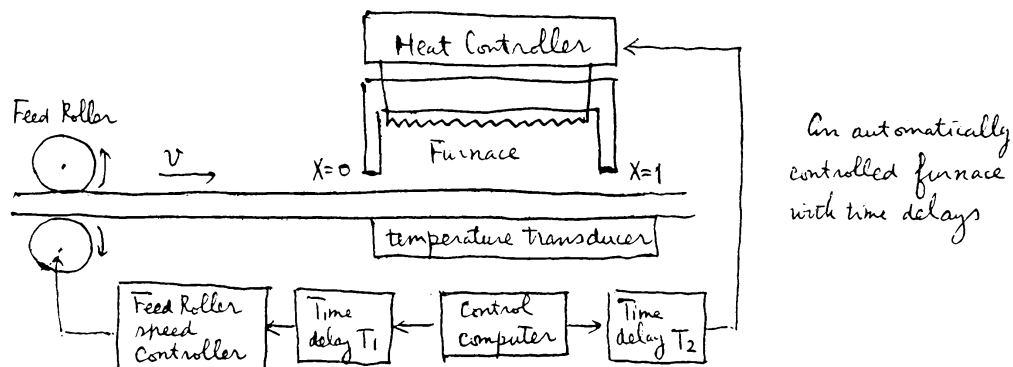
玄大理 井上 淳

§1. 問題と結果 まず, これは 玄大理学部の吉田清, 宮川鉄朗氏との共同研究であることをお断りしたい.

問題 Ω を $\mathbb{R}^n$ の領域とし, 次の初期境界値問題を考える.

$$(1.1) \quad \begin{cases} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) + f(u(x, t-r), u(x, t)) = 0 & \text{in } Q = \Omega \times (0, T), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(x, t) = \varphi(x, t) \end{cases} \quad \text{for } -r \leq t \leq 0$$

問題の由来 (a) P.K.C. Wang [4] によると, 遅れを伴う自動制御付熔鋸炉の温度 $u(x, t)$ は次式を満たす.



$$(1.2) \quad u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t) + v(g(u(x, t-T_1))) u_x(x, t) + c(f(u(x, t-T_2)) - u(x, t))$$

$$0 < x < 1$$

ここで, v は 時間遅れ T_1 をもつ温度分布 $u(x, t-T_1)$ の空間平均によって決まるベルトコンベアーの速度, f, c ともに既知関数(装置によって決まってくる).

(b) C. C. Travis-G. F. Webb [2] は以下の方程式を考え, J. Hale が ordinary functional differential equations に対して行った考察を, その場合について行った.

$$(1.3) \quad \begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + f(t, u(x, t-r)) & 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & 0 \leq x \leq \pi, \quad -r \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Wang [3] [4] の場合も, Travis-Webb [2] の場合も, 考えている非線型項は Lipschitz 連続. 我々は以下で非線型項が locally Lipschitz 連続の場合を考える.

Ω を $\mathbb{R}^3$ の有界領域で境界 $\partial\Omega$ は滑めらかとする. ('有界'の仮定は本質的でない). (1.1) の非線型項 $f(a, b)$ は (I) a^3 , (II) a^2b , (III) ab^2 とする. $\mathbb{R}^3$ で 3 次の非線型項を考えるのは $H_0^1 \subset L^6$ なる Sobolev の埋蔵定理を使うためである. $\mathbb{R}^n$ で一般的な非線型項を考えるには, たとえば J. E. Segal [1] の方法を用いるのがよいと思われるが, ここではふれない.

以下、(2) の場合に限って、得られている結果を述べよう。

$A \in D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $Au = -\Delta u$ for $u \in D(A)$ と定義し、

(1.1) ε

$$(1.4) \quad \begin{cases} u(t) = e^{-tA} \varphi(0) - \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(x, s-r), u(x, s)) ds \\ u(t) = \varphi(t) \end{cases} \quad -r \leq t \leq 0$$

と変形し、 $f(u(x, s-r), u(x, s)) = u(x, s-r)^3$ の場合について述べる。

定理 1 任意の $\varphi \in C([-r, 0]; H_0^1(\Omega))$ に対し、(1.4) を満たす一意の解 $u \in C([r, \infty); H_0^1(\Omega))$ が存在する。

定理 2 $\varphi \in C([-r, 0]; H_0^1(\Omega))$ が $\varphi(0) \in D(A)$, $\varphi_t \in C([r, 0]; H_0^1(\Omega))$ 及び $\varphi_t(0) = -A\varphi(0) - \varphi^3(-r)$ を満たすとき、上で求められた解 u は $C([0, \infty); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ に属し、かつ $u_t \in C([r, \infty); H_0^1(\Omega))$ 。

次に T を固定し、 $r_N = \frac{T}{N}$ とおく。 N を $r_N < r$ なるように十分大きくとる。 u_N を次式の解とする

$$(1.5)_N \quad \begin{cases} u(t) = e^{-tA} \varphi(0) - \int_0^t e^{-(t-s)A} u^3(s-r_N) ds & t > 0 \\ u(t) = \varphi_N(t) & -r_N \leq t \leq 0 \end{cases}$$

但し $\varphi_N(t) = \varphi(t)$ の $-r_N \leq t \leq 0$ への制限。この u_N が $r_N \rightarrow 0$ のとき

$$(1.6) \quad u(t) = e^{-tA} \varphi(0) - \int_0^t e^{-(t-s)A} u^3(s) ds$$

の解 u に収束するかどうか考える

定理3 初期関数 $\varphi(t)$ が十分小さいとする。このとき
 $\{u_n\}$ は (1.6) の解 u に $L^2(Q)$ の中で収束する。

更に、我々は (1.4) の解 u につき 次のことを示せる。

定理4 初期関数 $\varphi(t)$ が十分小さいとする。このとき
 初期関数 φ による定数 R_1' (これには無関係) があって

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq R_1'$$

が成り立つ。

§2. 結果の証明 及び、より詳しい結果については
 著者の論文: Some properties of solutions for semi-linear heat
 equations with time-lag preprint (投稿中)
 を参照されたい。

参考文献

- [1] I. E. Segal: Dispersion for non-linear relativistic equations II.
 Ann. Eccl. Norm. Sup. 1 ('68) 459-497
- [2] C. C. Travis-G. F. Webb: Existence and stability for partial
 functional differential equations. Trans. A. M. S. 200 ('74) 395-418
- [3] P. K. C. Wang: Optimal control of parabolic systems with boundary
 conditions involving time delays. SIAM J. Control 13 ('75) 274-293
- [4] ———: Asymptotic stability of a diffusion system with time-delays
 J. Appl. Mech. Ser. E 30 ('63) 500-508