

P^1 上のクンマー分岐被覆の自己同型群

九州大 エ 桜井幸一 (Kouichi Sakurai)

P^1 上の超楕円型リーマン面のように、その moduli が、 P^1 上の分岐跡によって決定されるものがある。この方面では、難波[4], 加藤崇雄[3]らの代数関数 $y^n = f(x)$, ($f(x)$: 有理関数) によって定義される P^1 上の巡回被覆の研究があり、また最近加藤十吉[2]は、Hirzebruch[1]の P^2 (or P^1) 上のクンマー分岐被覆の同変同型問題を調べている。彼らは、被覆の枚数と分岐跡の数に対して条件をつけて、定理を証明している。

この報告では、 P^1 上の分岐跡が一般の場合のアーベル被覆 (巡回とクンマー) の同変同型問題を考える。詳しくは[5]を参照

$B = \{b_1, \dots, b_r\}$ を P^1 上の相異なる r 個の点集合とする。以下整数 m に対し、 mB で $m \sum_{i=1}^r b_i$ なる P^1 上の因子を表す。 R をリーマン面とし、 $\text{Aut}(R)$ で R の解析的自己同型群を表す。 T を $\text{Aut}(R)$ の部分群とする。このとき、 (T, R) が P^1 上分岐因子

mB をもつ巡回被覆であるとは、 T が m 次巡回群であり、かつ R/T が軌道体として $(\mathcal{P}', mB)$ に同型であると定義し、

$(T, R) \in \mathcal{C}(\mathcal{P}', mB)$ と書く。以下では $B \subset \mathcal{P}'$ が $\#B \geq 4$ かつ

$\text{Aut}(\mathcal{P}', B) = \text{id.}$ をみたす時、*asymmetric*, $\#B \leq 3$ の時、*elementary*

と呼ぶ。($\text{Aut}(\mathcal{P}', B) = \{ \phi \in \text{Aut}(\mathcal{P}') ; \phi(B) = B \}$)

定理1 $B = \{b_1, \dots, b_r\}$, $B' = \{b'_1, \dots, b'_r\}$ に対し $(T, R) \in \mathcal{C}(\mathcal{P}', mB)$

$(T', R') \in \mathcal{C}(\mathcal{P}', mB')$ とする。 (仮定) $r \geq 4$, $m \geq 3$ かつ

B : *asymmetric* (結論) 同型 $f: R \rightarrow R'$ が存在すれば、これは

同変同型 (i.e. $f^* T' f = T$) であり、同型 $\bar{f}: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}'$ かつ $\bar{f}(B) = B'$ を引きおこす。

定理1' $B = \{b_1, \dots, b_r\}$, $(T, R) \in \mathcal{C}(\mathcal{P}', mB)$ は定理1と同じとする。このとき $\text{Aut}(R) = T (\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$B = \{b_1, \dots, b_r\}$ を $\mathcal{P}'$ 上の相異なる r 個の点とする。そして、 $\pi: X \rightarrow \mathcal{P}'$ を $\pi_1(\mathcal{P}', *) \xrightarrow{\alpha} H_1(\mathcal{P}', \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H_1(\mathcal{P}', \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ なる $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Hurwitz 準同型 $\beta \circ \alpha$ の核に対応するガロア分岐被覆とする。($\mathcal{P}' = \mathcal{P}' \setminus B$, $* \in \mathcal{P}'$) X は自己同型群として被覆変換群 $T (\cong H_1(\mathcal{P}', \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{r-1})$ をもつリーマン面であり、軌道体として $X/T \cong (\mathcal{P}', mB)$ 。このとき (T, X) を分岐因子 mB をもつリーマン分岐被覆と呼び、 $(T, X) = K(\mathcal{P}', mB)$ と書く。

定理 2 $B = \{b_1, \dots, b_r\}$, $B' = \{b'_1, \dots, b'_r\}$ に対し $(T, X) = K(\mathcal{P}', mB)$,
 $(T', X') = K(\mathcal{P}', mB')$ とする。(仮定) $r \geq 3$, $n \geq 4$ かつ B の任意の
 部分集合は *asymmetric or elementary* (結論) 同型 $f: X \rightarrow X'$ が
 存在すれば, これは同変同型, しかも f は同型 $f: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}'$ かつ
 $f(B) = B'$ を引き起こす.

定理 2' $B = \{b_1, \dots, b_r\}$, $(T, X) = K(\mathcal{P}', mB)$ は定理 2 と同じ
 とする. このとき T は $\text{Aut}(X)$ の正規部分群であり,

$$\text{Aut}(X)/T \cong \text{Aut}(\mathcal{P}', B) \cong \begin{cases} S_3 & (r=3) \\ \text{id.} & (r \geq 4) \end{cases}$$

$L = \sum_{i=1}^r l_i$ を $\mathcal{P}^2$ 上の相異なる $r (\geq 2)$ 本の line から成る因子
 とする. L の特異点 p に対して, $\gamma_p: \hat{\mathcal{P}}^2 \rightarrow \mathcal{P}^2$ を p での $\mathcal{P}^2$ の
 blowing up とする. $D_i = \overline{\gamma_p^{-1}(l_i \cap p)}$, $E_p = \gamma_p^{-1}(p)$,
 $d_i = E_p \cap D_i$, $D_p = \{d_1, \dots, d_m\}$ (m は p での L の重複度)
 とおく. もし, L が, 重複度 4 以上のすべての特異点 p に対
 して, D_p の任意の部分集合が *asymmetric or elementary* である
 とき, L を *locally asymmetric* と呼ぶ.

$L = \sum_{i=1}^r l_i$ は上述の因子とする. 整数 $M \geq 2$ に対し,

$$\beta \circ \alpha: \pi_1(\mathcal{P}_0^2, *) \xrightarrow{\alpha} H_1(\mathcal{P}_0^2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H_1(\mathcal{P}_0^2; \mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$$

($\mathcal{P}_0^2 = \mathcal{P}^2 \setminus L$, $*$ ($\mathcal{P}_0^2$) を考え, 一次元の場合と同様に
 して, $\mathcal{P}^2$ 上分岐因子 mL を持つ r -マ一分岐被覆 $(T, X) =$
 $K(\mathcal{P}^2, L)$ が定義される. 加藤十吉 [2] の定理と同様にして

定理2を応用すると次の結果が得られる。

定理3 $L = \sum_{i=1}^r l_i$, $L' = \sum_{j=1}^{r'} l'_j$ に対し $(\pi, X) = K(\mathbb{P}^2, mL)$
 $(\pi', X') = K(\mathbb{P}^2, mL')$ とする。(仮定) $r \geq 4$, $m \geq 6$, 各 l_i
 $(i=1, \dots, r)$ 上少なくとも3点 L の特異点が存在し,かつ L は
locally asymmetric (結論) 同型 $f: X \rightarrow X'$ が存在すれば,
 f は同変同型であり, 同型 $\bar{f}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ s.t. $\bar{f}(L) = L'$ を引きおこす。

定理3' $(\pi, X) = K(\mathbb{P}^2, mL)$ は定理3と同じとする。このとき π は $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ の正規部分群であり,

$$\text{Aut}(X)/\pi \cong \text{Aut}(\mathbb{P}^2, L)$$

我々は最近, 定理2が $r \geq 4$ か $m \geq 11$ の仮定の下で成立することを証明した。したがって定理3は $m \geq 11$ ならば L が *locally asymmetric* でなくても成立する。加藤十吉は[6]においてこの条件を $m \geq 6$ とできるかと述べている。

参考文献

[1] Hirzebruch, F.: Arrangements of lines and Algebraic surfaces. Arithmetic and Geometry, Vol. II, Progress in Math. 36, 113-140 (1983), Birkhauser.

- [2] Kato, M. : On biholomorphisms between some Kummer branched covering space of complex projective plane. preprint
- [3] Kato, T. : Conformal equivalence of compact Riemann surfaces. Japan J. Math. 7, 281-289 (1981).
- [4] Namba, M. : Equivalence problem and automorphism groups of certain compact Riemann surfaces. Tsukuba J. Math. 5, 319-338 (1981).
- [5] Sakurai, K. and Suzuki, M. : Equivalence problem and automorphisms of some abelian branched coverings of the Riemann sphere, preprint.
- [6] Kato, M. : 複素射影平面に沿った Kummer 分岐被覆. トポロジーと代幾何学 1985.