

公理的ポテンシャル論における Duality と Cohomology

早大理工 郡 敏昭

$(X, \mathcal{H})$ を non-compact な Brelot の調和空間とする。
 X の一点コンパクト化を $Y = X \cup \{\infty\}$ とし Y 上の sheaf $\mathcal{O}$
が $\mathcal{O}|_X = \mathcal{H}$ となるように与えられているとしよう。この
とき 1 次コホモロジー群 $H^1(Y, \mathcal{O})$ を調べたい。これは
次の問題の公理的とりあつかいである。2 階楕円型方程
式の斉次解のつくる層を $\mathcal{H}$ とし、それが境界条件を与えられ
たときの層を $\mathcal{O}$ とするとき $H^1(Y, \mathcal{O})$ を調べること。わ
れわれはさらに Duality を調べる。すなわち adjoint な層
 $\mathcal{H}^*$ についてその dual が X に台をもつ 1 次コホモロジー群
 $H_c^1(X, \mathcal{H})$ であることを見る。そして $H_c^1(X, \mathcal{H})$ の余次元
が 1 の部分空間と $\Gamma(Y, \mathcal{O}^*)$ とが dual になっていること
を見る(ただし最後の主張は $\Gamma(Y, \mathcal{O}) \neq 0$ のとき)。次の
alternative が成り立つ。

- (i) $\mathcal{O}_Y = \{0\} \Rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}) = \{0\}, \Gamma(Y, \mathcal{O}^*) = \{0\},$
このとき $\exists$ global な基本解 = グリーン函数。

$$(ii) \quad \mathcal{O}_Y = \mathbb{R}^1 \Rightarrow \dim H^1(Y, \mathcal{O}) = \dim H^0(Y, \mathcal{O}^*) = 1.$$

われわれはさらに Y の covering $V \ni \{a\}$, $U \subset X$,
 $U \cup V = Y$ について Cousin の問題 (層 $\mathcal{O}$ の) を解く.

§ 1. lateral condition の層 $\mathcal{O}$.

$(X, \mathcal{H})$ を Brelot の調和空間とする. $\mathcal{O}$ を a sheaf on Y of linear spaces で $\mathcal{O}_x = \mathcal{H}_x$, $x \in X$, なるものとする.
 Y の domain G が $\mathcal{O}$ -regular (または単に regular) であるとは次のことを言う. G の (Y での) 境界を ∂G と書くとき,
 ∂G 上の任意の連続函数 f は $\bar{G}$ 上へ一意連続に拡張され, その G への制限 $H^G f$ は $\mathcal{O}_G = \Gamma(G, \mathcal{O})$ に属する. そして $f \geq 0$ なら $H^G f \geq 0$. $f \rightarrow H^G f(x)$ は (∂G) 上の正の 1 次形式だから ∂G 上のラドレ測度 ρ_x^G により $H^G f(x) = \int f(y) d\rho_x^G(y)$ と表わされる. ($\mathcal{O}_{H^G}$ と書くべきだが $\mathcal{O}$ は略す)

仮定 1: $\mathcal{O}$ -regular set からなる Y の topology の base がある.

この仮定のもとに次の Harnack の性質が示される:

$h_n \in \mathcal{O}_G$, 増加列 $\Rightarrow \sup h_n \equiv +\infty$ かつ $\sup h_n < +\infty$ ならば

注: X の領域 D で $D \cup \{a\} = V$ が $\{a\}$ の近傍となっているようなものに対して, $\tilde{\mathcal{H}}_D = \mathcal{O}_V$ とおいて $\mathcal{H}_D$ の部分空間を定義すれば $(X, \mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}})$ は full harmonic 構造を与える.

$$\sup k_n \in \mathcal{O}_G.$$

したがって $(\mathcal{O}_g, g \in Y)$ は, $(-\infty, +\infty)$ において連続函数の germ のつくる層になっているという事をのぞけば ふたたび Brelot の公理をみたす調和空間になっており それにもとづく potential 論は同様に展開される。実際 前頁の注のように fullharmonic 構造と考えれば それは前田 [] 部 [] でなされた。 われわれは R. M. Herve により展開され B. Walsh により local な性質のみに基づくよう修正された potential 論 (の並行) を採ろう。

Definitions : 開集合 G に対し $X_n G$ 上で定義された函数 S は次のとき G 上で $(\mathcal{O}-)$ superharmonic という: S は下半連続, $> -\infty$, で, 任意の $\mathcal{O}$ -regular set $\omega \subset \bar{\omega} \subset G$ と $f \in C(\partial\omega)$ に対し, " $S \geq f$ on $\partial\omega \Rightarrow S \geq H^\omega f$ on $X_n \omega$ " をみたし さらに $X_n G$ の任意の connected component 上で $\neq +\infty$.

G 上の非負な $\mathcal{O}$ -superharmonic 函数 p は " $u + p \geq 0$ をみたす G 上の $\mathcal{O}$ -superharmonic 函数 u は必ず $u \geq 0$ " をみたすとき potential (type) であると言う。

G 上の potential p に対し " $p \in \mathcal{O}_{G \setminus A} = \mathcal{H}_{G \setminus A}$ をみたす最小閉集合 A " を p の support, (carrier), と言う。

Y の領域 V に対し V 上に non-zero potential が存在するとき V は small であるという。

仮定 2. 定数 1 は Y 上で superharmonic

仮定 3. X は small set であり, $\{a\}$ の近傍 V_0 で small なものがある.

仮定 4. X (または V_0) 上の potential で X 内の一点を support とするものは互に比例する.

以上の仮定のもとに Herve による potential 論は (Y, σ) に対しても展開できる. たとえば 次のことがわかる.

V を small set (とくに X または V_0) とする. このとき V の任意の点 y に対し $\{y\}$ を support とする V 上の potential Vp_y で, $(x, y) \rightarrow Vp_y(x)$ は $V \times V$ 上で下半連続, 対角線 $x = y$ をのぞいたところでは連続となるものが存在する. この $Vp_y(x)$ を kernel on V と言う.

開集合 U と U 上の非負 superharmonic 函数 S に対し, その最大な σ -harmonic minorant を $M^U S$ と書く. すなわち

$$h = M^U S \Leftrightarrow \begin{cases} h \in \mathcal{O}_U, \\ h \leq S \text{ on } X \cap U, \end{cases}$$

$$\text{• if } \exists h' \in \mathcal{O}_U, h' \leq S \text{ on } X \cap U, \text{ then } h' \leq h.$$

定理 (B. Walsh) $(V_i)_{i \in I}$ を small な領域による Y の covering とする. このとき V_i 上の kernel $p_y^i(\cdot)$ を, 各々の $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ なる (i, j) および 開集合 $U \subset V_i \cap V_j$ に対して, 関係

$$p_y^i(x) - M[p_y^i|U](x) = p_y^j(x) - M[p_y^j|U](x)$$

が $(x, y) \in U \times U$ について成り立つように選ぶことができる。

次にこれからは adjoint な sheaf を導こう。

領域 V と V 上の非負 superharmonic 関数 S , V の部分集合 A に対し

$$V\mathcal{R}^A S(x) = \inf \{ u(x); u \text{ は } V \text{ 上の非負 superhar. 関数で } u \geq S \text{ on } A \}, \quad x \in X \cap V,$$

と置く。これの下半連続化 $\widehat{V\mathcal{R}^A S}$ は V 上で superharmonic で A 上で S に等しい。これは S の A 上への掃散である。

開集合 ω が, $\bar{\omega} \subset X$ で, X 上の任意の potential p で $X \setminus \omega$ にその support をもつものに対し $X\mathcal{R}^{X-\omega} p = p$ をみたすとき, または, $\{a\} \in \omega \subset \bar{\omega} \subset V_0$ で, V_0 上の任意の potential p で $V_0 \setminus \omega$ にその support をもつものに対し $V_0\mathcal{R}^{V_0-\omega} p = p$ on $V_0 \cap X$, をみたすとき, ω を c.d. set (complètement determinant) と言う。

仮定 5 C.d. set よりなる Y の有限の base がある。

さて V を small set とするとき, $y \in \omega \subset \bar{\omega} \subset V$ なる開集合 ω に対し $V\mathcal{R}^{V-\omega} p_y$ は V 上の potential でその support は $\bar{\omega}$ に含まれる (但し Vp_y を p_y と書いた)。したがってある $\bar{\omega}$ 上の measure $\sigma_y^\omega(dz)$ により

$$V\mathcal{R}^{V-\omega} p_y(x) = \int_V p_z(x) d\sigma_y^\omega(z), \quad x \in V \cap X,$$

と表現される。(Herve [] Chap III, Prop. [] §5). σ_y^ω は V に依存せずきまることか

“ V small set, $U \subset V$, $\omega \subset \bar{\omega} \subset U$, S を ω の compact set に support をもつ V 上の potential とすると

$$V_R^{V-\omega} S = U_R^{U-\omega} S \quad \text{on } U$$

が成り立つ” および

$$U p_y(x) = V p_y(x) - M^U[V p_y](x), \quad (x, y) \in U \times U$$

および potential の kernel による表現の一貫性からわかる。(Walsh [] p.p 385—388)

Definition: G を Y の開集合とする.

$h^* \in \mathcal{O}_G^* \iff$ h^* は $X \cap G$ 上の連続函数

• $\forall \omega \subset \bar{\omega} \subset G$ なる c.d. set と $\forall y \in \omega \cap X$ に対し

$$h^*(y) = \int h^*(z) d\sigma_y^\omega(z).$$

$(\mathcal{O}_G^*; G)$ が (complete) presheaf on Y of linear spaces となること, および $\mathcal{O}^*$ -regular set = c.d. set になること, $\mathcal{O}_G^*$ について Harnack の性質が成り立つことがたしかめられる。これに associate した sheaf を $\mathcal{O}^*$ と書く。

§2 $\mathcal{R}_V$ の fine resolution; cohomology group.

$\mathcal{J}_V$ を $V \cap X$ 上で連続な V 上の superharmonic 函数全体のつくる convex cone, $\mathcal{P}_V$ を $V \cap X$ 上で連続な V 上の potential 全体のつくる convex cone とする. $2_V = \mathcal{P}_V - \mathcal{P}_V$, $\mathcal{R}_V = \mathcal{P}_V + \mathcal{O}_V$ とおく. $\mathcal{R}_V, 2_V$ は R -module であり $\mathcal{R}_V$ は $\mathcal{O}_V$ と $\mathcal{P}_V$ の direct sum になっている. $i_V: \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{R}_V$ を自然な injection, $\pi_V: \mathcal{R}_V \rightarrow 2_V$ を自然な projection とすると

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_V \xrightarrow{i_V} \mathcal{R}_V \xrightarrow{\pi_V} 2_V \rightarrow 0, \text{ exact.}$$

r_V^U を $\mathcal{R}_U \rightarrow \mathcal{R}_V$ ($U \supset V$) の restriction とすると $\{\mathcal{R}_V, r_V^U\}$ は R -module の準層をつくる. $j_V: 2_V \rightarrow \mathcal{R}_V$ を自然な injection とするから $\pi_V \cdot j_V = \text{Id}_{2_V}$ であり $U \supset V$ に対し $\beta_U^V = \pi_V r_V^U j_V$ なる写像 $2_U \rightarrow 2_V$ は

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_U & \xrightarrow{\pi_U} & 2_U \\ r_V^U \downarrow & & \downarrow \beta_U^V \\ \mathcal{R}_V & \xrightarrow{\pi_V} & 2_V \end{array}$$

を可換にするただ一つの homomorphism になる. $\{2_U, \beta_U^V\}$ は R -module の準層をつくる. $\mathcal{R}_V, 2_V$ に associate した層を $\mathcal{R}, 2$ と書き i_U, π_U より induce される homomorphism を i, π と書く. $r_U: \mathcal{R}_U \rightarrow T(U, \mathcal{R})$, $\beta_U: 2_U \rightarrow T(U, 2)$ は injective になっている.

定理 (Walsh) $\mathcal{R}, \mathcal{Z}$ は fine sheaf になる.

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{i} \mathcal{R} \xrightarrow{\pi} \mathcal{Z} \rightarrow 0 \quad (\text{exact}).$$

したがって de Rham の定理から

$$H_{\mathcal{Z}}^k(Y, \mathcal{O}) = 0 \quad k \geq 2$$

$$H_{\mathcal{Z}}^1(Y, \mathcal{O}) = \frac{\Gamma_{\mathcal{Z}}(Y, \mathcal{Z})}{\pi \Gamma_{\mathcal{Z}}(X, \mathcal{R})}$$

が成り立つ. π に $\mathcal{Z}$ は任意の family of supports.

$$H_c^1(Y, \mathcal{O}) = H_X^1(Y, \mathcal{O}) \text{ がそれぞれにとって重要である.}$$

ただし添字 c は X に support が含まれていることを示している. あきらかに

$$H_X^1(Y, \mathcal{O}) = H_c^1(X, \mathcal{O}|_X) = H_c^1(X, \mathcal{H})$$

すなわち これらは (lateral condition 付きの) 層 $\mathcal{O}$ には依存せず 最初の層 $\mathcal{H}$ だけに依存する.

層の一般論より次の exact 列を得る.

$$0 \rightarrow \Gamma_c(Y, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O}_a \rightarrow H_c^1(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}) \\ \rightarrow H^1(\text{pt}, \mathcal{O}) \rightarrow 0.$$

$$0 \rightarrow \Gamma_a(Y, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}) \rightarrow H_a^1(Y, \mathcal{O}) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow 0$$

$$\text{よって } \Gamma_c(Y, \mathcal{O}) = \Gamma_a(Y, \mathcal{O}) = 0 \quad H^1(a, \mathcal{O}) = \frac{2a}{\pi \mathcal{R}_a} = 0$$

だから結局

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_a \rightarrow H_c^1(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}) \rightarrow 0$$

および

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{H}_X \rightarrow H_a^1(Y, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}) \rightarrow 0$$

となる。同様の exact 列が adjoint sheaf $\mathcal{O}^*$ についても得られる。

Lemma 2.1. U is small set, $V \subset U$ open. $S \in \mathcal{S}_V$ and $V' \subset \overline{V'} \subset V$ such that $p = S + p'$ on V' , $p' \in \mathcal{O}_{V'}$, can be written as $p, p' \in \mathcal{P}_V$ exists.

Lemma 2.2. U small set, $V \subset U$ open. $S \in \mathcal{S}_V$ whose support is a compact set B in V , then S is potential part whose support is B and $u - S \in \mathcal{O}_V$ for $u \in \mathcal{P}_V$ whose support is B exists uniquely.

以上の Lemma は $U \subset X$ の場合は Herve [] Theorems 13.1, 13.2 である。他の場合も同様に証明される。

定理 2.3. $1 \notin \mathcal{O}_Y$ なら $\mathcal{O}_Y = \{0\}$, $H^1(Y, \mathcal{O}) = \{0\}$ である。

この定理を証明するため 2 が 有界可測関数のつくる層 $\mathcal{B}$ について $\mathcal{B}$ -module になることを注意しよう。まず

$\mathcal{P}_V = \{0\}$ のときはあきらかである。 V が small のとき
 $\mathcal{P}_V \ni p$ は $p = \int p_y(\cdot) d\mu(y) + {}^V B p$ と書ける。
 但し $p_y(\cdot)$ は V 上の kernel であり ${}^V B$ は $V \subset X$ なる 0

作用素, $V \ni \{a\}$ のときは $\mathcal{P}_V = \mathcal{P}_V^i \oplus \mathcal{P}_V^t$; $\mathcal{P}_V^i =$
 $\mathcal{P}_V \cap \mathcal{O}_{X \cap V} = \{p \in \mathcal{P}_V, p \text{ の support は } a\}$, $\mathcal{P}_V^t$ は
 $\mathcal{P}_V$ の 自然な ^{lattice} order で $\mathcal{P}_V^t$ に *étranger* な部分, なる分解に
 おける $\mathcal{P}_V^t$ -part を対応させる作用素とする。前田 []。

$f \in \mathcal{B}_V$ に対し $f \circ p = \int p_y(\cdot) f(y) d\mu(y) + f(a) {}^V B p$
 とし積を定義する。 $V \subset U$ に対し

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_U^V(f \circ p)(x) &= \int [p_y(x) - M[p_y|V](x)] 1_V(y) f(y) d\mu(y) \\ &\quad + f(a) ({}^V B p - M[{}^V B p|V])(x), \quad x \in V \\ &= \int g_y(x) (r_V^V f)(y) d[1_V \mu](y) + f(a) {}^V B p(x), \end{aligned}$$

$= (r_V^V f) \circ (\mathcal{P}_U^V p)(x)$, 但し $g_y(x)$ は V 上の kernel,
 したがって $\{\mathcal{B}_U, \mathcal{Q}_U, \{r_U^V, \mathcal{P}_U^V\}\}$ は presheaf.

になり $\mathcal{Q}$ は $\mathcal{B}$ -module になる。

定理の証明.

① $\mathcal{I}_Y \ni 1$ の $\mathcal{O}_Y, \mathcal{P}_Y$ part への分解を $1 = h + p$ とす
 る。 $1 \notin \mathcal{O}_Y$ より $p \neq 0$ したがって $p > 0$ となるゆえ
 Y は small になる。このときは $\mathcal{O}_Y = \{0\}$, $\mathcal{I}_Y = \mathcal{P}_Y$
 が minimum principle からわかる。即ち []。

① $\Gamma(Y, 2) \ni M$ としよう. 各点 $x \in Y$ に対し x の近傍 U_x と $s_x, t_x \in \mathcal{P}_{U_x}$ をえらび $M|_{U_x} = \int_{U_x} (s_x - t_x)$ となるようにする. open set V_x を $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_x$ とえらぶ. 点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ をえらび $V_{x_i} = V_i$ とし $Y = \bigcup_{i=1}^n V_i$ とできるが, $x_n = a$, $a \notin \overline{V_i}$, $1 \leq i \leq n-1$, と鬼ってよい. $Z_i = V_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$, $1 \leq i \leq n$, とおこう. Z_i が $\mathcal{B}$ -module であるから $\Gamma(Y, 2) \ni M$ は $\mathcal{B}_Y$ -module であり

$$M = 1_{\bigcup_{i=1}^n Z_i} \circ M = \sum_{i=1}^n 1_{Z_i} \circ M$$

となる.

$$\begin{aligned} (1_{Z_i} \circ M)(x) &= (r_{U_i}^x 1_{Z_i}) \circ (M(x)) = (r_{U_i}^x 1_{Z_i}) \circ \left(\int_{U_i} (s_i - t_i) \right) \\ &= \int_{U_i}^x (1_{Z_i} \circ s_i - 1_{Z_i} \circ t_i), \end{aligned}$$

$p_i \equiv 1_{Z_i} \circ s_i \in \mathcal{P}_{U_i}$, support of $p_i \subset \overline{Z_i} \subset U_i$ となる.

Y small より Lemma 2.2 から $\exists u_i \in \mathcal{P}_Y \ni \text{support of } u_i = \text{support of } p_i$, $u_i - p_i \in \mathcal{O}_{U_i}$ とできる. また $\int_Y^{U_i} u_i = p_i$. 同様に $q_i \equiv 1_{Z_i} \circ t_i$ と同じ support を持つ $v_i \in \mathcal{P}_Y$ で $\int_Y^{U_i} v_i = q_i$ なるものが存在する. $x \in U_i$ に対し

$$(1_{Z_i} \circ M)(x) = \int_{U_i}^x (p_i - q_i) = \int_Y^x (u_i - v_i).$$

$u_i, v_i \in \mathcal{O}_{Y - \overline{Z_i}}$ であるから $x \in Y - U_i$ に対しては

$$(1_{Z_i} \circ M)(x) = 0_x = \int_Y^x (u_i - v_i).$$

$$q = \sum_{i=1}^n (u_i - v_i) \quad \text{とおこう.} \quad q \in \mathcal{Q}_Y \quad \text{であり}$$

$\int_Y f = M$. $2_Y \rightarrow \Gamma(Y, 2)$ onto 加えられた。
 これは injective だから $2_Y \rightarrow \Gamma(Y, 2)$ bijective.
 ① $f \in 2_Y$ に対し $r_Y j_Y f \in \Gamma(Y, \mathcal{R})$, $\pi r_Y j_Y f$
 $= \int_Y f = M$ したがって $H^1(Y, \mathcal{O}) = \{0\}$.

Corollary 2.4 $1 \notin \mathcal{O}_Y$ ならば $\mathcal{O}_a \cong H_c^1(X, \mathcal{H})$,
 $\mathcal{H}_X \cong H_a^1(Y, \mathcal{O})$.

§3 $H_c^1(X, \mathcal{H})$ と $\mathcal{H}_X^* = \mathcal{O}_X^*$ の duality

$\Gamma_c(X, 2) \ni M$, $\text{Supp } M = K$ とする. X は small
 であるから定理2.3の証明におけると同様に, K を有限個
 の開集合であらわし、各々において M が $f \in 2_{U_i}$ の canonical
 な像であるようにし、この f を 2_X に拡張できる。すなわち
 $\exists p \in 2_X$, $\text{Supp } p$ compact in X , such that $M = \int_X p$.
 この p は X の compact set に support をもつ measure μ に
 より $\int p_y \mu(dy)$ と表わされる。 X 内の compact set を台と
 する measure に次のような同値関係を考えよう。但 $p_y = {}^x p_y$.

$$\mu \sim 0 \iff \int p_y(x) \mu_+(dy) = \int p_y(x) \mu_-(dy), \quad x \in X, \exists K,$$

K compact in X , $\mu = \mu_+ - \mu_-$

これは次の条件とも同値である; (5頁 σ_y^w の def. を見よ).

$$\iff \int \sigma_y^w(A) \mu_+(dy) = \int \sigma_y^w(A) \mu_-(dy), \quad \forall A: \text{Borel set} \subset X,$$

が成り立つ開集合 $\omega \subset \bar{\omega} \subset X$ が存在する。

さて $g \in T_c(X, \mathbb{R})$, $\pi g = M \in T_c(X, \mathbb{R})$ としよう。

$M = \int_X p$, $p = \int p_y \mu(dy)$ とする。 X 上の函数 $g - p$ を考えると $\pi(g - p) = \pi g - \pi \int_X p = \pi g - \int_X p = \pi g - M = 0$ だから $g - p \in \mathcal{O}_X$ 。一方 $g - p$ は g の support が compact だから $\int p_y |\mu|(dy)$ により上, 下からおさえられ, これは potential on X だから $g - p = 0$, したがって $p = 0$ out of some compact, すなわち $\mu \sim 0$ となる。

したがって $\mu \sim 0 \iff M = \pi g, \exists g \in T_c(X, \mathbb{R})$ 。

以上より次のことがわかった。

$$A^* = \left\{ \mu : \begin{array}{l} \text{measure on } X \text{ with compact support} \\ \int p_y \mu_\pm(dy) \text{ continuous} \end{array} \right\} / \sim$$

とあくと

$$A^* \cong H_c^1(X, \mathcal{H}) \quad \text{linear isomorph.}$$

これらの空間に位相を入れたため minimal sheaf $\bar{\sigma}$ を導

入しよう。 V nbd of a , $x \in V \cap X$, $f \in C(\partial V)$ に対し

$$\bar{H}^V f(x) = \inf \{ S(x); \quad S \text{ は } V \cap X \text{ 上の superharm. 函数} \}$$

$$\liminf_{x \in V \ni y \rightarrow \xi} S(y) \geq f(\xi) \quad \xi \in \partial V$$

$$\liminf_{x \in V \ni y \rightarrow a} S(y) \geq 0 \quad \}$$

と置く。 $\bar{H}^V f$ は $X \cap V$ 上で harmonic であり, $\forall f \in C(\partial V)$ に対し $\bar{H}^V f = -\bar{H}^V(-f)$ 。 K を外から regular な compact set in X とし $V = Y \setminus K$ とすれば ∂V 上の連続函数 f に対し, $\lim_{X \cap V \ni y \rightarrow z} \bar{H}^V f(y) = f(z)$, $z \in \partial V$, が成り立っている。(Loeb [3], 節 [3])。そして Loeb によりこのような $V = X \setminus K$ は a の基本近傍系をつくることかわかっている。
そこで V , n.b.d of a に対し

$$\bar{\mathcal{O}}_V = \{ h \in \mathcal{H}_{V \cap X} ; \exists K \text{ outer regular, } \overline{Y \setminus K} \subset V, \\ h = \bar{H}^{Y \setminus K}[h|_{\partial K}] \text{ on } X \setminus K \}$$

とおこう。 $\bar{\mathcal{O}}_a = \varinjlim_{V \ni a} \bar{\mathcal{O}}_V$ により Y 上の sheaf $\bar{\mathcal{O}}$ で $x \in X$ に対し $\bar{\mathcal{O}}_x = \mathcal{H}_x$ なるものが得られ仮定 1 がみたされる。仮定 2, 3, 4 もみたされることかわかる。また $1 \notin \bar{\mathcal{O}}_Y$ も定義よりわかる。したがって系 2.4 より $\bar{\mathcal{O}}_Y = \{0\}$, $\bar{\mathcal{O}}_a \cong H_c^1(X, \mathcal{H})$ 。

上の $\bar{\mathcal{O}}_V$ は $V \cap X$ 上の compact 一様収束の位相により $\mathcal{H}_{V \cap X}$ の内部分空間 したがって nuclear space である。 $\bar{\mathcal{O}}_a$ に帰納極限の位相を与えると $\bar{\mathcal{O}}_a$ も nuclear. linear isomorphism $\bar{\mathcal{O}}_a \cong H_c^1(X, \mathcal{H})$ により $H_c^1(X, \mathcal{H})$ の位相を与えよう。あるいは次のように考えるとわかりやすい。

$\bar{\mathcal{O}}_a \ni u$ とすると, ある $V \ni a$ 上で $\bar{\mathcal{O}}_V \ni u$ 。 Lemma 2.1 より $u = p - f$ on $V' \subset V$ となる $p, f \in \bar{\mathcal{O}}_Y$ が

えらべて, さらに $p, q \in \bar{O}_{V'}$ とできる。ただし $\bar{P}_Y$ は $\bar{O}$ からつった Y 上の *conti. potential* で, ここにおいて Y は *small* になることを使った。 $\bar{P}_Y \cap \bar{O}_{V'} \ni \forall S$ は $\mathcal{P}_X$ に属することばかりかめられるから, V' 上で

$$u = p - q = \int p_Y \mu(dy)$$

と $\text{Supp } \mu \subset X \setminus V'$ なる *measure* μ により表わされる。

$\bar{O}_a$ の元 u に, この μ を対応させることにすれば, $\bar{O}_a$ の 0 元とは a の十分小さな近傍で 0 なる函数であるから, それに対し $\mu \sim 0$ 。すなわち $\bar{O}_a \rightarrow A^*$ なる *linear map* が得られ 容易にわかるようにこれは 1 対 1, *onto*。この *linear isomoh.* により A^* に位相を与える。

さて $A^* \simeq H_c^1(X, \mathcal{H}) \simeq \bar{O}_a$ と $\mathcal{H}_X^*$ に対し 次の双一次形式を定義しよう。 $A^* \ni \varphi, \mathcal{H}_X^* \ni h^*$ に対し

$$b(h^*, \varphi) = \int h^*(x) d\mu(x), \quad \mu \in \varphi.$$

これは $h^* \in \mathcal{H}_X^*$ なら $\int h^*(y) d\sigma_x^\omega(y) = h^*(x), \forall x \in \omega, \omega \subset \bar{\omega} \subset X$ なることと, $\mu \sim 0 \iff \mu \sigma^\omega = 0, \exists \omega$, より φ の代表元 μ のとり方に依存しない。

定理 3.1. A^* に上述の位相を与えて考えると,

$$(A^*)' \simeq \mathcal{H}_X^*.$$

この対応は $\langle \varphi, h^* \rangle = b(h^*, \varphi), \forall \varphi \in A^*,$ により与えられる。

系 3.2. measure $\sigma_y^\omega(dz)$ の同値類を $k(y) \in A^*$ と記す. ($\int p_z(x) \sigma_y^\omega(dz) = p_y(x)$ out of $\bar{\omega}$ より ω に依らない). すると $\forall h^* \in \mathcal{H}_X^*$ に対し一意的に $\bar{\pi} \in (A^*)'$ が存在し

$$h^*(y) = \langle \bar{\pi}, k(y) \rangle, \quad y \in X$$

と表現される. (Poisson 表現).

定理の証明は次の Lemma により為される. $A^* \ni \varphi$ に対応する $\bar{\sigma}_a$ の元は $\int p_y(\cdot) \mu(dy)$, $\mu \in \mathcal{P}$, の a における germ であることに再度注意しておこう. とくに $k(y) \in A^*$ は $p_y(\cdot)$ の a における germ と対応している.

Lemma 3.3. (1) $X \ni y \longrightarrow k(y) \in A^*$ は連続
(2) ω を C.d set, $y \in \omega$ とする. $\partial\omega$ の分割 $\pi = (\delta_j)_{1 \leq j \leq n}$, $\bigcup_{j=1}^n \delta_j = \partial\omega$ と各 δ_j から一点 y_j をえらんだものを考える. このとき分割 π を細かくすると

$$\sum_{\pi} k(y_j) \int_{\delta_j} \sigma_y^\omega(dz) \xrightarrow{\pi \downarrow 0} k(y) \quad \text{in } A^*.$$

証明. (1) $y_n \rightarrow y_0 \in X$ に対し $\{y_n, y_0\} \subset K \subset X$ なるコンパクト集合をとる. $p_{y_n}(\cdot) \rightarrow p_{y_0}(\cdot)$ uniformly on $\forall$ compact subset of $X \setminus K$ だから, その $\bar{\sigma}_a \cap$ の germ も $\bar{\sigma}_a$ で収束する. ゆえに $k(y_n) \rightarrow k(y_0)$ in A^* .

(2) $\bar{\omega} \subset K$ なる compact set $\subset X$ をとる.

$$\sum p_{y_j}(x) \sigma_{y_j}^\omega(\delta_j) \longrightarrow \int p_z(x) \sigma_y^\omega(dz) = p_y(x), \quad x \in X \setminus K.$$

だが両方とも $\bar{O}_{Y-K}$ に属すから $X-K$ の $\forall$ compact subset 上で一様収束する。したがって両辺の $\bar{O}_a$ への像も収束。すなわち

$$\sum k(y_j) \sigma_y^\omega(\delta_j) \rightarrow k(y) \text{ in } A^*.$$

(定理の証明) $\Phi \in (A^*)'$ をとる。Lemma (1) より $y \rightarrow \langle \Phi, k(y) \rangle \equiv u(y)$ は X 上の連続関数であり, Lemma (2) より $\sum_{\pi} \langle \Phi, k(y_j) \rangle \sigma_y^\omega(\delta_j) \rightarrow \langle \Phi, k(y) \rangle$, $y \in \omega, \text{ c.d set}$ となる。ゆえに $\int u(z) \sigma_y^\omega(dz) = u(y)$, $u \in \mathcal{H}_X^*$ 。

上の Lemma の (2) と同様に $\forall \mu \in T_c(X, \omega)$ に対し, Riemann 和

$\sum_{\pi} p_{y_j}(\cdot) m(\Delta_j) \xrightarrow{\pi \downarrow 0} \int p_y(\cdot) m(dy)$, compact uniformly out of some compact set in X 。但し (Δ_j) は $\text{Supp } m$ の分割で $y_j \in \Delta_j$ 。したがって $\int p_y(\cdot) m(dy)$ の A^* への像を φ とすると $\sum_{\pi} k(y_j) m(\Delta_j) \rightarrow \varphi$ in A^* 。ゆえに

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \lim_{\pi} \sum_{\pi} m(\Delta_j) \langle \Phi, k(y_j) \rangle = \int u(y) m(dy) = t(u, \varphi).$$

逆に $u \in \mathcal{H}_X^*$ に対し $(A^*)'$ の元が定まることを示そう。

Lemma 3.3. (3) V を a の open n.s.d, A compact $\subset X$ とする。このとき $\{y \rightarrow p_y(x) \mid y \in \dot{A} \cap V; x \in X \cap V \setminus A\}$ は $\mathcal{H}_{\dot{A} \cap V}^*$ の部分集合だが, これの張る closed linear subspace in $\mathcal{H}_{\dot{A} \cap V}^*$ は $\mathcal{H}_X^*|_{\dot{A} \cap V}$ を含む。

証. $\nu = \dot{A} \cap V$ 上の support compact な measure ν に対し

$$\int p_y(x) \nu(dy) = 0, \quad \forall x \in X \cap V \setminus A \Rightarrow \int h^*(y) u(dy) = 0, \quad \forall h^*$$

$\in \mathcal{H}_X^*$, を言えばよい。ところから $\int p_y(x) \nu(dy) = 0, \forall x \in X \cap V \setminus A$ ならば $\nu \sim 0$ だから $\int h^* d\nu = \phi(\varphi, h^*) = 0, \forall h^* \in \mathcal{H}_X^*$ かしらね。但し φ は ν の同値類。

(定理の証明の続き) $u^* \in \mathcal{H}_X^*$ をとる。 a の近傍 V と X の compact set A を $\overline{Y \setminus A} \subset V$ ととり $U = \dot{A} \cap V$ とする。

3. Lemma より $\exists \alpha_{jk}, \exists x_{jk} \in X \cap V \setminus A$ such that

$$\sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{jk} p_j(x_{jk}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u^*(y), \quad y \in U \text{ について}$$

U の compact 一様収束, とできる。 $\bar{\mathcal{O}}_V \ni h, Y \setminus A \subset V' \subset V$ としよう。 $h = \int p_j m(dy)$ on V' が成り立つような $\text{Supp } m \subset V \setminus V' \subset U$ なる measure m がとれる。

(Lemma 2.1). したがって

$$\sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{jk} h(x_{jk}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int u^*(y) m(dy) = \phi(u^*, \varphi)$$

但し $\varphi \in \mathcal{Q}^*$ は $h \in \bar{\mathcal{O}}_V$ により induce される元。したがって $\varphi \rightarrow \phi(u^*, \varphi)$ なる $\mathcal{Q}^*$ 上の 1 次形式が $\bar{\mathcal{O}}_V$ 上に induce する 1 次形式は $h \rightarrow \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{jk} h(x_{jk})$ なる 1 次形式の simple limit になっており, またこれらは $\bar{\mathcal{O}}_V$ 上で連続だからその simple limit も Banach-Steinhaus の定理より連続になる。 V は任意だから $\varphi \rightarrow \phi(u^*, \varphi) \in (\mathcal{Q}^*)'$ 。

$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_a \rightarrow H_c^1(X, \mathcal{H}) \cong \mathcal{Q}^*$ なる exact 列が成り立つことを §2 で見たが, $\mathcal{O}_a \xrightarrow{\tau} \mathcal{Q}^*$ なる写像を考えよう。

V , n.b.d of a , $\mathcal{O}_V \ni u$ とする. $\mathcal{R}$ は fine だから $\exists g \in \Gamma(Y, \mathcal{R})$, $= 1$ on some V' , n.b.d of a , $\subset V$, $\text{Supp } g \subset V$ なるようにできる. $t = u g$ on V , $= 0$ on V^c とおくと $t \in \Gamma(Y, \mathcal{R})$. $\pi t \in T_c(X, \mathcal{L})$ もわかる. この πt の同値類を u と置く. πt は mod $\pi T_c(X, \mathcal{R})$ で "well defed" だから u も well defed. $\Leftarrow$ $u \in \mathcal{O}_Y$ なら $g = 1 \in \Gamma(Y, \mathcal{R})$ として $\pi u = 0$, 逆に $\pi u = 0$ なら $\exists f \in T_c(X, \mathcal{R})$, $\pi t = \pi f$ だから $h = t - f \in \mathcal{O}_Y$ しかる $(\text{Supp } f)^c \supset V \ni a \in$ とこれは $\rho_Y h = u$ on V となる u の $\mathcal{O}_a \cap$ の canonical な像は $\mathcal{O}_Y$ の image に入る. ゆえに $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_a \xrightarrow{\rho} H_c^1(X, \mathcal{H})$ (exact).

§4 Cousin の問題, $H^1(Y, \mathcal{O})$ と $\mathcal{O}_Y^*$ の duality.

次の exact 列が成り立つ:

$$V_1 \in a \text{ の nbd, } \left[V_2 \subset X, V_1 \cap V_2 \neq \emptyset \text{ に対し } (V_1 \subset V_0) \right]$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{i} \mathcal{O}_{V_1} \times \mathcal{O}_{V_2} \xrightarrow{j} \mathcal{O}_{V_1 \cap V_2} \xrightarrow{k} H^1(Y, \mathcal{O}),$$

ただし i は $\mathcal{O}_Y \ni u \rightarrow (r_Y^{V_1} u, r_Y^{V_2} u) \in \mathcal{O}_{V_1} \times \mathcal{O}_{V_2}$,

j は $\mathcal{O}_{V_1} \times \mathcal{O}_{V_2} \ni (s, h) \rightarrow s - h \in \mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}$

k は $\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2} \ni s$ に対し $f_1 \in \mathcal{R}_{V_1}$, $f_2 \in \mathcal{R}_{V_2}$ をとり

$s = f_1 - f_2$ on $V_1 \cap V_2$ とする. これは $\mathcal{R}_{V_1}, \mathcal{R}_{V_2}$

が 1 の分解をもつ Ring であるからできる. $M \in T(Y, \mathcal{L})$

を $M = \pi f_1$ on V_1 , $= \pi f_2$ on V_2 と定義する。 $0 = \pi s = \pi f_1 - \pi f_2$ on $V_1 \cap V_2$ より well defed. $s \rightarrow M$ は f_1, f_2 に依存せず coboundary $\pi P(Y, \mathcal{R})$ をのぞいて定義される。

さて $H^1(Y, \mathcal{O})$ は $H^1(\mathcal{R}(V_1, V_2), \mathcal{O}) \simeq \frac{\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}}{\mathcal{O}_{V_1} \times \mathcal{O}_{V_2}}$ の帰納的極限として定義されたから V_1, V_2 が条件をみたしつつ動けば $\mathcal{O}$ の $\mathcal{R}$ による像が $H^1(Y, \mathcal{O})$ をつくっている。そこで $H^1(Y, \mathcal{O})$ に $\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}$ の位相の (V_1, V_2) をうごかした帰納的極限の位相を与えよう。 ($\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}$ の位相はもろろん $V_1 \cap V_2$ 上のコンパクト-様収束の位相)。 X 内に support をもつ $\mathcal{O}_{V_1}$ の元は 0しかないから $H^1_X(\mathcal{R}(V_1, V_2), \mathcal{O}) \simeq \frac{\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}}{\mathcal{O}_{V_2}}$ で $H^1_c(X, \mathcal{R}) = H^1_X(Y, \mathcal{O})$ はこの帰納的極限になっているかわれわれがすでに $H^1_c(X, \mathcal{R})$ に定義した位相, すなわちあるコンパクト集合 A の外側 $X \setminus A$ におけるコンパクト-様収束の位相, はこの $\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}$ の帰納的極限の位相と同じだから, $H^1(Y, \mathcal{O})$ は $H^1_c(X, \mathcal{R})$ の位相を $H^1_c(X, \mathcal{R}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O})$ により写像した位相をもつことになる。 $\frac{\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}}{\mathcal{O}_{V_1} \times \mathcal{O}_{V_2}}$ の帰納的極限は可算個の族によるとしてよいから $H^1(Y, \mathcal{O})$ も nuclear。

定理 4.1. $H^1(Y, \mathcal{O})' \cong \mathcal{O}_Y^*$

証明 $F \in H^1(Y, \mathcal{O})'$ とする。 V_1, V_2 を上のような対とすれば $F \circ \mathcal{R}$ は $\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}$ 上の conti. linear form だから $(F \circ \mathcal{R})(s) = \int S(x) d\mu(x)$, $s \in \mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}$, と $V_1 \cap V_2$ 上の測度

μ , $\text{Supp } \mu \subset V_1 \cap V_2$, で書ける。とくに $V_2 = X \setminus \bar{G}$ とする。 $\forall G \text{ open}$
 $\subset X$ に対し $V_1 = V_0 \setminus \bar{G}$ とする。 $p_y(x) = x p_y(x)$ を X 上の
kernel とすれば $(x \rightarrow p_y(x))_{y \in \bar{G}} \in \mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}^* = \mathcal{O}_{X \setminus \bar{G}}^*$ 。したが
って $(F \circ k)[p_y | X \setminus \bar{G}] = \int p_y(x) \mu(dx)$, $\text{Supp } \mu \subset X \setminus \bar{G}$,
と書ける。この右辺は $y \in G$ の函数として, $\in \mathcal{O}_G^*$ である。
また k の定義の方法より左辺は G に依存しないことがわかる
ので, $y \in G$ に対し $h^*(y) = (F \circ k)[p_y | X \setminus \bar{G}]$ により X
全体で定義された $*$ -harmonic 函数を得る。ところで

$q_y(x) = V_0 p_y(x)$ を V_0 上の kernel とし $V_1 = V_0 \setminus A$ とおく。 V_0 内の開
集合 $A \ni a$ をとり $V_2 = X \setminus A$ とする。 $(F \circ k)[q_y | V_0 \setminus A]$
 $= \int q_y(x) \mu(dx)$, $\text{Supp } \mu \subset V_1 \cap V_2$, とかけこれが y の函数とし
て $\hat{A}$ で $\mathcal{O}_{\hat{A}}^*$ に属することがわかる。

また $V_0 \cap X$ 上で $p_x p_y = p_{V_0} q_y$ だから $y \in G \cap \hat{A}$
に対し $s = p_y | X \setminus \bar{G}$ 及び $s' = q_y | V_0 \setminus A$ の $H'(\gamma, \sigma)$
における像は等しい。したがって $h^*(y) = (F \circ k)[q_y | V_0 \setminus A]$
, $y \in G \cap \hat{A}$, となり $h^* \in \mathcal{O}_{\hat{A}}^*$ と思える。逆に $h^* \in \mathcal{O}_{\hat{A}}^*$ が
 $F \in H'(\gamma, \sigma)'$ を define することは Lemma 3.3 (3) の結果

Lemma 4.2:

- $\{y \rightarrow p_y(x) |_{y \in V_1 \cap V_2} ; x \in V_1 \setminus V_2\}$ の与える c.l.s in $\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}^*$ は
 $\mathcal{O}_X^* |_{V_1 \cap V_2}$ を含む
- $\{y \rightarrow q_y(x) |_{y \in V_1 \cap V_2} ; x \in V_2 \setminus V_1\}$ の与える c.l.s in $\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}^*$ は

$\mathcal{O}_{V_0}^* / V_0 V_2$ を含む.

により 定理 3.2 と同様に存される.

$$\text{系 4.3} \quad \mathcal{O}_Y \neq 1 \Rightarrow \mathcal{O}_Y = H^1(Y, \mathcal{O}) = \mathcal{O}_Y^* = \text{pof} \\ H^1(Y, \mathcal{O}^*) = 0$$

系 4.4. $\mathcal{O}_Y \neq 1$ なら $\forall S \in \mathcal{O}_{V_0 \cap V_2}$ は $S = p - h$, $p \in \mathcal{O}_{V_1}$, $h \in \mathcal{O}_{V_2}$ と書ける. (Cousin problem の解).

系 4.5 $\exists$ global kernel on Y . すなわち $\exists \pi_y(x)$;
 $\odot x \rightarrow \pi_y(x) \in \mathcal{P}_{Y-y}$, $\odot (x, y) \rightarrow \pi_y(x)$ l.s.c
 on $X \times X$, conti at $x \neq y$.

(証) $p_y(\cdot) |_{X-y} \in \mathcal{O}_{X-y}$ は系 4.4 より $= u_y(\cdot) - h_y(\cdot)$, $u_y \in \mathcal{O}_{Y-y}$, $h_y \in \mathcal{O}_X$ と書ける. そこで $\pi_y(x) = u_y(x)$ for $x \in Y-y$, $= p_y(x) + h_y(x)$ for $x \in X$ とおけばよい.

さて上の $H^1(Y, \mathcal{O})$ と $\mathcal{O}_Y^*$ の duality を $\mathcal{O}^* \leftrightarrow \mathcal{O}_X^* = \mathcal{H}_X^*$ の duality から見よう. そして $1 \in \mathcal{O}_Y$ の場合をしらべる.

§ 3 の最後で $\mathcal{O}_a \xrightarrow{\tau} H_c^1(X, \mathcal{H})$ なる写像をしらべたが, それは $\mathcal{O}_V \ni u \rightarrow t \in \Gamma_c(V_0, \mathcal{K}) \rightarrow \pi t \in \Gamma_c(V_0, 2)$ によりつくられた. $\pi t \in \Gamma_c(V_0, 2)$ は 2_{V_0} の元, しな加, $\int f_y \mu(dy)$ が conti になる measure μ により一意的に $\pi t = \int_{V_0} (\int f_y \mu(dy))$ ありおさける. 但し $f_y = V_0 p_y$ は V_0

上の kernel. $g = r_{V_0} \int_{V_0} (\int \delta_y \mu(dy)) = \int \delta_y \mu(dy) \in \Gamma(V_0, \mathcal{R})$
 とおくと $\pi(g-t) = \int_{V_0} (\int \delta_y \mu(dy)) - \pi t = 0$, $g-t \in \mathcal{O}_{V_0}$.
 したがって $t \in \Gamma_c(V_0, \mathcal{R})$ となる t は $\exists A \ni a$, compact in V_0 , $t = 0$ on $V_0 \setminus A$ であり $g \in \mathcal{P}_{V_0}$ だから $g = t$ on V_0 とならない。
 $g = 0$ on $V_0 \setminus A$, $\int_{V_0 \setminus A} \delta_y \mu_t(dy) = \int_{V_0 \setminus A} \delta_y \mu_-(dy)$, となり結局 $\mu_+ \sigma^V = \mu_- \sigma^V$, かつ
 $a \in V_{open} \subset A$ に対し成り立つ。すなわち $\pi \mu$ は $\mu \sigma^V = 0$, $a \in V \subset \bar{V} \subset V_0$, をみたす measure により $\int_{V_0} (\int \delta_y \mu(dy)) \in \Gamma_c(X, \mathcal{Z})$ 且 $X \setminus V_0$ で 0 であり $\Gamma_c(X, \mathcal{Z})$ の元としたものの同値類である。($\int_{V_0} (\int \delta_y \mu(dy)) = \int_X (\int \delta_y \mu(dy))$ on $V_0 \cap X$ に注意). 逆に $\varphi \in \mathcal{Q}^*$ をとり, $\varphi \ni \mu$ 代えて μ は $\mu \sigma^V = 0$, $a \in V \subset \bar{V} \subset V_0$, をみたせば, $\int \delta_y \mu(dy) \in \mathcal{O}_{V_0-S[\mu]}$; $= \mu$ といいて $\mu = 0$ on $V_0 - \bar{V}$, かわかる。 $t = r_{V_0} \mu$ on V_0 , $= 0$ on $X \setminus V_0$ とすると $\pi t \in \Gamma_c(X, \mathcal{Z})$ であり $\pi t = \int_{V_0} (\int \delta_y \mu(dy))$ だから $\pi \mu = \varphi$ となる $\varphi \in \mathcal{O}_a$ かわかる。以上より $\mathcal{N}^* = \{ \varphi \in \mathcal{Q}^*, \varphi \ni \mu \text{ は } \mu \sigma^V = 0, a \in \bar{V} \subset V_0 \text{ をみたす} \}$ とおけば $\mathcal{N}^* \simeq \mathcal{O}_a \simeq \mathcal{O}_Y$ となる。

$(\mathcal{N}^*)^\circ = \{ h^* \in \mathcal{H}_X^* ; \phi(\varphi, h^*) = 0, \forall \varphi \in \mathcal{N}^* \}$
 とおき $(\mathcal{N}^*)^\circ \simeq \mathcal{O}_Y^*$ を示そう。 $\mathcal{O}_Y^* \subseteq (\mathcal{N}^*)^\circ$ は
 明らか。逆に $y \in V_0 \cap X$, V は c.d. set, $a, y \in V \subset \bar{V} \subset V_0$ とする。また $\omega \subset X$, c.d. set を十分小さくとり,

$y \in \omega$, $\partial\omega \subset V$, とするよに 3. $\nu(dz) = \sigma_y^\omega(dz) - \int \sigma_x^V(dz) \sigma_y^\omega(dx)$ とおく. $\nu \in \mathcal{Q} \in \mathcal{A}^*$ としよう. $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}^{**}$ である. 任意に $\bar{V} \subset V' \subset \bar{V}' \subset V_0$ なる open set に對し

$$\int f(z) \nu \sigma^{V'}(dz) = \int \sigma_y^\omega(dx) \left\{ \int \sigma_x^{V'}(dz) f(z) - \int \sigma_x^V(dw) \int \sigma_w^{V'}(dz) f(z) \right\} \\ = \int \sigma_y^\omega(dx) \left\{ \int \sigma_x^{V'}(dz) f(z) - \int \sigma_x^{V'}(dz) f(z) \right\} = 0, \quad \forall f \in C(\partial V')$$
 ためから $\nu \sigma^{V'} = 0$, ゆえに $\mathcal{Q} \in \mathcal{N}^*$. さて $h^* \in \mathcal{H}_X^*$, $b(h^*, \mathcal{Q}) = 0$, $\forall \mathcal{Q} \in \mathcal{N}^*$, とすれば $\int h^* d\nu = 0$ しかるに $\int h^*(y) - \int \sigma_y^V(dz) h^*(z) = \int h^* d\nu = 0$, $h^* \in \mathcal{O}_V^*$.
 ゆえに $h^* \in \mathcal{O}_Y^*$.

$\mathcal{N}^*$ は closed convex in $\mathcal{A}^*$ ため bipolar theorem より $\mathcal{N}^* = (\mathcal{N}^*)^{oo} = (\mathcal{O}_Y^*)^o$

また $0 \rightarrow \mathcal{N}^* \rightarrow \mathcal{A}^* \xrightarrow[\text{(exact)}]{\mathcal{A}_{\mathcal{N}^*}^*} 0$ により $\mathcal{N}^* \simeq \mathcal{O}_\mathcal{A} \simeq \mathcal{O}_Y / \mathcal{O}_Y$, $\mathcal{A}^* \simeq H_c^1(X, \mathcal{H})$ から $\mathcal{A}_{\mathcal{N}^*}^* \simeq H^1(Y, \mathcal{O})$ である. 一方 duality の一般論より $(\mathcal{A}_{\mathcal{N}^*}^*)' \simeq (\mathcal{N}^*)^o$ が知られてゐるから ふたたび $(H^1(Y, \mathcal{O}))' \simeq \mathcal{O}_Y^*$ が得られた.

$1 \notin \mathcal{O}_Y$ なら $\mathcal{O}_Y = \{0\}$, $\mathcal{P}_Y = \mathcal{J}_Y$ を先に見たが, $1 \in \mathcal{O}_Y$ なら $\mathcal{P}_Y = \{0\}$, $\mathcal{J}_Y = \mathcal{O}_Y = \mathcal{R}^1$ とするこゝをしよう.

$\mathcal{P}_Y \ni \exists \mu > 0$ と仮定しよう. $\forall x_0 \in X$ とすると $\lambda \mu(x_0) > 1$ なる $\lambda > 0$ をとれる. $\lambda \mu - 1 \in \mathcal{J}_Y$ ($\because 1 \in \mathcal{O}_Y$) ため

Minimum principle より $\lambda \mu - 1 \geq 0$, $\lambda \mu \geq 1$, しかるに

7 $1 \in \mathcal{P}_Y$ となるか これは $1 \in \mathcal{P}_Y \cap \mathcal{O}_Y = \{0\}$ とむいゆん。
 したがって $\mathcal{I}_Y = \mathcal{O}_Y$ でこの元は互に比例すること加わかる。
 このことは $\mathcal{O}_Y^*$ についても同様である。

定理 $1 \in \mathcal{O}_Y \Rightarrow \dim \mathcal{O}_Y = \dim H^1(Y, \mathcal{O}) = 1$

$$\dim \mathcal{O}_Y^* = 1$$

証. $\mathcal{O}_Y^* = \{0\}$ 又は $\dim \mathcal{O}_Y^* = 1$ だが, $\mathcal{O}_Y^* = \{0\}$ と
 仮定しよう。すると $N^* = (\mathcal{O}_Y^*)^\circ = \mathcal{Q}^*$, したがって
 $\mathcal{Q}^*/N^* \cong H^1(Y, \mathcal{O}) = \{0\}$, このより $1 \notin \mathcal{O}_Y$ がしなかる。定
 理 $1 \in \mathcal{O}_Y$ とし2めよう。 $P \in \mathcal{P}_X$, $\gamma > 0$ として $\text{Supp } P = K$, $\gamma \vee$
 11.7.1 $C(X)$ なるものをとる。系 4.4 より $h \in \mathcal{H}_X$, $u \in$
 $\mathcal{O}_{Y-K} \subseteq P = u - h$ on $X-K$ となるようにとれるから
 $S = P - h$ on X , $= u$ on $Y-K$ とおくと S は well defined
 で $S \in \mathcal{I}_Y$, $\notin \mathcal{H}_X$. α 実数を適当にとり $\inf_{\partial K} (S - \alpha \cdot 1)$
 $= 0$ とする。 $S - \alpha \cdot 1 \in \mathcal{I}_Y$. Minimum principle より
 $S - \alpha \cdot 1 \geq 0$ on $X-K$, および $S - \alpha \cdot 1 \geq 0$ on K . したが
 って $S - \alpha \cdot 1 \geq 0$, $\in \mathcal{I}_Y$, $= 0$ at some point of ∂K . 故
 ちに $S - \alpha \cdot 1 = 0$, $S \in \mathcal{O}_Y \subset \mathcal{H}_X$ $\forall \alpha > 0$. 以上より
 $1 \in \mathcal{O}_Y$ なら $\mathcal{O}_Y^*$ は positive な元を含む, このとき $\dim$
 $\mathcal{O}_Y^* = 1$. したがって $N^* = \{ \varphi \in \mathcal{Q}^*, b(h^*, \varphi) = 0, \varphi \in \mathcal{O}_Y^* \}$
 は codimension 1, i.e., $\dim \mathcal{Q}^*/N^* = 1$,
 $\dim H^1(Y, \mathcal{O}) = 1$.

§5 Quasi analytic property

$A^* \simeq H'_c(X, \mathcal{H})$ が Hausdorff になる条件を見る.

(性質 A) X の領域 G に対し “ $h \in \mathcal{H}_G, h = 0$ on a open set $C \subset G \Rightarrow h = 0$ ” が成り立つ.

定理 (Malgrange, de la Pradelle)

$G \subset X$, open. (A) の下で “ $\forall h \in \mathcal{H}_G^*$ は $\mathcal{H}_X^*$ の元により G 上 compact 一様に近似される ” ための必要十分条件は $X \setminus G$ が相対コンパクトな connected comp をもたないこと.

定理

$$(A) \Rightarrow H^1(X, \mathcal{H}^*) = 0$$

定理

$$(A) \Rightarrow A^* \text{ は Hausdorff}$$

証 $\phi(h^*, \varphi) = 0, \forall h^* \in \mathcal{H}_X^* \Rightarrow \varphi = 0$ と言う.

$\varphi \neq 0, \int h^* d\mu = 0, \forall h^* \in \mathcal{H}_X^*$ であるか, $\text{Supp } \mu \subset (X \setminus K)$ なる K compact $\subset X$ をとる.

$G = X \setminus K$ とおく. G は rel. compact な成分をもたないとしてよい. $x \in X \setminus K$ に対し $y \mapsto p_y(x)|_G \in \mathcal{H}_G^*$ だが de la Pradelle の定理から $\int p_y(x) d\mu(y) = 0$. すなわち compact set K の外で $\int p_y \mu(dy) = 0, \therefore \mu \sim 0, \varphi = 0$.

定理 仮定 (A) $\Rightarrow (\mathcal{H}_X^*)' \simeq A^*$

証. $\varphi \in A^*$ に対し $h^* \mapsto \phi(h^*, \varphi)$ が $\mathcal{H}_X^*$ 上の

conti. lin. form になることは明らか。逆に $(\mathcal{H}_X^*)' \ni \Phi$
 をとる。 $C(X)$ に Hahn-Banach の定理を適用し $\exists \lambda$, measure
 $\text{Supp } \lambda$, compact $\subset X \ni \int h^* d\lambda = \Phi(h^*)$, $\forall h^* \in \mathcal{H}_X^*$.

$\int p_Y(\lambda(dy)) \in \overline{\mathcal{O}_Y - S[\mu]}$ の a における germ u に対し τu
 $\in \mathcal{A}^*$ を定める。 $\Phi(h^*) = \psi(h^*, \tau u)$ を 2 別の measure
 λ' に対し $\int h^* d\lambda' = \psi(h^*, \tau u') = \Phi(h^*)$ とすれば
 $\psi(h^*, \tau u - \tau u') = 0$, $\forall h^* \in \mathcal{H}_X^*$, ゆえに $\tau u = \tau u'$.
 すなわち Φ に対し 唯一 $\varphi \in \mathcal{A}^*$ が定まる。

系 仮定 (A) $\Rightarrow$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y^* \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow H_a^1(Y, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}^*) \rightarrow 0 \text{ exact}$$

$$(\because) H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0.$$

系 仮定 (A). ; $\Rightarrow 1 \notin \mathcal{O}_Y$ ならば $\mathcal{O}^*$ に対する

Cousin problem が解ける。さらに $1 \in \mathcal{O}_Y$ であっ
 ても, $S \in \mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}^*$ に対し (P.19 と同様に定義した k^* :
 $\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}^* \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}^*)$ に対し) $k^* S = 0$ なら $S = p - h$,
 $p \in \mathcal{O}_{V_1}^*$, $h \in \mathcal{O}_{V_2}^*$ と書ける。

§6 Martin boundary 上への conti. extension

$\mathcal{A}^*$ が主な役を果したが, この直観的な意味は potential
 の Martin 境界での法線微分により表わされる函数の芽で

ある。 $Q^* \equiv \frac{1}{P_{x_0}} \overline{Q_a} \equiv \left\{ \frac{1}{P_{x_0}(\cdot)} h(\cdot) ; h \in Q_a, \forall a \right\}$
 (但し $x_0 \in X$ fix). による X の compact 化を $X^* = X \cup \Delta^*$
 と書く。 $\frac{1}{P_{x_0}(\cdot)} p_y(\cdot)$ の continu ext over $X^* \setminus \{y\}$ を $k^*(y)$
 と書く。 Δ^* を 双対エルツレ境界, $k^*(y)$ を 双対エルツ
 レ核という。 $k^*(y)$ の Δ^* における germ が 系 3.2
 の $k(y)$ になっている。 系 3.2 は $k^*(y) = \langle \pi, k^*(y) \rangle$
 と書いた方が Poisson 表現らしく見える。 すなわち $(Q^*)'$
 の π を Δ^* 上の 函数空間の dual の元と見て, $\mathcal{H}_X^*$ の元の
 distribution による表示と見られるからである。 しかし これは
 formal にのみ正しい。 $C(\Delta^*) \supset A^*$ を適当にとり
 $A^* \ni \varphi$ は必ず $Q^* \ni \varphi$ の延長されるようにできれば, 上
 述のような解釈は真に正しい。 これは 2 階橋内型の境界値
 問題が完全に解ける ことと大体同じでありとうていできない。

文 献

1. B. Walsh. Ann. Inst Fourier XIX-2 (1970)
 2. ——— Inventiones M. 8 (1969)
 3. 冢田 公理的ポアソナル論, Sem. on Probability
 4. ——— J. Math. Soc. Japan 23-3 (1971)
 5. 前田. J. Sci. Hiroshima. Ser A-1-30 (1966)
- その他 Schapira の本, Henne の著名な論文等