数理解析研究所講究録
566巻 1985年 25-28

P_k-因子について

東理大・理　江川　嘉美（Yoshimi Egawa）

ここでは，有限無向単純グラフのみを考える。

グラフ G の連結成分の個数を $c(G)$ で表す。位数2以上の連結グラフ G に対し，G の極大nonseparable部分グラフを，G のブロックと呼ぶ。ここで，位数2以上の連結グラフ B がnonseparableであるとは，すべての $x \in V(G)$ に対して $B-x$ が連結であることを言う。（ブロックに関する詳細は，たとえば，B. Bollobás [1. §I.1] などを参照されたい。）P_k は長さ $k-1$ のpath，つまり k 点上のpathを表す。

H を連結グラフとする時，グラフ G の部分グラフ F が G の H-因子であるとは，$V(G)=V(F)$ で，F のすべての連結成分が H に同型であることを言う。我々は[2]で次の定理を証明した。（$H=P_2$ の場合は，それ以前にD. P. Sumner [3]により証明されている。）

定理1. n, k, p を $n > p$ であるような2以上の整数とし，H を位数 k の連結グラフとする。G を位数 nk の連結グラフとし，$V(G)$ の大きさ pk の任意の連結部分集合 X に対して $\langle X \rangle$ は H-因子を持つと仮定する。すると，G は H-因子を持つ。

この定理は，$p=1$ とすると一般には成立しないが、次のことは言える。

定理2. $n \geq 2$ を整数とし，$H = P_k$, $k \geq 6$ とする。G を位数 nk の連結グラフとし，$V(G)$ の大きさ k の任意の連結部分集合 X に対して $\langle X \rangle$ は H-因子を持つ，つまり，$\langle X \rangle$ は H と同型な全域部分グラフを含む，と仮定する。すると，G は H-因子を持つ。

この定理の証明は，次の2つの補題により，かなり容易になされることが判明したので，詳述することは控える。

補題. G を nonseparable なグラフとし，$a, b \in V(G)$, $a \neq b$ とする。すると，任意の $1 \leq k \leq |G|-1$ に対し，a を含み b を含まない $V(G)$ の大きさ k の部分集合 X で，$\langle X \rangle$, $G - X$ がともに連結であるものが存在する。

補題. Gは位数6以上の連結グラフで，Gのブロックグラフはpathでないとする．すると，任意の$6 \le k \le |G|$に対し，$V(G)$の大きさkの部分集合Xで，$\langle X \rangle$のブロックグラフがpathでないものが存在する．

さて，$H = P_k$, $2 \le k \le 5$に対しては，定理2の仮定を満たすGで，結論が成り立たないようなものを，簡単に構成できる．定理2が一般のHに対しては必ずしも成立しないことを示す他の例としては，

$$H = K_{1,k-1}, \quad G = K_{1,2k-1}; \qquad k \ge 2$$

などが挙げられる．大ざっぱに言って，$c(H-X)$が“大きい”ような$X \in V(G)$が存在するようなHに対しては，定理2は成り立たない．次の例は，$c(H-X)$が“小さく”かつ定理2が成立しないようなHが無限に存在することを示すものである．

例. $l \ge 1$とし，$4l+2$個の頂点$a_1, \cdots, a_{2l+1}, b_1, \cdots, b_{2l+1}$上のグラフ$G_l$を，

$$E(G_l) = \{b_i b_j \mid i \neq j,\ 1 \le i, j \le 2l+1\} \cup \{a_i b_i \mid 1 \le i \le 2l+1\}$$

により定め，$2l+1$個の頂点$c_1, \cdots, c_l, d_1, \cdots, d_l, d_{l+1}$上のグラフ$F_l$を，

$$E(F_l) = \{d_i d_j \mid i \neq j,\ 1 \le i, j \le l+1\} \cup \{c_i d_i \mid 1 \le i \le l\}$$

により定める。今，HをH_kの任意の連結全域部分グラフとし，$G=G_k$とすると，定理2の仮定は（"$H=P_k$, $k\geq 6$"という部分を除いて）満たされているが，結論は成立していないことがわかる。

注意。　定理2において，条件"$H=P_k$, $k\geq 6$"を弱くして，"Hは位数$k\geq 6$の連結グラフで，すべての$x\in V(H)$に対して$c(H-x)\leq 2$"とした時，定理が成り立たなくなるようなHは，上記の"例"に現われるグラフで尽きていると思われるが，現時点では未解決である。なお，そこまでは弱くせず，"Hは位数$k\geq 6$の連結グラフで，Hのブロックグラフがpath"とするのであれば，定理は成立する。そのことは，やはり，上の2つの補題を使って確かめられる。

1. B. Ballobás, "Extremal Graph Theory," Academic Press, London, 1978.

2. Y. Egawa, H. Enomoto and A. Saito, On component factors, Graphs and Combinatorics, to appear.

3. D. P. Sumner, Graphs with 1-factors, Proc. Amer. Math. Soc. 42(1974), 8-12.