物性研究　96－2（2011－5）

講義ノート

トポロジカル絶縁体の理論に関するノート

名古屋大学大学院理学研究科物質理学専攻[1]　御領 潤

(2011年3月14日受理)

このノートは２００９年８月３１日から９月２日にかけて行われた、東京大学生産技術研究所羽田野研究室の夏合宿の講義ノートをもとに作成されている。ただ、実際に合宿で行った議論と比べると、途中大きく変更を加えた部分もある。そのため、合宿に参加された方がご覧になるといささか奇異に感じられるかもしれない。ここで変更を加えた理由を述べると、羽田野研夏合宿は毎年行われているが、２００８年度（現広島大　井村健一郎氏担当 [1]）や２０１０年度（東京大　岡隆史氏担当）の合宿における講義とテーマが若干似通っており、重複も多く見られる。よって、『物性研究』に記録されている一連の「羽田野研夏合宿講義ノート」にバラエティをつけるためにも、一気に構成から変えた方が良いように思えたからである。ただ、合宿でかなりの時間を割いた２次元ディラック模型のパリティ量子異常については、本稿でも必要なので詳しい計算とともに付録に記載した。そして３次元トポロジカル絶縁体との密接な関連を議論してある。

1　はじめに

バンド絶縁体は、バルクのエネルギースペクトルにギャップが開いている状態として定義される。その中で、バルクの状態がトポロジカルな構造をもち、その結果として系のエッジ/表面に摂動に対して robust なギャップレス状態があらわれる「トポロジカルな絶縁体」と、そうではない「自明な絶縁体」に大別される。トポロジカル絶縁体はさらに、(i) 時間反転対称性を破るものと (ii) 時間反転対称性を破らないものの二つに分類される。(i) の例は量子ホール系で、(ii) はグラフェンや HgTe/CdTe 量子井戸などで盛んに議論されている量子スピンホール系（量子ホール効果のスピン版）である。さらには、Bi系化合物などの３次元の時間反転対称なトポロジカル絶縁体も存在する。バルクの波動関数のトポロジーとエッジ状態の存在の関係は**バルク/エッジ対応**と呼ばれ [2,3]、トポロジカル絶縁体の顕著な特徴、あるいは、定義そのものと言ってもよいであろう。

このノートではこのバルク/エッジ対応を、出来るだけモデルによらず、かつ、簡単な定式化で導くことを目標としたい。具体的なモデルを用いた計算は物理をやる上で言うまでもなく必要不可欠なものである。ただ、どこまで一般性のある議論なのかという点や、

[1]現所属: 東京大学生産技術研究所, E-mail: jungoryo@iis.u-tokyo.ac.jp

煩雑な計算に追われて（実はシンプルな）理論の構造などが見え難くなるといった側面がある。そのような点を明確にするのに、一般的で単純な定式化は意味を持ってくるであろう。このノートの解説は、文献 [4] のチュートリアル・パートや、文献 [5] による定式化を参考にしている。文献 [6] も参考になるであろう。具体的なモデルの計算は他の文献に譲る。その中で最近の日本語の解説としては、たとえば、井村によるグラフェンを対象にした2008年度の羽田野研夏合宿講義ノート [1] がある。この分野の総合的あるいは一般向けレビューとして文献 [7] が挙げられる。

このノートの構成は以下の通りである。

まず第2節では、絶縁体における電流およびスピン流の電場に対する線形応答の式を求める。この場合、電場に平行な応答はゼロとなることは言うまでもない。着目するのは電場に垂直な応答である。ここで、トポロジカルな表式が得られる。

第3節では、時間反転対称性が破れている場合、すなわち量子ホール系を扱う。ここで、第2節で求めた電流の表式を用いる。バルクの状態がトポロジカルに非自明な構造を持つと、量子化されたホール伝導度が現れ、その結果カイラルなエッジ状態が生じる。バルクとエッジの対応の証明には電荷の保存則が重要な役割を演ずる。

第4節では、時間反転対称性が保たれている場合、すなわち量子スピンホール系を議論する。電子スピン S_z が保存する場合に限って言えば、量子ホール効果との直接的な類似が成り立つ。すなわち、スピンホール伝導度が量子化され、ヘリカルなエッジ状態の存在が示される。第2節で求めたスピン流の表式を用いて議論する。ここに S_z が保存しない摂動が加わった場合はさらなる拡張が必要となる。この場合 S_z はもはや良い量子数ではないためスピンホール伝導度は物理的意味を失うが、エッジ状態に関しては（摂動を受ける前のエッジ状態の個数の偶奇性により） robust に生き残る場合（奇）とそうでない場合（偶）に分かれる。この様子を記述するために Z_2 トポロジカル数が導入される。

以上は2次元系の話で、第5節では3次元の時間反転対称なトポロジカル絶縁体について述べる。この系では、2次元系の議論の拡張として、奇数個のギャップレス・ディラック粒子が試料表面に robust に現われる。そしてパリティ量子異常により表面には必ずチャーン・サイモン項 [8–11] が存在する事が示され、表面特有の様々な特異現象を引き起こす。

第6節では、最近の話題の例として電子相関の効果や、それに関連する著者等の仕事について少し触れたい。

付録には、3次元トポロジカル絶縁体を議論する目的で、2次元ディラック理論のパリティ量子異常とチャーン・サイモン項について詳しい計算を載せた。パリティ量子異常は、2次元の蜂の巣格子系における Semenoff 模型や Haldane 模型 [12,13]、そして Kane-Mele 模型 [14,15] でも重要な役割を果たすが、それらの解説は他の文献に譲る。例えば文献 [1] が参考になる。この付録は場の量子論の手法を用いて記述されており、本文とは一応独立に読めるように書いたつもりである。

文献の引用に関しては著者なりの注意をしたつもりではあるが、著者の浅学のためあま

り網羅的になっていないことを、お詫びとともに初めにお断りしておきたい。尚、計算では自然単位系 $\hbar = c = 1$ を用いている。また、電子の電荷は $-e(< 0)$ としている。

2 絶縁体における電流、およびスピン流

まず、このノートの定式化のベースとなる、電流およびスピン流の電場に対するトポロジカルな表式を求める。2次元系を考える。この節では、まだエッジは考えない。

仮定として、

- ブロッホ状態であること
- 絶縁状態、すなわち、フェルミレベルがバンドギャップの中にあること

の二つを考える。一つ目の仮定に関しては不純物が入ると満たされなくなるが、その場合はツイストされた境界条件を用いた定式化 [16] を用いることによりパラレルな議論を展開出来る。二つ目の仮定により、電場に平行な電流およびスピン流は自明にゼロとなる。よって以下で議論するのは、電場に垂直な応答に関してのみである。

2.1 ブロッホ理論

記号の整理を兼ねて、簡単にブロッホのバンド理論を復習する。離散的な並進不変性のある系を考える。すると、ブリルアン・ゾーン (2次元トーラス) 上で定義された結晶運動量 $\boldsymbol{k}$ が良い量子数となっている。そして、ハミルトニアン H に対して、ブロッホ・ハミルトニアン $H_{\boldsymbol{k}} \equiv \exp[-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]H\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]$ が定義される。$H_{\boldsymbol{k}}$ に対する固有値方程式を解く事により、ブロッホ状態 $u^n_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ およびバンド・スペクトル $E^n_{\boldsymbol{k}}$ が得られる。ここで、n はバンドを表す整数である。

電場を y 方向にかける。すると、結晶運動量は

$$(k_x, k_y) \to (k_x, k_y - eE_y t) \equiv \boldsymbol{k}(t) \tag{2.1}$$

と時間変化する。これは、電磁気ポテンシャルが共変微分の形で導入されること、電場を表すゲージとして $A_y = -E_y t$ を用いたこと、以上2点を念頭に置いていただければすぐ理解できるであろう。もちろん、電場をあらわすゲージとして他のものを用いても同様の結果が導かれる。この時間変化はブロッホ振動の原因である。同時にブロッホ・ハミルトニアンも時間変化するようになる:

$$H_{\boldsymbol{k}} \to H_{\boldsymbol{k}(t)}. \tag{2.2}$$

以下の応答の見積もりでは、電場 E_y は十分に小さく、系の時間変化は断熱的に起こると考える[2]。これらの計算は文献 [5] に依っている。計算は絶対零度で行っている。

[2]電場と結晶軸の向きをうまく整合させると断熱過程を周期的にすることが出来、ベリー位相との関連が

2.2 電流

電流の期待値は

$$\begin{aligned}\langle J_x\rangle &= -e\sum_{n\le E_F}\int_{\mathrm{BZ}}\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\left\langle u^n_{\boldsymbol{k}(t)}\left|\frac{\partial H_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_x}\right|u^n_{\boldsymbol{k}(t)}\right\rangle \\ &= ie\sum_{\alpha\le E_F}\int_{\mathrm{BZ}}\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\left(\left\langle\frac{\partial u^n_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_x}\middle|\dot{u}^n_{\boldsymbol{k}(t)}\right\rangle-\left\langle\dot{u}^n_{\boldsymbol{k}(t)}\middle|\frac{\partial u^n_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_x}\right\rangle\right) \\ &= E_y\frac{e^2}{2\pi}\sum_{n\le E_F}\int_{\mathrm{BZ}}\frac{d^2k}{2\pi i}\left(\left\langle\frac{\partial u^n_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_x}\middle|\frac{\partial u^n_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_y}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial u^n_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_y}\middle|\frac{\partial u^n_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_x}\right\rangle\right)\end{aligned}\tag{2.3}$$

と求まる。ここで、$\sum_{n\le E_F}$ はフェルミ・レベルより下にあるバンド全ての和を表す。そして、$\int_{\mathrm{BZ}}d^2k$ はブリルアン・ゾーン全体にわたる結晶運動量の積分である。また、一行目から二行目における変形では、$H_{\boldsymbol{k}}$ に掛かっている k_x 微分を部分積分によりブロッホ状態の微分に置き換えた後、時間依存するシュレーディンガー方程式から得られる（ブロッホ状態に対する）関係式 $i|\dot{u}^n_{\boldsymbol{k}(t)}\rangle = H_{\boldsymbol{k}(t)}|u^n_{\boldsymbol{k}(t)}\rangle$ を用いた。二行目から三行目の変形では、まず断熱近似を用いて他の状態への遷移を落としており、さらに式 (2.1) の関係を用いて時間微分を k_y 微分に置き換えた。式 (2.3) はホール伝導度が

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{e^2}{2\pi}\sum_{n\le E_F}\int_{\mathrm{BZ}}\frac{d^2k}{2\pi i}\left(\left\langle\frac{\partial u^n_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_x}\middle|\frac{\partial u^n_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_y}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial u^n_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_y}\middle|\frac{\partial u^n_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_x}\right\rangle\right) \\ &\equiv \frac{e^2}{2\pi}N_{\mathrm{Ch}}\end{aligned}\tag{2.4}$$

と与えられる事を意味する。この表式が有名なサウレス-甲元-ナイチンゲール-デン・ニース (TKNN) 公式で、1980年代初頭に見出された [17]。N_{Ch} はチャーン数と呼ばれるトーラス上で定義されるトポロジカル数で、上の表式ではブロッホ波動関数のブリルアン・ゾーン上におけるトポロジー（渦度）が表現されている [17, 18]。励起ギャップが閉じない限り必ず整数値をとり、ハミルトニアンに含まれるパラメタの連続変化や不純物などによる摂動の影響を受けない。ギャップが閉じると k 積分がブリルアン・ゾーン全体の積分とはならず（バンドの和や k 積分は詰まった状態を足し合わせている）、その場合は任意の値をとりうるため量子化が保証されなくなる。ギャップが閉じてまた開くと、整数値が別の整数値に変化するという転移が起こる。

ホール伝導度が有限値をとるためには、時間反転対称性の破れが必要条件となる。この破れは、一般的には磁場によって与えられる[3]。磁場以外にも、スピンのオーダーなどにより発生した磁化により（外部磁場がゼロのもとで）ホール効果が発生する事があり、その場合でも励起ギャップが開いていれば、ホール伝導度は式 (2.4) に従って量子化される。

議論出来ることが知られているが、ここではあまり立ち入らない事にする。例えば、入門的なテキストとして文献 [6] 参照。

[3]磁場が掛かっている場合、式 (2.4) における k 積分は磁気ブリルアン・ゾーン上で定義される。

また、電荷が磁場に比例して発生するという結果も以下のようにして得られる。いま、x 方向と y 方向が等価であるとすると、電流は

$$\langle J_i \rangle = \sigma_{xy} \sum_j \epsilon_{ij} E_j \tag{2.5}$$

と書ける。電荷密度を ρ_e と書くとしよう。すると、電荷の保存則、式 (2.5)、およびマックスウェル方程式を用いる事により、

$$\begin{aligned} \langle \dot{\rho}_e \rangle = \boldsymbol{\nabla} \cdot \langle \boldsymbol{J} \rangle &= \sigma_{xy} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \sigma_{xy} \frac{\partial B}{\partial t}, & (2.6) \\ \therefore \langle \rho_e \rangle &= \sigma_{xy} B & (2.7) \end{aligned}$$

が示される。

2.3 スピン流

電子スピン S_z はいま保存量であるとする。すると、アップ・スピンとダウン・スピンの電子それぞれに対して電流が定義される。それぞれの期待値は 2.2 節の計算を繰り返す事により得られ、

$$\begin{aligned} \langle J^{\uparrow}_{\boldsymbol{k}x} \rangle &= \sigma^{\uparrow}_{xy} E_y, \\ \langle J^{\downarrow}_{\boldsymbol{k}x} \rangle &= \sigma^{\downarrow}_{xy} E_y \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。但し、

$$\begin{aligned} \sigma^{\uparrow}_{xy} &= \frac{e^2}{2\pi} \sum_{n \le E_F} \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2k}{2\pi i} \left(\left\langle \frac{\partial u^{\uparrow n}_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_x} \middle| \frac{\partial u^{\uparrow n}_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u^{\uparrow n}_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_y} \middle| \frac{\partial u^{\uparrow n}_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_x} \right\rangle \right) \\ &\equiv \frac{e^2}{2\pi} N^{\uparrow}_{\mathrm{Ch}}, & (2.9) \\ \sigma^{\downarrow}_{xy} &= \frac{e^2}{2\pi} \sum_{n \le E_F} \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2k}{2\pi i} \left(\left\langle \frac{\partial u^{\downarrow n}_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_x} \middle| \frac{\partial u^{\downarrow n}_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u^{\downarrow n}_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_y} \middle| \frac{\partial u^{\downarrow n}_{\boldsymbol{k}(t)}}{\partial k_x} \right\rangle \right) \\ &\equiv \frac{e^2}{2\pi} N^{\downarrow}_{\mathrm{Ch}} & (2.10) \end{aligned}$$

はそれぞれ、アップ・スピンを持つブロッホ状態、ダウン・スピンを持つブロッホ状態の電気的ホール伝導度である。それぞれがチャーン数 $N^{\uparrow,\downarrow}_{\mathrm{Ch}}$ で書き表されている。スピン流は

$$\begin{aligned} \langle J^s_{\boldsymbol{k}x} \rangle &= \frac{1}{2e} \left(\langle J^{\uparrow}_{\boldsymbol{k}x} \rangle - \langle J^{\downarrow}_{\boldsymbol{k}x} \rangle \right) \\ &= \sigma^s_{xy} E_y & (2.11) \end{aligned}$$

となり、σ^s_{xy} はスピンホール伝導度

$$\begin{aligned}\sigma^s_{xy} &= \frac{1}{2e}(\sigma^{\uparrow}_{xy} - \sigma^{\downarrow}_{xy}) \\ &= \frac{e}{2\pi}N^s_{\mathrm{Ch}}, \qquad (2.12)\\ N^s_{\mathrm{Ch}} &\equiv \frac{1}{2}(N^{\uparrow}_{\mathrm{Ch}} - N^{\downarrow}_{\mathrm{Ch}}) \qquad (2.13)\end{aligned}$$

である。式 (2.12) の一行目の因子 1/2 はスピンが 1/2 であることから来ている。N^s_{Ch} はスピン・チャーン数 [19] と呼ばれ、系が時間反転対称なときは $N^{\uparrow}_{\mathrm{Ch}} = -N^{\downarrow}_{\mathrm{Ch}}$ となるので必ず整数値を取る[4]。

時間反転対称性が存在し、かつ σ^s_{xy} が有限になるための条件は $N^{\uparrow}_{\mathrm{Ch}} = -N^{\downarrow}_{\mathrm{Ch}} \neq 0$、すなわち $\sigma^{\uparrow}_{xy} = -\sigma^{\downarrow}_{xy} \neq 0$ である。これを実現させるには、電子スピンに依存して結合する "磁場" のようなものがあればよい。すなわち、アップ・スピンの電子とダウン・スピンの電子がそれぞれ逆向きの "磁場" を感じ、互いに伝導度の符号が反転した量子ホール状態が出来れば良い。このような "磁場" は、固体中のスピン軌道相互作用によって与えられる。そして、スピンホール伝導度は励起ギャップが開いている限り $e/2\pi$ の整数倍に量子化され、時間反転対称性と S_z の保存則を保つ摂動に対して robust である。量子スピンホール効果を示す具体的なモデルの例として、グラフェンの Kane-Mele 模型が挙げられる [14,15]。

電荷密度の式 (2.7) を得るのと同じ計算をアップ・スピン状態とダウン・スピン状態に対して繰り返し、それぞれの差を考えると、電子スピン密度が磁場に比例して現れることが解る:

$$\langle \rho_s \rangle = \frac{1}{2e}\langle \rho^{\uparrow}_e - \rho^{\downarrow}_e \rangle = \sigma^s_{xy} B. \qquad (2.14)$$

ゼーマン効果と一見似ているが、ボーア磁子に依存せずスピンホール伝導度で書かれている点や、フェルミ面が無い点が大きく違う。

この副節の議論は、S_z が保存する場合のみ有効である事を再度強調しておく。しかし、非保存の場合を議論する上での土台となる。

3 時間反転を破るトポロジカル絶縁体 (量子ホール系)

この節では、時間反転対称性を破るトポロジカル絶縁体（量子ホール系）を議論する。そしてバルク/エッジ対応 [2,3]、すなわち、バルクに量子化されたホール伝導度が存在すると、電荷保存則を満たすためにエッジにカイラルな状態が存在しなければならない事を示す。

[4]式 (2.13) は文献 [19] の定義と比べて因子 1/2 だけ異なっている。すなわち、文献 [19] の定義に従うと、スピン・チャーン数は時間反転対称なときは偶数値をとる。

以下、$x \geq 0$ の半無限平面に系が存在するとする。そしてエッジにおける電子の閉じ込めポテンシャルは階段関数的になっていると近似する。

バルク領域の電流および電荷（面）密度は

$$\langle J_i \rangle = \theta(x)\sigma_{xy}\sum_j \epsilon_{ij}E_j, \tag{3.1}$$

$$\langle \rho_e \rangle = \theta(x)\sigma_{xy}B \tag{3.2}$$

と書ける。連続の式を吟味すると、

$$\begin{aligned}\langle \dot{\rho}_e \rangle + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{J} \rangle &= \delta(x)\sigma_{xy}E_y \\ &= \delta(x)\frac{e^2}{2\pi}N_{\mathrm{Ch}}E_y\end{aligned} \tag{3.3}$$

となるので（N_{Ch} は式 (2.4) で与えられるチャーン数）、電荷の時間微分は空間積分を行うことにより

$$\dot{Q}_{\mathrm{bulk}} = L\frac{e^2}{2\pi}N_{\mathrm{Ch}}E_y \tag{3.4}$$

で与えられる（$L \gg 1$ はエッジの長さとする）。すなわち、バルクだけ見ると電荷の保存則を満たさなくなる事が解る。

エッジ状態として、境界 ($x = 0$) を y 軸に沿って一定の向きにのみ移動できるカイラルな一次元フェルミオン $\varphi(t, y)$ が存在すると仮定してみる。というのも、このような粒子が存在するとカイラル量子異常により電荷の保存則が破れる事が知られているからである [20–23]。この破れを用いて式 (3.4) を相殺させようというもくろみである [2,3]。

一つのカイラル・エッジ状態による保存則の破れを具体的に計算してみよう。電場中の分散関係はゼロ・エネルギー（フェルミ点）近傍で

$$E_k = v(\delta k_y - eE_y t) \tag{3.5}$$

と書ける。ここで、δk_y はフェルミ点から測った運動量で、v はフェルミ速度である。これより Δt の間に増加する粒子数は $\Delta N = -\frac{v}{|v|}\frac{eE_y\Delta t}{2\pi/L}$ であり、よって電荷の時間微分は

$$\dot{Q}_{\mathrm{edge}} = -e\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta t} = L\frac{e^2}{2\pi}\frac{v}{|v|}E_y \tag{3.6}$$

となる。

よって N_{ch} が正（負）のとき、v が負（正）のカイラル・エッジ状態が N_{Ch} 個 ($-N_{\mathrm{Ch}}$ 個) 存在すれば、系全体として電荷保存則が成り立つ事が解る。言い換えると、バルクでチャーン数（≡ 量子化されたホール伝導度）が非零の整数値をとる絶縁体では、電荷保存則からエッジには必ずカイラルな状態が存在しなければならない（**バルク／エッジ対応**）[2,3]。そして、カイラル・エッジ状態の数はチャーン数で与えられる。

この節の結果は、エッジに平行な電場をかけると、バルクから量子ホール電流によってエッジに向けて電荷が供給され、溜まって行くという様子を表している。バルクの電荷輸送は励起状態によるものではなく、価電子帯にある状態が運んでいる。サウレスにより提案された断熱ポンピング [24] と等価なメカニズムである。

4 時間反転対称なトポロジカル絶縁体（量子スピンホール系）

この節では、時間反転対称なトポロジカル絶縁体（量子スピンホール系）を議論する。まず始めに、電子スピン S_z が保存する場合を考え、次に、電子スピン S_z が保存しない摂動が加わった場合を考える。

4.1 S_z が保存する場合

この副節はほぼ3節の繰り返しである。バルクのスピン流、およびスピン面密度は

$$\langle J_i^s \rangle = \theta(x)\sigma_{xy}^s \sum_j \epsilon_{ij} E_j, \tag{4.1}$$

$$\langle \rho_s \rangle = \theta(x)\sigma_{xy}^s B \tag{4.2}$$

となる。連続の式を吟味すると、

$$\begin{aligned} \langle \dot{\rho}_s \rangle + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{J}^s \rangle &= \delta(x)\sigma_{xy}^s E_y \\ &= \delta(x)\frac{e}{2\pi} N_{\mathrm{Ch}}^s E_y \end{aligned} \tag{4.3}$$

となるので (N_{Ch}^s は式 (2.13) で与えられるスピン・チャーン数)、スピンの時間微分は空間積分を行うことにより

$$\dot{S}_{z\mathrm{bulk}} = L\frac{e}{2\pi} N_{\mathrm{Ch}}^s E_y \tag{4.4}$$

で与えられる ($L \gg 1$ はエッジの長さとする)。すなわち、バルクだけ見ると S_z の保存則を満たさなくなる事が解る。

エッジ状態として、境界 ($x = 0$) 上に、互いに逆向きのスピンと速度を持ったカイラル・フェルミオンのペア $\varphi_{\uparrow,\downarrow}(t, y)$ が存在するとしよう。このようなペアはヘリカル・エッジ状態と呼ばれている [14, 15]。

ヘリカル・エッジ状態が一つあるとき、スピンの保存則が破れることを以下に見る。アップ・スピン状態とダウン・スピン状態の電場中における分散関係はゼロ・エネルギー（フェルミ点）近傍で

$$\begin{aligned} E_k^{\uparrow} &= v(\delta k_y - eE_y t), \\ E_k^{\downarrow} &= -v(\delta k_y - eE_y t) \end{aligned} \tag{4.5}$$

と書ける。ここで、δk_y はフェルミ点から測った運動量、$v(-v)$ はアップ・スピン状態（ダウン・スピン状態）のフェルミ速度を表している。これより Δt の間に増加する粒子数は、アップ・スピン状態に対しては $\Delta N^{\uparrow} = -\frac{v}{|v|}\frac{eE_y\Delta t}{2\pi/L}$ であり、ダウン・スピン状態に対しては $\Delta N^{\downarrow} = \frac{v}{|v|}\frac{eE_y\Delta t}{2\pi/L}$ となる。よってスピンの時間微分は

$$\dot{S}_{z\text{edge}} = \frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta N^{\uparrow} - \Delta N^{\downarrow}}{\Delta t} = -L\frac{e}{2\pi}\frac{v}{|v|}E_y \tag{4.6}$$

となる。

よって N^s_{Ch} が正（負）のとき、v が正（負）のヘリカル・エッジ状態が N^s_{Ch} 個 ($-N^s_{\text{Ch}}$ 個) 存在すれば、系全体としてスピン保存則が成り立つ事が解る。言い換えると、バルクでスピン・チャーン数（≡量子化されたスピン・ホール伝導度）が非零の整数値をとる絶縁体では、スピン保存則からエッジには必ずヘリカルなギャップレス状態が存在しなければならない [14,15,19]。そしてヘリカル・エッジ状態の数はスピン・チャーン数で与えられる。

この副節の結果は量子ホール効果と直接的な類似があり、エッジに平行な電場をかけると、バルクから量子スピンホール流によってエッジに向けてスピンが供給され、溜まって行くという様子を表している。バルクのスピン輸送は励起状態によるものではなく、価電子帯にある状態が運んでいる。これもサウレスにより提案された断熱ポンピング [24] と等価なメカニズムである。

4.2 S_z の保存則を破る時間反転対称な摂動がかかった場合

次に、S_z の保存則を破る摂動がかかった場合を考える [14,15]。ただし、重要なポイントとして時間反転対称性は保たれているとする。電荷の保存はゲージ対称性から必ず保証されるが、スピンに関しては電荷と異なり原理的に要請される対称性がないため、一般に保存則を破る相互作用が存在する。例えば、ラシュバ、あるいはドレッセルハウス・スピン軌道相互作用などがその例である [14,15,25]。そのような相互作用があるとスピンやスピン流は ill-defined となる。しかし、エッジ状態の有無は、スピンの保存・非保存に関わらず物理的に意味がある。この副節では、ヘリカルなギャップレス・エッジ状態の数が奇数の場合は摂動がかかっても最低一つの状態が生き残るが、偶数の場合は生き残る保証はないことを示す。

以下、エネルギー・スペクトルの概念図を用いて説明する。$x = 0$ にエッジが有るため、並進対称性は y 方向にのみ存在する。そのため良い量子数として存在する結晶運動量は k_y のみである。格子定数を 1 として、ブリルアン・ゾーンは $0 \le k_y < 2\pi$ にとってある。

4.2.1 ヘリカル・エッジ状態が一つの場合

摂動がない段階で、y 方向の速度が正のアップ・スピン状態が一個、速度が負のダウン・スピン状態が一個あるとする。まず、アップ・スピン状態のスペクトルを引く。図1にあるように、価電子帯から伝導電子帯へ突き抜けるような右肩上がりの赤線で書かれている[5]。ここで一点注意すると、エッジのスペクトルは必ずバルクのスペクトルの中に埋もれていき、混ざり合わなければならない。というのも、4.1節で述べたように、保存則 (S_z が保存する場合の話) が成立する為にはバルクからエッジに向けてスピンが供給されなければいけないからである。一般にはエッジだけで孤立したスペクトルもあり得ようが、それはここで議論しているトポロジカルなエッジ状態とは何の関係もない。

次にダウン・スピン状態のスペクトルを引く。これは左肩上がりの青線で書かれている (図1)。注意すべき点は、これら2つの状態は時間反転変換で互いに移り合う関係にあるので（そうでないと時間反転対称にならない！)、ブリルアン・ゾーンの時間反転対称点 ($k_y = n\pi$, n は整数) の折り返しに関して対称になっていなければならない。そのため、これら2つの線は必ず $k_y = \pi$ で交わる[6]。そして、この交わり（図1の黒点）はクラマース縮退であり、時間反転対称性が保たれている限りいかなる摂動がかかっても必ず生き残る。他の時間反転対称点 $k_y = 0$ や $k_y = 2\pi$ でも、となりのブリルアン・ゾーンから伸びてきている状態との間にクラマース縮退があるため（縮退点はバルクのバンドの中に埋もれてしまっているが)、それぞれの線は必ず価電子帯から伝導電子帯へ突き抜ける。すなわち、ギャップレス状態の対が robust に生き残る。

4.2.2 ヘリカル・エッジ状態が二つの場合

摂動がない段階で、y 方向の速度が正のアップ・スピン状態が二個、速度が負のダウン・スピン状態が二個あるとする。図2(a) にあるように、アップ・スピン状態のスペクトルをバルクの価電子帯から伝導電子帯へ向けて右肩上がりの赤線二本で書く。次に、それぞれの赤線に対して時間反転対称点での折り返しとなるように、ダウン・スピン状態のスペクトル二本を青線で書く。対称点での交わり（黒点）は先ほどと同様クラマース縮退であり、時間反転対称性が保たれている限りいかなる摂動がかかっても必ず生き残る。しかし、白丸で表された交点はクラマース縮退とは無関係であり、一般に S_z の保存が破れると互いに混ざり合ってギャップが開いてしまう (図2(b))。

[5]もちろん、実際にモデルを用いて計算すると、こんな一直線にはならない。

[6]図1ではバルクのバンド・ギャップ領域内におけるエッジ・スペクトルの交点が $k_y = \pi$ にある場合を描いているが（例えば、蜂の巣格子の Kane-Mele 模型でジグザク・エッジを考えた場合はこのようになる)、$k_y = 0$ に交点が現われる場合もある。

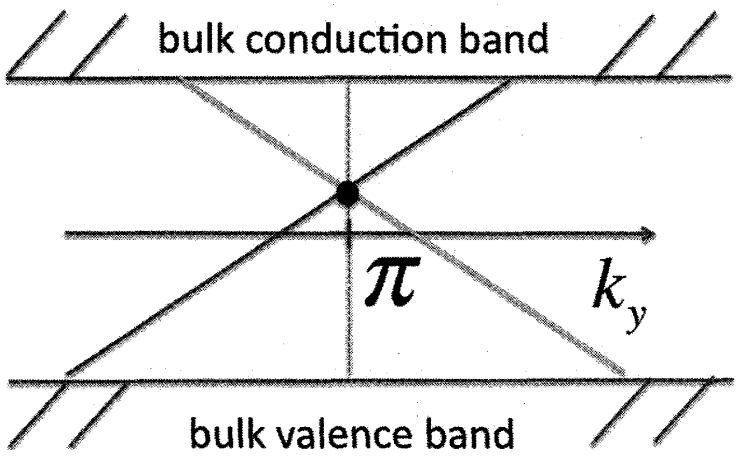

図 1: ヘリカル・エッジ状態が一つのときの $k_y = \pi$ 周辺のスペクトル。黒丸はクラマース縮退を表す。

4.2.3 ヘリカル・エッジ状態が三つの場合

しつこいようだが、もう少し繰り返す。摂動がない段階で、速度が正のアップ・スピン状態が三個、速度が負のダウン・スピン状態が三個あるとする。図 3(a) にあるように、アップ・スピン状態のスペクトルをバルクの価電子帯から伝導電子帯へ向けて右肩上がりの赤線三本で書く。次に、それぞれの赤線に対して時間反転対称点での折り返しとなるように、ダウン・スピン状態のスペクトル三本を青線で書く。対称点での交わり（黒点）は先ほどと同様クラマース縮退であり、時間反転対称性が保たれている限りいかなる摂動がかかっても必ず生き残る。しかし、白丸で表された交点は全てクラマース縮退とは無関係であり、一般に S_z の保存が破れると互いに混ざり合ってギャップが開いてしまう。しかし、それでもこの場合は必ず一対のギャップレス状態が生き残る事が見て取れる (図 3(b))。

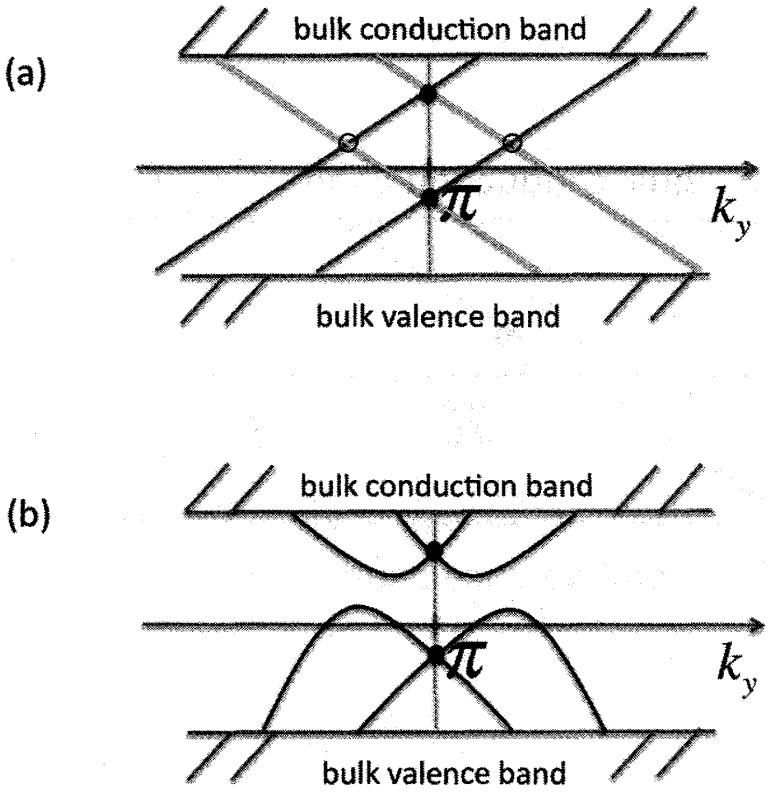

図 2: ヘリカル・エッジ状態が二つのときの $k_y = \pi$ 周辺のスペクトル。(a) は摂動がかかる前の図で、黒丸はクラマース縮退、白丸は偶然縮退を表す。(b) は摂動がかかった後のスペクトルを表す。

4.3 Z_2 トポロジカル数

以上を繰り返して行くと、摂動が加わる前の状態数が奇数であればエッジ状態は robust に生き残り、偶数の場合は残らない事が解る。これらの結果はトポロジカル数により分類される。まず、スピン・チャーン数 (2.13) を用いて議論する。S_z が保存する場合、この数はヘリカル・エッジ状態の数と一致する (4.1 節参照)。S_z が非保存の場合の振る舞いの詳細は福井・初貝により詳細に調べられている [26]。その結果、S_z を保存しない相互作用が加わるとスピン・チャーン数はトポロジカルな意味を失ってしまう、すなわち、パラメタを振ってハミルトニアンを連続変形させたとき、バルクのバンド・ギャップが閉じない場合でも値が別の整数値にジャンプしてしまうことが起こる。しかし、スピン・チャーン数の偶奇性はトポロジカルな意味を失わない (すなわち、バルクのギャップが閉じない限り、偶数ならば偶数のまま、奇数ならば奇数のままである)。よって、スピン・チャーン数が奇数であるような系にはトポロジカルに robust なヘリカル・エッジ状態が最低一つは存在し、偶数であれば robust な状態はない、ということになる。

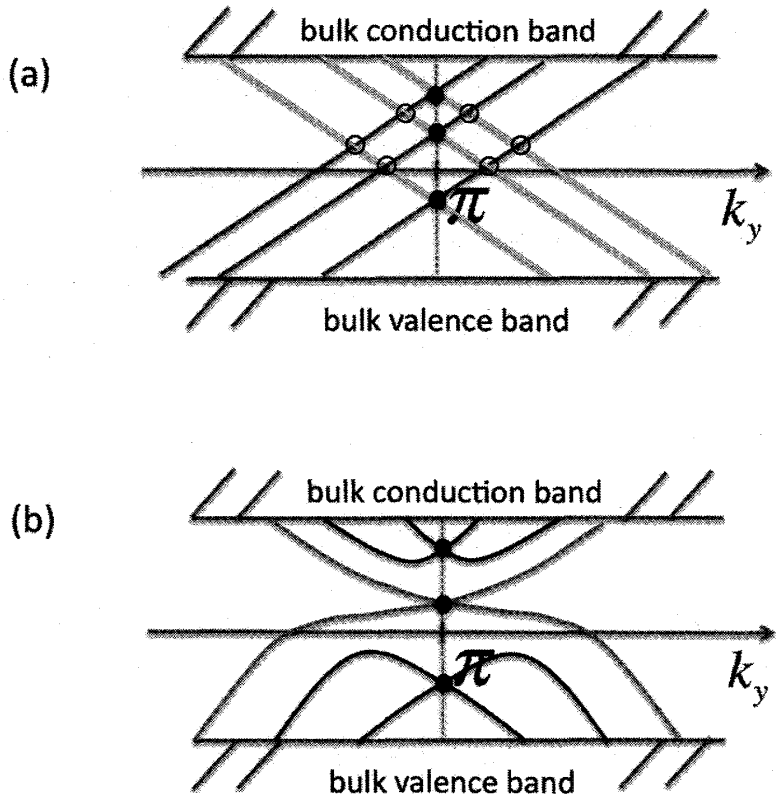

図 3: ヘリカル・エッジ状態が三つのときの $k_y = \pi$ 周辺のスペクトル。(a) は摂動がかかる前の図で、黒丸はクラマース縮退、白丸は偶然縮退を表す。(b) は摂動がかかった後のスペクトルを表す。

そして、スピン・チャーン数の偶奇性に対応するトポロジカル数が Z_2 数で、Kane と Mele により提案された [15]。Z_2 数は系が空間反転対称性を持つときは容易に計算され、ブリルアン・ゾーン内の時間反転対称点におけるブロッホ波動関数のパリティの積と一致することが示されている [27]。

5　3次元のトポロジカル絶縁体

2次元系の拡張として、3次元のトポロジカル絶縁体がある [4,27]。ここでは文献 [4] に関する直感的な議論を行いたい。

次元が一つ上がったため、エッジ状態に対応するものは表面状態となる。ヘリカル・エッジ状態の自然な拡張は、ギャップレスの2次元ディラック粒子である。すなわち、クラマース縮退により保護された奇数個のディラック粒子が表面に存在する系が、3次元のトポロジカル絶縁体となる。

ところで、「ディラック粒子が奇数個ある」ということは実は大変奇異なことである。このような系ではパリティ量子異常により、表面に電気伝導度単位 $e^2/2\pi$ の半整数倍に量子化されたホール伝導度が現れる。電子間相互作用を取り入れていないにもかかわらず、である。この導出についての詳細は付録で議論することにして、以下、文献 [4] に述べられている注目すべき現象の予言について述べる。表面近傍に電荷を置くと、そこから放射状に生じる電場を感じて表面でホール電流が流れる。この電流が作る磁場分布が、ちょうど表面を挟んだ鏡映点上に磁気単極子を置いた場合に発生する磁場分布と一致する。すなわち、表面を挟んで電荷と磁気単極子の束縛状態（ダイオン (dyon)）が出来ているように見える。

表面で量子ホール効果が発生するという事は、表面にチャーン・サイモン作用

$$S = \int dtdxdy \frac{e^2}{8\pi} \epsilon_{\mu\rho\nu} A^\mu \partial^\rho A^\nu \tag{5.1}$$

が存在することと等価である ($\mu, \rho, \nu = t, x, y$ で、$\epsilon_{\mu\rho\nu}$ は三階の完全反対称テンソル)。これは、バルクにおいて θ 項

$$S_\theta = \int dtdxdydz \frac{\theta e^2}{8\pi^2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} \tag{5.2}$$

(但し、$\theta = \pi$) と呼ばれるトポロジカルな（時空の計量によらない）項が存在することを意味する[7]。θ 項は一般の θ に対しては時間反転対称性を破ってしまうが、$\theta = 0, \pi$ の時に限り対称性を保つ。そして、$\theta = \pi$ がトポロジカルに非自明な絶縁状態に対応し、式 (5.2) の表面項としてチャーン・サイモン項 (5.1) が現れるという訳である [4]。すなわち、試料表面におけるギャップレス・エッジ状態の存在とバルクの θ 項の存在が一対一に対応している。そして、θ の二値性がちょうど 3 次元の Z_2 数による分類 [27] と対応している。

6 最近の話題

最近では、トポロジカル絶縁体に対する不純物の効果や、電子相関の効果等が研究され続けている。電子相関の研究では、パイロクロア格子や蜂の巣格子上におけるスピン軌道相互作用を持つハバード模型が調べられている。そして、平均場計算による相図が得られている [30,31]。その結果、以下の事が言われている。スピン軌道相互作用が大きく電子相

[7] θ 項は、量子色力学 (QCD. 強い相互作用を記述する非アーベル・ゲージ理論) の真空を非摂動的に定義しようとしたときに見い出された項である。この場合、式 (5.2) 中の $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ は非アーベル的電場や磁場に置き換わる。θ の値は QCD の枠内のみでは決めることが出来ない。そして、$\theta \neq 0, \pi$ であると CP 対称性 (C:荷電共役, P:パリティ) が破れる。これは CPT 定理より時間反転対称性の破れと等価である。しかし、中性子の電気双極子モーメントの測定から強い相互作用の時間反転対称性の破れは極めて小さいとされている。このパラドックスは strong CP 問題と呼ばれている [28]。そしてこの問題の解決のため、dynamical に $\theta = 0$ に落ち着かせる機構として Peccei と Quinn により導入された素粒子がアクシオン (axion) である（が、未だ発見されていない）[29]。最近トポロジカル絶縁体の議論でもこの名称にしばしばお目にかかる [4]。蛇足であるが、Peccei-Quinn 理論によると、$\theta = \pi$ はエネルギー極大点である。

関が小さい領域では量子スピンホール相が現われるが、電子相関を強めると一旦バンド・ギャップが閉じた後にモット・ギャップが開き（バンド-モット転移）スピノンが解離してトポロジカルなエッジ状態を作っている状態(量子スピノンホール相)が現れる。また、著者等により量子スピンホール相のうち電子間相互作用の強さや格子間隔が適当な大きさをもつ領域では、完全反磁性（マイスナー効果）が起こることが指摘されている [32,33]。

7 まとめ

以上、出来るだけ一般的、かつ、簡単な定式化を用いてトポロジカル絶縁体を概観した。著者の力量不足のため網羅的でなくいろいろ不十分な点もあろうが、本格的な勉強の前に大体のあたりを付けるのに役に立つのかもしれない。ひとつの簡便な見方を提示するガイドとなる事を願って止まない。

謝辞

羽田野研究室夏合宿の講師としてお招きいただいた東京大学生産技術研究所の羽田野直道先生、大所高所からの有用なコメントを多数くださったテキサス大学のトミオ・山越・ペトロスキ先生、当時羽田野研究室の助教で合宿の幹事であった西野晃徳さん（現神奈川工科大学)、ノートを丹念にとってくださった羽田野研究室の川本達郎君、そして著者の拙い「講義」に参加して盛り上げてくださった皆様全員に心より感謝致します。また、関連テーマの共同研究者である北海道大学の前田展希さんに感謝致します。そして、いろいろ煩雑な事務手続きを進めてくださった羽田野研究室秘書の三井恵子さんにもこの場を借りて御礼申し上げます。

付録A 2次元ディラック理論、パリティ量子異常、チャーン・サイモン項と3次元トポロジカル絶縁体

2次元のディラック理論におけるパリティ量子異常と、その結果、有効理論[8]中に現われるチャーン・サイモン項について少し詳しく議論し、3次元トポロジカル絶縁体との関連について述べたい。この付録は本文とは独立に読めるように書いたつもりである。そのため本文と重複する部分が若干有るが、ご容赦願いたい。

[8]ここで言う有効理論について簡単にコメントする。微視的な作用 $S[\psi,\psi^\dagger,\Gamma]$ があるとする。ここで ψ と $\psi^\dagger$ は微視的自由度の場の演算子、Γ は外場である。この作用から微視的自由度である ψ と $\psi^\dagger$ を積分 (trace out) して得られる有効作用

$$S_{\rm eff}[\Gamma] = \frac{1}{i}\ln\int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\psi^\dagger\,\mathrm{e}^{iS[\psi,\psi^\dagger,\Gamma]}$$

によって記述される理論のことを、外場に対する応答を記述する有効理論と呼んでいる。

以下の議論ではラグランジュ形式を用いる。これは決して伊達や酔狂でやっているのではなく、以下で本質的な役割を果たすチャーン・サイモン項はハミルトン形式では explicit に現われず、そのために定式化が複雑になるからである。ハミルトン形式であらわに顔を出さない理由は、チャーン・サイモン項は外場に直交する応答を表す項なので、エネルギー消費がゼロのためである。

付録 A.1　2 次元 (2+1 次元時空) のディラック理論

ディラック理論は相対論的な運動をするスピン 1/2 のフェルミオンを記述する理論である。固体物理でも、グラフェン [34] やゼロ・ギャップ有機導体 [35,36] などにみられるように、バンド・スペクトルの中にバレー（谷）点が現れる場合があり、その点の周りの低エネルギー励起がディラック方程式で有効的に記述されることが知られている。3 次元トポロジカル絶縁体の表面にもディラック・コーン（ギャップレスのバレー点）が現れる。以下では toy 模型として 2 次元（2+1 次元時空）のディラック粒子の電磁気学 (**Dirac QED$_{2+1}$**) を議論して行く。その後に 3 次元トポロジカル絶縁体との関連を議論したい。

電磁場 A_μ と結合した電荷 $-e(<0)$ を持つディラック粒子 ψ に対するラグランジアン密度は以下で与えられる [23,37]：

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}\left(i\not{D} - m\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \qquad \text{(付録 A.1)}$$

ここで、$\mu,\nu = 0,1,2$ は時空を表す添字で[9]重複したギリシャ文字に関しては自動的に和をとる、というアインシュタインの規則に従っている。そして、

$$\gamma^0 = \sigma^3,\ \gamma^1 = i\sigma^1,\ \gamma^2 = i\sigma^2, \qquad \text{(付録 A.2)}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \qquad g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\{1, -1\ -1\}, \qquad \text{(付録 A.3)}$$

$$iD_\mu = i\partial_\mu - \mathrm{e}A_\mu, \qquad \text{(付録 A.4)}$$

$$\not{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu = \gamma_0 D_0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{D}, \qquad \text{(付録 A.5)}$$

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0, \qquad \text{(付録 A.6)}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad \text{(付録 A.7)}$$

である。

ここで一点コメントを加えたい。いま扱っているディラック粒子は“本物の”ディラック粒子であり、式 (付録 A.2) のガンマ行列（パウリ行列）は本物のスピンを表している。それに対し、グラフェン [34] やゼロ・ギャップ有機導体 [35,36] などの低エネルギー励起と

[9]ここでは、電磁場も 2 次元空間中に閉じ込められているとして扱ってしまっている。固体物理への応用を念頭に置くと、本来電磁場に関しては 3 次元的に扱うべきであるが、以下の議論では電磁場の方程式を解くわけではないので、表式の簡単化のため 2 次元的であるとしている。

して現れるディラック粒子の場合では、ガンマ行列は擬スピン（副格子スピン）を表している。そのため、次副節で述べる時間反転やパリティ変換に対する変換性は両者で若干異なる場合があることに注意して頂きたい。しかし最終的に得られる結論に対しては影響が現われないため、定式化の簡便さからもこのまま“本物の”ディラック粒子を扱って行く事にする。

ラグランジアン密度(付録A.1)から得られるオイラー・ラグランジュ方程式として、ディラック方程式とマックスウェル方程式が導かれる：

$$(i\not{D} - m)\,\psi = 0, \tag{付録A.8}$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu \\ &= -e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi. \end{aligned} \tag{付録A.9}$$

付録A.2　ディラック質量mが時間反転対称性$\mathcal{T}$およびパリティ$\mathcal{P}$を破ること

この副節では、$x^0 = t$, $x^1 = -x_1 = x$, $x^2 = -x_2 = y$ と書く。

付録A.2.1　$\mathcal{T}$変換 $(t \to -t)$

自由なマックスウェル方程式は自明に$\mathcal{T}$不変である。このことから、A_μの$\mathcal{T}$変換は

$$A^0(t,x,y) \to A^0(-t,x,y) \equiv A^{0\mathcal{T}}(t,x,y), \tag{付録A.10}$$

$$A^i(t,x,y) \to -A^i(-t,x,y) \equiv A^{i\mathcal{T}}(t,x,y) \tag{付録A.11}$$

と定まる [23,37]。

$m = 0$の自由なディラック方程式（電磁場はカットする。つまり $A_\mu = 0$）も自明に$\mathcal{T}$不変であると考え、ψの変換性を定めてみよう。

$$i\not{\partial}\psi = 0 \tag{付録A.12}$$

に対しtを$-t$に置き換えたものを愚直に書けば

$$i\,(-\gamma_0\partial_0 - \gamma_x\partial_x - \gamma_y\partial_y)\,\psi(-t,x,y) = 0 \tag{付録A.13}$$

となることが解る。ここで、$\gamma_0 = \gamma^0$, $\gamma_x \equiv \gamma_1 = -\gamma^1$, $\gamma_y \equiv \gamma_2 = -\gamma^2$ である。ここで発見法的に

$$\psi(-t,x,y) = -\gamma_y \left\{\psi^{\mathcal{T}}(t,x,y)\right\}^* \tag{付録A.14}$$

とおくと、

$$i(\gamma_0\partial_0+\gamma_x\partial_x+\gamma_y\partial_y)\gamma_y\left\{\psi^{\mathcal{I}}(t,x,y)\right\}^*=0, \qquad \text{(付録 A.15)}$$

$$\Leftrightarrow\ i\left(-\gamma_0\partial_0-\gamma_x\partial_x+\gamma_y\partial_y\right)\left\{\psi^{\mathcal{I}}(t,x,y)\right\}^*=0, \qquad \text{(付録 A.16)}$$

$$\Leftrightarrow\ i\left(\gamma_0\partial_0-\gamma_x\partial_x-\gamma_y\partial_y\right)\psi^{\mathcal{I}}(t,x,y)=0. \qquad \text{(付録 A.17)}$$

ここで、1行目から2行目では左から γ_y を掛けて丸括弧の左から右へ移し、消去した。また2行目から3行目では複素共役をとった。これにより $\psi^{\mathcal{I}}(t,x,y)$ は $\mathcal{I}$ 変換前の場 $\psi(t,x,y)$ と同じ方程式に従うことが解る。すなわち、式(付録 A.14)によって ψ の $\mathcal{I}$ 変換を定義することにより、$m=0$ のディラック方程式を $\mathcal{I}$ 対称にすることが出来た。

次に $m\neq 0$ の場合を考えよう。すると、質量項は $t\to -t$ の置き換えに対し

$$m\psi(t,x,y)\to m\psi(-t,x,y)=m(-\gamma_y)\{\psi^{\mathcal{I}}(t,x,y)\}^* \qquad \text{(付録 A.18)}$$

となる。式(付録 A.15)から式(付録 A.17)までの変形と同様に左から γ_y を掛けて消去し複素共役をとると、

$$-m\psi^{\mathcal{I}}(t,x,y) \qquad \text{(付録 A.19)}$$

となり、$\psi^{\mathcal{I}}(t,x,y)$ は $\psi(t,x,y)$ と比べて質量の符号が反転したディラック方程式に従うことが解る。すなわち、質量項は $\mathcal{I}$ を破ることが示された。

ここでは式が煩雑になるのを避けるため、電磁場とディラック粒子を別々に議論したが、両者の結合系(つまり Dirac QED_{2+1})を考えても結果は同様である。

付録 A.2.2　$\mathcal{P}$ 変換 ($x\to -x,\ y\to y$)

$\mathcal{I}$ 変換の場合と同様に、$\mathcal{P}$ 変換[10] についても議論出来る。

自由なマックスウェル方程式は自明に $\mathcal{P}$ 不変である。このことから、A_μ の $\mathcal{P}$ 変換は

$$A^0(t,x,y)\ \to\ A^0(t,-x,y)\equiv A^{0\mathcal{P}}(t,x,y), \qquad \text{(付録 A.20)}$$

$$A^1(t,x,y)\ \to\ -A^1(t,-x,y)\equiv A^{1\mathcal{P}}(t,x,y), \qquad \text{(付録 A.21)}$$

$$A^2(t,x,y)\ \to\ A^2(t,-x,y)\equiv A^{2\mathcal{P}}(t,x,y) \qquad \text{(付録 A.22)}$$

と定まる [23,37]。

$m=0$ の自由なディラック方程式(電磁場はカットする。つまり $A_\mu=0$)も自明に $\mathcal{P}$ 不変であると考え、ψ の変換性を定めてみよう。

$$i\partial\!\!\!/\,\psi=0 \qquad \text{(付録 A.23)}$$

[10] 3次元空間のパリティ変換は $\boldsymbol{x}\to -\boldsymbol{x}$ であるが、2次元空間の場合は $x\to -x,\ y\to y$ となる (x の符号を変えず y の符号だけ変える、という定義でも良い)。というのも、3次元と同様に全ての成分に負号を付ける形で定義すると、それは 180 度回転と等価になり、離散変換として定義出来ないからである。

に対し x を $-x$ に置き換えたものを愚直に書けば

$$i\left(\gamma_0\partial_0+\gamma_x\partial_x-\gamma_y\partial_y\right)\psi(t,-x,y)=0 \qquad \text{(付録 A.24)}$$

となることが解る。ここで発見法的に

$$\psi(t,-x,y)=-\gamma_x\psi^{\mathcal{P}}(t,x,y) \qquad \text{(付録 A.25)}$$

とおくと、

$$-i(\gamma_0\partial_0+\gamma_x\partial_x-\gamma_y\partial_y)\gamma_x\psi^{\mathcal{P}}(t,x,y)=0, \qquad \text{(付録 A.26)}$$

$$\Leftrightarrow i\left(\gamma_0\partial_0-\gamma_x\partial_x-\gamma_y\partial_y\right)\psi^{\mathcal{P}}(t,x,y)=0. \qquad \text{(付録 A.27)}$$

ここで、1行目から2行目では左から γ_x を掛けて丸括弧の左から右へ移し、消去した。これにより $\psi^{\mathcal{P}}(t,x,y)$ は $\mathcal{P}$ 変換前の場 $\psi(t,x,y)$ と同じ方程式に従うことが解る。すなわち、式 (付録 A.25) によって ψ の $\mathcal{P}$ 変換を定義することにより、$m=0$ のディラック方程式を $\mathcal{P}$ 対称にすることが出来た。

次に、$m\neq 0$ の場合を考えよう。すると、質量項は $x\to -x$ の置き換えに対して

$$m\psi(t,x,y)\to m\psi(t,-x,y)=m(-\gamma_x\psi^{\mathcal{P}}(t,x,y)) \qquad \text{(付録 A.28)}$$

と変化する。式 (付録 A.26) から式 (付録 A.27) までの変形と同様に左から γ_x を掛けて消去すると、

$$-m\psi^{\mathcal{P}}(t,x,y) \qquad \text{(付録 A.29)}$$

となり、$\psi^{\mathcal{P}}(t,x,y)$ は $\psi(t,x,y)$ と比べて質量の符号が反転したディラック方程式に従うことになる。すなわち、質量項は $\mathcal{P}$ を破ることが示された。

ここでは式が煩雑になるのを避けるため、電磁場とディラック粒子を別々に議論したが、両者の結合系 (つまり Dirac QED_{2+1}) を考えても結果は同様である。

付録 A.3　電磁場 A_μ の有効作用

付録 A.2 節では、フェルミオンの質量が有限の場合の Dirac QED_{2+1} で $\mathcal{T}$ と $\mathcal{P}$ の対称性が破れていることを見た。この対称性の破れは外部磁場により破られる対称性と等価である。そして質量が存在する、すなわち、スペクトルにはギャップがあるため、ゼロ磁場であっても量子化されたホール効果が起こることが期待される。以下で、実際にこのことを確認してみよう。

なお、この副節では、x は三元座標 $x=(x^0,x^1,x^2)$ を表している。

ψ と $\bar{\psi}$ を積分して電磁場に対する有効作用を導出する：

$$\mathrm{e}^{iS_{\mathrm{eff}}[A_\mu]}=\int\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathrm{e}^{i\int\mathrm{d}^3x\mathcal{L}[\psi,\bar{\psi},A_\mu]}. \qquad \text{(付録 A.30)}$$

もともとの微視的ラグランジアン (付録A.1) が持つゲージ対称性およびローレンツ対称性から、その有効作用は一般に次の形をしている：

$$S_{\rm eff}[A_\mu] = -\frac{1}{4}\int {\rm d}^3x\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \int {\rm d}^3x \int {\rm d}^3y \frac{1}{2} A_\mu(x)\Pi^{\mu\nu}(x-y)A_\nu(y) + \cdots. \quad \text{(付録 A.31)}$$

ここで、最初の項はもともと微視的ラグランジアン (付録A.1) に含まれていた（フェルミオンの積分とは関わりのない）マックスウェル項、すなわち電磁場の運動項である。それに対し、$\Pi^{\mu\nu}(x-y)$ はフェルミオンの積分により誘起される3元のカレント2点関数で、

$$\Pi^{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{i}\frac{\delta^2}{\delta A_\mu(x)\delta A_\nu(y)} S_{\rm eff}[A_\mu]\Big|_{A_\mu=0} = \frac{1}{i}\langle 0|T\{j^\mu(x)j^\nu(y)\}|0\rangle \quad \text{(付録 A.32)}$$

となっている。ここで、j^μ は式 (付録A.9) で定義されたフェルミオンの3元カレント演算子で、T は時間順序積を表す。ところで、ゲージ対称性よりカレント保存則

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{(付録 A.33)}$$

が成り立つため、カレント2点関数に対して x に関する微分 ∂_x^μ あるいは y に関する微分 ∂_y^ν を作用させたとき、

$$\partial_x^\mu \Pi_{\mu\nu}(x-y) = \partial_y^\nu \Pi_{\mu\nu}(x-y) = 0 \quad \text{(付録 A.34)}$$

とならなければいけない。

これを満たす $\Pi_{\mu\nu}(x-y)$ として次のものが考えられる：

$$\Pi_{\mu\nu}(x-y) = \{\kappa\epsilon_{\mu\rho\nu}\partial^\rho + \Delta\varepsilon(\Box g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu) + \cdots\}\delta^{(3)}(x-y). \quad \text{(付録 A.35)}$$

右辺の最初の一階微分の項が2+1次元時空に特徴的な項であり、この項についてはすぐ後で詳述する。第2項はマックスウェル項の繰り込み、すなわち古典電磁気学でいうところの誘電率補正を表す (□はダランベルシアン)。これは次のようにして理解できる。マックスウェル項を変形すると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= \frac{1}{2}A^\nu(\Box A_\nu - \partial^\mu\partial_\nu A_\mu) \\ &= \frac{1}{2}A^\mu(\Box g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu)A^\nu \end{aligned} \quad \text{(付録 A.36)}$$

となる。式 (付録A.35) の第2項は式 (付録A.36) に含まれる微分の構造と同じ形をしているため、マックスウェル項に対する繰り込み、すなわち誘電率補正を与えることが解る。

一方、式 (付録A.35) の第一項は一階微分であるため、低エネルギー・長波長領域では二階微分で与えられるマックスウェル項やその繰り込みよりも支配的な項となる。この

項は、時空が2+1次元であることからその存在が許されている。というのも、カレント2点関数がローレンツの足を2つ持っているため、右辺に現れる項もすべて同様に2つ足を持たなければならない。ところで、2+1次元時空では三つのローレンツの足を持つ完全反対称テンソル $\epsilon_{\mu\rho\nu}$ が存在するので、一階微分と合わせてローレンツの足を2つ持つ項を作る事が出来る。

式(付録A.35)の第一項の係数 κ は次のように求められる。$\Pi_{\mu\nu}(x-y)$ をフーリエ変換すると、

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i\kappa\epsilon_{\mu\rho\nu}q^{\rho} + \mathcal{O}(q^2) \qquad \text{(付録 A.37)}$$

となるので

$$\kappa = \frac{1}{3!i}\epsilon^{\mu\rho\nu}\frac{\partial}{\partial q^{\rho}}\Pi_{\mu\nu}(q)\bigg|_{q^{\mu}=0} \qquad \text{(付録 A.38)}$$

と与えられる。ここで $\epsilon^{\mu\rho\nu}\epsilon_{\mu\rho\nu} = 3!$ を使った。式(付録A.32)より、カレント2点関数はフェルミオンの1ループ・グラフ

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -\frac{\mathrm{e}^2}{i}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{Tr}[\gamma_{\mu}G(p+q)\gamma_{\nu}G(p)], \qquad \text{(付録 A.39)}$$

$$G(p) = \frac{1}{i}(F.T.)\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|0\rangle = \frac{1}{\not{p}-m+i\delta}, \qquad \not{p}\equiv\gamma^{\mu}p_{\mu} \qquad \text{(付録 A.40)}$$

で与えられる。但し, $(F.T.)...$ は $...$ のフーリエ変換を表すものとする。また δ はフェルミオンの経路積分を well-defined にする為に導入する無限小の収束因子である [23, 37]。これを使うと κ に関する次のような式が得られる：

$$\kappa = \frac{\mathrm{e}^2}{3!}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\epsilon^{\mu\rho\nu}\mathrm{Tr}[\gamma_{\mu}\frac{\partial G(p)}{\partial p}\gamma_{\nu}G(p)]. \qquad \text{(付録 A.41)}$$

上式中の $\frac{\partial}{\partial p}G(p)$ について少し変形を行う。

$$G(p)G^{-1}(p) = 1 \qquad \text{(付録 A.42)}$$

が自明に成り立つので、この両辺に $\frac{\partial}{\partial p^{\rho}}$ を作用させると

$$\frac{\partial G(p)}{\partial p^{\rho}}G^{-1}(p) + G(p)\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial p^{\rho}} = 0, \qquad \text{(付録 A.43)}$$

すなわち、

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(p)}{\partial p^{\rho}} &= -G(p)\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial p^{\rho}}G(p)\\ &= -G(p)\gamma_{\rho}G(p)\end{aligned} \qquad \text{(付録 A.44)}$$

と変形できる。これを用いると式 (付録 A.41) は、

$$\kappa = -\frac{\mathrm{e}^2}{3!}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\epsilon^{\mu\rho\nu}\,\mathrm{Tr}[\gamma_\mu G(p)\gamma_\rho G(p)\gamma_\nu G(p)] \tag{付録 A.45}$$

となり、

$$G(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\delta} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\delta} \tag{付録 A.46}$$

であることから、

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu G(p)\gamma_\rho G(p)\gamma_\nu G(p)] \tag{付録 A.47}$$

$$= \frac{1}{(p^2 - m^2 + i\delta)^3}\epsilon^{\mu\rho\nu}\,\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}+m)\gamma_\rho(\not{p}+m)\gamma_\nu(\not{p}+m)]$$

$$= \frac{1}{(p^2 - m^2 + i\delta)^3}\left(m^3\epsilon^{\mu\rho\nu}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu] + m\epsilon^{\mu\rho\nu}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\not{p}\gamma_\rho\not{p}\gamma_\nu + \gamma_\mu\not{p}\gamma_\rho\gamma_\nu\not{p} + \gamma_\mu\gamma_\rho\not{p}\gamma_\nu\not{p}]\right) \tag{付録 A.48}$$

となる。ここで、積分を実行した後には p に対して偶数次の項しか残らないので、奇数次の項を無視した。$\not{p}^2 = p^2$, $\not{p}\gamma_\rho = 2p_\rho - \gamma_\rho\not{p}$ に注意すると[11]、式 (付録 A.48) の第 2 項は以下のようになる：

$$\begin{aligned}
&m\epsilon^{\mu\rho\nu}\mathrm{Tr}[2p_\rho\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu - p^2\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu + 2p_\rho\gamma_\mu\gamma_\nu\not{p} - \gamma_\mu\gamma_\rho\not{p}\gamma_\nu\not{p} + \gamma_\mu\gamma_\rho\not{p}\gamma_\nu\not{p}]\\
&= m\epsilon^{\mu\rho\nu}\mathrm{Tr}[2p_\rho\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu - p^2\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu + 2p_\rho\gamma_\mu\gamma_\nu\not{p}]\\
&= m\epsilon^{\mu\rho\nu}\mathrm{Tr}[2p_\rho\gamma_\mu(\not{p}\gamma_\nu + \gamma_\nu\not{p}) - p^2\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu]\\
&= m\epsilon^{\mu\rho\nu}\mathrm{Tr}[4p_\rho\gamma_\mu p_\nu - p^2\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu]\\
&= -p^2 m\epsilon^{\mu\rho\nu}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu].
\end{aligned} \tag{付録 A.51}$$

なお、4 行目から 5 行目で $\mathrm{Tr}[\gamma_\mu] = 0$ を使った。そして、

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu] = \mathrm{Tr}\left[\left(\frac{1}{2}\{\gamma_\mu, \gamma_\rho\} + \frac{1}{2}[\gamma_\mu\,\gamma_\rho]\right)\gamma_\nu\right] \tag{付録 A.52}$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\left(g_{\mu\nu} - i\epsilon^\sigma_{\mu\rho}\gamma_\sigma\right)\gamma_\nu\right] \tag{付録 A.53}$$

$$= -i\epsilon^\sigma_{\mu\rho}(2g_{\sigma\nu}) \tag{付録 A.54}$$

$$= -2i\epsilon_{\mu\rho\nu} \tag{付録 A.55}$$

[11] これは、

$$\not{p}^2 = \gamma^\mu p_\mu\gamma^\nu p_\nu = (\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu])p_\mu p_\nu = p^2, \tag{付録 A.49}$$

$$\not{p}\gamma_\rho = p^\sigma\gamma_\sigma\gamma_\rho = 2p^\sigma g_{\sigma\rho} - \gamma_\rho\not{p} = 2p_\rho - \gamma_\rho\not{p}, \tag{付録 A.50}$$

であることから解る。

となるので、結局式 (付録 A.47) は、

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu G(p)\gamma_\rho G(p)\gamma_\nu G(p)] = \frac{1}{(p^2-m^2+i\delta)^3} m(m^2-p^2)\,\epsilon^{\mu\rho\nu}\,\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu] \qquad \text{(付録 A.56)}$$

$$= \frac{2im\cdot 3!}{(p^2-m^2+i\delta)^2} \qquad \text{(付録 A.57)}$$

とまとめられる。従って式 (付録 A.38) の κ は以下で与えられる：

$$\kappa = -2im\mathrm{e}^2 \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{(p^2-m^2+i\delta)^2}$$

$$= -2im\mathrm{e}^2 \int \frac{\mathrm{d}^2p}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\frac{1}{(p_0-E_{\vec{p}}+i\delta)^2\,(p_0+E_{\vec{p}}-i\delta)^2}. \qquad \text{(付録 A.58)}$$

ここで $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2+m^2}$ である。まず、p_0 に関する積分を実行する。この積分には実軸上の少し上（下）に負（正）エネルギー解に対応する極が存在する。p_0 を複素平面へ解析接続して負エネルギー解を拾うような積分経路をとり留数計算を実行すると、

$$\kappa = -2im\mathrm{e}^2 \int \frac{\mathrm{d}^2p}{(2\pi)^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{i}{(z-E_{\vec{p}}+i\delta)^2}\bigg|_{z=-E_{\vec{p}}+i\delta}$$

$$= \frac{m\mathrm{e}^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}^2p}{(2\pi)^2}\frac{1}{(|\vec{p}|^2+m^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{m\mathrm{e}^2}{4\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}|\vec{p}|\,\frac{|\vec{p}|}{(|\vec{p}|^2+m^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^2}{4\pi}\frac{m}{|m|}\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^2}{2\pi}\frac{m}{|m|} \qquad \text{(付録 A.59)}$$

となる。(一行目から二行目に変形する際に $\delta\to 0$ の極限をとった) すなわち、κ は電気伝導度単位 $e^2/2\pi$ の半分の値に量子化される。以上をまとめると、

$$S_{\mathrm{eff}}[A] = \int \mathrm{d}^3x\int\mathrm{d}^3y\frac{1}{2}A_\mu(x)\Pi^{\mu\nu}(x-y)A_\nu(y) + \cdots - \frac{1}{4}\int\mathrm{d}^3xF^2$$

$$= \int \mathrm{d}^3x\left\{\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\rho\nu}A_\mu\partial_\rho A_\nu - \frac{\varepsilon}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \cdots\right\} \qquad \text{(付録 A.60)}$$

となっており、κ は式 (付録 A.59) で与えられ、$\varepsilon = 1+\Delta\varepsilon$ は誘電率である。($\Delta\varepsilon$ の計算は省略する。答えは $\Delta\varepsilon\propto e^2/m$) この第 1 項がチャーン・サイモン項である [8]。

この有効作用から電流の期待値が求められる:

$$\langle 0|j_\mu|0\rangle = \frac{\delta S_{\mathrm{eff}}}{\delta A^\mu}\bigg|_{A^\mu=0} = \kappa\epsilon_{\mu\rho\nu}\partial^\rho A^\nu, \qquad \text{(付録 A.61)}$$

$$\therefore\ \langle 0|j_x|0\rangle = \kappa\epsilon_{x\rho\nu}\partial^\rho A^\nu = \kappa E_y. \qquad \text{(付録 A.62)}$$

最後の式は電場に対して垂直に電流が流れる、すなわち、ホール効果が起こる事を示している。従ってκはホール伝導度σ_{xy}であることが解る。そして式(付録A.59)より、ディラック粒子が一つ存在する2+1次元時空の系では、電気伝導度単位$e^2/2\pi$の半分に量子化されたホール効果が起こる事が結論される。

付録A.4　コールマン・ヒルの非繰り込み定理

ここまで、κをフェルミオンの1ループ・レベルで計算した。コールマンとヒルによれば、電磁場の輻射によるフェルミオンの自己エネルギー補正やバーテックス補正を取り込んだ場合でもこの結果は変わらない、すなわち、1ループの結果が厳密である事がワード・高橋恒等式を用いることにより証明されている[38]。定理の仮定として与えられているのはゲージ対称性とフェルミオンの励起ギャップの存在である。

付録A.5　パリティ量子異常

量子ホール効果は$\mathcal{P}$や$\mathcal{T}$を破る現象である。しかし式(付録A.59)から分かるように、$m \to 0$の極限、すなわち、古典的なラグランジアンのレベルでは$\mathcal{P}$や$\mathcal{T}$が回復する極限でも、これらの対称性を破るホール伝導度が有限に残る。これは量子効果(フェルミオンの経路積分)により対称性の破れが誘起される、量子異常と呼ばれる場の量子論特有の現象[21,22]の一種であると解釈され、パリティ量子異常と呼ばれている[8–13,39]。またこの現象は、一つ次元の低い系の軸性量子異常と密接に関連している事が示されている[40]。ここで得られたホール伝導度の符号は、$m \to 0$のとり方によって異なる。ちなみに、最初からゼロにしてしまうと積分の寄与が発散してしまい、ホール伝導度の値は不定となる。

付録A.6　境界の存在する系

今までは境界のない場合について調べてきた。境界を考えると、ゲージ対称性の要請から境界にカイラルな状態が存在していなければならないことを示す。これは本文中で述べたバルク・エッジ対応の事である。そしてバルクには必ずディラック粒子が2つ（偶数個）存在しなければ成らない事も示される。ここでバルク領域をΩ, 境界を$\partial\Omega$と表す。

付録A.6.1　チャーン・サイモン項は境界でゲージ不変性を破る

境界のある系の項による作用

$$S = \int_{\Omega} \mathrm{d}^3x \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\rho\nu} A_\mu \partial_\rho A_\nu \qquad \text{(付録A.63)}$$

に対し、ゲージ変換

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f \tag{付録 A.64}$$

を施すと、

$$S = \int_\Omega \mathrm{d}^3x \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\rho\nu}(A_\mu + \partial_\mu f)\partial_\rho(A_\nu + \partial_\nu f) \tag{付録 A.65}$$

となる。ここで $\partial_\rho\partial_\nu f$ の項は完全反対称テンソルによってゼロになることに注意すると、S の変化分は

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_\Omega \mathrm{d}^3x \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\rho\nu}(\partial_\mu f)(\partial_\rho A_\nu) \\ &= \int_\Omega \mathrm{d}^3x \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\rho\nu}\partial_\mu(f\partial_\rho A_\nu) \\ &= \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}^2x n_\mu \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\rho\nu} f\partial_\rho A_\nu \\ &\neq 0\end{aligned} \tag{付録 A.66}$$

となり、境界でゲージ不変性が破れている。(ここで、n_μ は $\partial\Omega$ に対する法線ベクトルである) この破れは、電荷保存則の破れとしても表現される。$x = 0$ に境界が存在するとすると、S から得られるバルク領域の電流は

$$J_\mu^{\mathrm{bulk}} = \frac{\partial S}{\partial A_\mu} = \kappa\epsilon^{\mu\rho\nu}\partial_\rho A_\nu\theta(x) \tag{付録 A.67}$$

より、保存則の破れ

$$\partial^\mu J_\mu^{\mathrm{bulk}} = \kappa E_y\delta(x) \neq 0 \tag{付録 A.68}$$

が生じる。電荷の時間変化を求めると、

$$\dot{Q}_{\mathrm{bulk}} = \int \mathrm{d}y\kappa E_y \neq 0 \tag{付録 A.69}$$

となっている。

しかしゲージ対称性、すなわち、電荷保存則は必ず成り立つべきである。よってエッジに対称性を回復する状態が必ず存在しているはずである。

付録 A.6.2　カイラル・エッジ状態

エッジ状態として、境界 $(x = 0)$ を y 軸に沿って一定の向きにのみ移動できるカイラルなフェルミオン $\varphi(t, y)$ が存在すると仮定してみる。というのも、このような粒子が存在するとカイラル量子異常により、電荷の保存則が破れる事が知られているからである [21–23]。保存則の破れを具体的に計算してみよう。このラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{edge}} = \varphi^\dagger\{i\partial_0 + \chi(-i\partial_y - eE_y t)\}\varphi \tag{付録 A.70}$$

と与えられる。ここで、カイラリティ$\chi = \pm 1$は境界に沿ってどちら向きに進んでいるかを表す指数である。エッジ状態の分散関係は、式(付録A.70)からハミルトニアン密度をフーリエ変換して

$$E_k = \chi k_y - eE_y t \qquad \text{(付録A.71)}$$

となる。これより、$L(\gg 1)$をエッジの長さとすると、Δtの間に増加する粒子数は$\Delta N = -\chi \frac{eE_y \Delta t}{2\pi/L}$であり、電荷の時間微分は

$$\dot{Q}_{\text{edge}} = -e\chi \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = L\chi \frac{e^2 E_y}{2\pi} \neq 0 \qquad \text{(付録A.72)}$$

となる。ここで、ゲージ対称性、すなわち、電荷保存則より、境界とバルクの電荷の和が保存する事が要請される。ところで、それぞれの時間微分を足し合わせると

$$\dot{Q}_{\text{bulk}} + \dot{Q}_{\text{edge}} = L\frac{e^2 E_y}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\frac{m}{|m|} + \chi\right) \neq 0 \qquad \text{(付録A.73)}$$

となり、どうしてもまだ保存させることが出来ない。そこで、バルクに質量の符号が等しいディラック粒子が2つ存在すると考えよう。このとき、バルクの量子ホール伝導度は整数値をとることに注意しよう。すると、$m > 0$に対しては$\chi = -1$、$m < 0$に対しては$\chi = +1$を選ぶ事により、全電荷の和の微分は

$$2\dot{Q}_{\text{bulk}} + \dot{Q}_{\text{edge}} = 0 \qquad \text{(付録A.74)}$$

となり、保存則を成り立たせる事が出来る。

以上をまとめると、境界のある場合のディラック理論では、バルク領域にディラック粒子は偶数個(これを$2N$個と書くことにする)存在し、奇数個の場合はあり得ない。その結果、励起ギャップがある場合、量子ホール伝導度は電気伝導度単位の整数倍、すなわち、$\frac{e^2}{2\pi}N$といったかたちに量子化される。そして境界には必ずカイラルなフェルミオンがN個存在することが言える。これらの性質(すなわちバルク・エッジ対応)はゲージ対称性より導かれている[2,3,41,42]。

固体中のバルクのブロッホ・バンドの中では、ディラック粒子の数は偶数となっている。われわれの議論にはまったく固体の性質(周期性など)は取り込まれていないにもかかわらず、ゲージ不変性とエッジの存在のみから首尾一貫した結論が得られた点は示唆的に思える。また、ニールセン・二宮の定理[43]との関係も興味深く思える。一方、バレー・スピンに関する総和則からも偶数性を簡単に理解出来ることが最近指摘されている[44]。

付録A.7　3次元トポロジカル絶縁体

本文で述べた通り、3次元トポロジカル絶縁体はその表面に奇数個の2次元ギャップレス・ディラック粒子が存在する系である。これまで導いて来たように2次元系のバルクに

は偶数個のディラック粒子しか存在出来ない。それゆえ奇数個存在することは、一見奇異に感じられる。しかし、先ほどのディラック粒子の偶数性の証明には境界の存在が本質的で、3次元系の表面として現れる2次元面には境界がないため奇数個のディラック粒子が存在しても問題ないわけである。

付録 A.7.1　表面の半整数量子ホール伝導度

ギャップレス粒子は、質量ゼロ極限 $(m \to 0)$ をとったものと看做せる。パリティ量子異常の効果により、質量ゼロ極限でもディラック粒子一つあたり電気伝導度単位の $(1/2)\mathrm{sgn}(m)$ 倍に量子化されたホール伝導度が現われる (式 (付録 A.59) を見よ)。よって、粒子数が奇数個であれば各粒子の質量の符号がどう分布していようとも、必ず合計の伝導度は半整数に量子化された非零値が残る。それに対し、偶数であると完全な相殺が起きて合計の伝導度は零になってしまう。

付録 A.7.2　バルク・エッジ対応

量子ホール効果が起こるという事は、チャーン・サイモン項が存在する事と等価である。表面にチャーン・サイモン項が存在すると、バルクにはトポロジカルな θ 項 (5.2) が存在する [4]。(θ 項は全微分のかたちにまとめられ、その表面項としてチャーン・サイモン項が得られることが簡単に示せる。) すなわち、バルクにトポロジカル項が存在する事と、エッジにギャップレス状態が存在する事が一対一に対応している。θ 項の θ の値は時間反転対称性から $\theta = 0, \pi$ の二通りしか許されず、3次元の Z_2 数による分類と対応している [27]。

参考文献

[1] 井村健一郎: 「Z_2 トポロジカル絶縁体の3階建て理論」物性研究 **94** (2010) 677.

[2] X. G. Wen: Int. J. Mod. Phys. **6** (1992) 1711.

[3] Y. Hatsugai: Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 3697; Phys. Rev. B**48** (1993) 11851.

[4] X.-L. Qi, T.L. Hughes, and S.-C. Zhang: Phys. Rev. B **78** (2008) 195424; Science **323** (2009) 1184.

[5] J. Goryo and M. Kohmoto: Mod. Phys. Lett. B **22** (2008) 203.

[6] 御領潤: 「ホール伝導度と位相不変量」物性研究 **88** (2007) 413.

[7] 最新のレビューとして、以下のものが挙げられる: M. Z. Hasan, and C. L. Kane: arXiv:1002.3895; X.-L. Qi and S. C. Zhang: Physics Today **63** (2010) No.1, feature article, p.33 (翻訳記事: 丸善「パリティ」2010年11月号 p.4 (御領潤 訳)); arXiv:1008.2026.

[8] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton: Ann. Phys. **140** (1982), 372; Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 975.

[9] A. J. Niemi and G. W. Semenoff: Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 2077.

[10] A. Redlich: Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 18.

[11] K. Ishikawa: Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 1615.

[12] G. W. Semenoff: Phys. Rev. Lett. **53**, (1984) 2449.

[13] F. D. M. Haldane: Phys. Rev. Lett. **61**, (1988) 2015.

[14] C. L. Kane and E. J. Mele: Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 146802.

[15] C. L. Kane and E. J. Mele: Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 226801.

[16] Q. Niu, D. J. Thouless, and Y.-S. Wu: Phys. Rev. B **31** (1985) 3372.

[17] D. J. Thouless, M. Kohmoto, P. Nightingale, and M. den Nijs: Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 405.

[18] M. Kohmoto: Ann. Phys. (N. Y.) **160** (1985) 355.

[19] D. N. Sheng, Z. Y. Weng, L. Sheng, and F. D. M. Haldane: Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 036808.

[20] H. B. Nielsen and M. Ninomiya: Phys. Lett. B **130** (1983) 389.

[21] 静谷謙一: 物理学最前線 29 「量子異常」(共立出版 1992).

[22] 藤川和男: 新物理学選書「経路積分と対称性の量子的破れ」(岩波書店 2001).

[23] 石川健三: 物理学基礎シリーズ「場の量子力学」 (培風館 2006).

[24] D. J. Thouless: Phys. Rev. B **27** (1983) 6083.

[25] N. Hatano, R. Shirasaki, and H. Nakamura: Phys. Rev. A. **75** (2007) 032107.

[26] T. Fukui and Y. Hatsugai: Phys. Rev. B **75** (2007) 121403.

[27] L. Fu and C. L. Kane: Phys. Rev. B **76** (2007) 045302.

[28] S. Coleman: *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures* (Cambridge University Press 1985)

[29] R. Peccei and H. Quinn: Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 1440.

[30] D. A. Pesin and L. Balents: Nat. Phys. **6** (2010) 376.

[31] S. Rachel and K. Le Hur: Phys. Rev. B **82** (2010) 075106.

[32] J. Goryo and N. Maeda: J. Phys. Soc. Jpn. **79** (2010) 095001.

[33] J. Goryo and N. Maeda: arXiv:1007.4671 (Accepted for publication in J. Phys. Soc. Jpn.)

[34] A. K. Geim and K. S Novoselov: Nature Mater. **6** (2007) 183.

[35] N. Tajima, M. Tamura, Y. Nishio, K. Kajuta, and Y. Iye: J. Phys. Soc. Jpn. **69** (2000) 543.

[36] S. Katayama, A. Kobayashi, and Y. Suzumura: J. Phys. Soc. Jpn. **75** (2006) 054705.

[37] 九後太一郎: 新物理学シリーズ「ゲージ場の量子論 I」 (培風館 1989).

[38] S. Coleman and B. Hill: Phys. Lett. B **159** (1985) 184.

[39] M. Oshikawa: Phys. Rev. B **50** (1994) 17357.

[40] K. Ishikawa: Phys. Rev. D **31** (1985) 1432.

[41] K. Shizuya: Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 2907.

[42] N. Maeda: Phys. Lett. B **376** (1996) 142.

[43] H. B. Nielsen and M. Ninomiya: Nucl. Phys. B **185** (1981) 20; *ibid* **193** (1981) 173. また、文献 [20] も参照.

[44] J. Goryo: *Valley Spin Sum Rule for Dirac Fermions: Topological Argument*: arXiv:1010.0071.