

L^2 -cohomology on pseudomanifolds

東工大 理 長瀬正義

Kähler package として一括される諸定理, 例えば, Poincaré duality, Lefschetz hyperplane theorem 等々を, singular space の cohomology にまで一般化しようという研究は, 種々なされている。ただし, その方向づけは, cohomology それ自身は通常のものを使い定理を適当に修正するというものであった。ところが, 最近, cohomology を適当に修正し, 定理そのものは弱めることなく証明しようという試みがなされ, いくつかの成果があがりつつある。その試みでは, cohomology は, intersection homology なるものに取り替わられることになる。

そこで, 本稿では, intersection homology なるものの説明, 並びに, intersection homology と L^2 -cohomology との間に存在する de Rham の定理に似た関係について解説する。未だ, conjecture の状態にある pure Hodge 分解, Hard Lefschetz の一般化には, こうした関係を活用するのが有効であろうと(筆

者に思われる。

注意 Poincaré duality, Lefschetz hyperplane theorem は、既に証明されている。

§1 定義

n 次元 pseudomanifold X の PL 構造と共調している三角形分割 T より定まる実係数鎖複体を $C_*^T(X)$ とおき、そうした T に用いる $C_*^T(X)$ 達の帰納的極限を $C_*(X)$ と書く。また、 X の stratification $X = X_n \supset X_{n-1} \supset X_{n-2} \supset X_{n-3} \supset \cdots \supset X_0$ を一つ定め、固定する。さらに、整数列 $\bar{p} = (p_2, p_3, \dots, p_n)$ perversity と呼ばれる, $\in \mathbb{Z}^n$ し、 $p_2 = 0$, $p_k \leq p_{k+1} \leq p_k + 1$, を用意する。この時、 $C_*(X)$ の部分複体

$$IC_i^{\bar{p}}(X) = \left\{ \begin{array}{l} \xi \in C_i(X) \mid \text{任意の } k \text{ に対して} \\ \dim(\xi \cap X_{n-k}) \leq i - k + p_k \\ \dim(\partial \xi \cap X_{n-k}) \leq i - 1 - k + p_k \end{array} \right\}$$

の i 次元 homology 群を $IH_i^{\bar{p}}(X)$ と書き、 i 次元 intersection homology 群と呼ぶ。 $IH_*^{\bar{p}}(X)$ は、stratification の取り方によらないため、 $X_{n-2} = \emptyset$ なる stratification が存在するならば、通常の homology 群に一致してしまうことに注意しておく。

一方、open Riemannian manifold X 上の外微分 d の定義域を、 $\text{dom } d_i = \{\alpha \in \Lambda^i(X) \cap L^2\Lambda^i(X) \mid d\alpha \in L^2\Lambda^{i+1}(X)\}$, $\in \mathbb{Z}^n$ し、 $\Lambda^i(X)$ は、滑らかな i -forms 全体を、 $L^2\Lambda^i(X)$ は、二乗可積分

は i -forms 全体を意味する, と定め, その (グラフ・ノルムに
 関する) 閉包を $\bar{d}$ とおく。そして, 双対鎖複体 $\{dom d_i\}_i$,
 $\{dom \bar{d}_i\}_i$ の i 次元 cohomology 群を, L^2 -cohomology 群と呼
 ぶ。両者は, 自然に一致するのを, 区別することなく $H^i_{L^2}(X)$
 なる記号で表現する。

§2 Intersection homology と L^2 -cohomology の関係

X を compact な境界のない n 次元 stratified space とする。
 stratification $\mathcal{S} = (X = X_n \supset X_{n-1} \supset X_{n-2} \supset \cdots \supset X_0)$ と, その近傍系
 $\mathcal{J} = \{(T_j, \pi_j, \lambda_j, S_j, \pi'_j, h_j)\}_j$ は固定されている。 $\{(T_j, \pi_j, \lambda_j)\}_j$
 は, 普通言うところの $\{X_j = X_j - X_{j-1}\}$ の用近傍系である。
 $S_j = \lambda_j^{-1}(1)$, $\pi'_j = \pi_j|_{S_j}$, 同相写像 $h_j: T_j \rightarrow M(S_j)$, $E \in L$
 $M(S_j) = (S_j \times [0, \infty)) \cup X_j / (x, 0) \sim \pi'_j(x)$ を, その定義の中に入
 れたのは, 後に $X_{(n)}$ の計量を特定するためである。尚, 我々
 の考察対象は, $X_{(n)}$ が X で dense な場合である。

[3] に従い, 直線族

$$\{r_j(\varepsilon): T_j - X_j \xrightarrow{h_j} M(S_j) - X_j \xrightarrow{\text{射影}} S_j \xrightarrow{h_j^{-1}} \pi_j^{-1}(\varepsilon)\}$$

を使, X を三角形分割し, これにより pseudomanifold として
 の構造を固定する。pseudomanifold としての X の stratification
 は, 部分多面体である X_j 達で与える。

一方, perversity $\bar{p}$ に従属する $X_{(n)}$ の計量を以下のように定義

する。一般に, manifold Y 上の二つの計量 g, g' が p.s.r.-同値である ($g \sim_{\text{p.s.r.}} g'$) とは, Y の恒等写像が, 計量 g をもつ Y と, 計量 g' をもつ Y との間の p.s.r.-同値写像であることを意味する ([1] p. 97)。また fibre 束 $\pi_g: T_g \rightarrow X_g$ の $x \in X_g$ での自明写像 $k: \bigcup_x \pi_g^{-1}(x) \rightarrow \pi_g^{-1}(U)$ は, π_{k*}, k^* 達と共調的であるとする。

定義 $X_{(n)}$ 上の計量 g が非負実数列 $c = (c_2, c_3, \dots, c_n)$ に従属しているとは, 各 j と, 任意点 $x \in X_j$ の近傍 U 上での任意の (上の意味の) 自明写像 k に対して, U 上の計量 g_U で,

$$g|_{\pi_g^{-1}(U) \cap \lambda_g^{-1}([0, \varepsilon)) \cap X_{(n)}}$$

$$\sim_{\text{p.s.r.}} k^* (g_U|_U + d\alpha d\alpha + \lambda_g(1)^{2c_n} g|_{\pi_g^{-1}(U) \cap \lambda_g^{-1}(\varepsilon) \cap X_n}),$$

であるし, $\varepsilon > 0$ は十分小さく, V は x の近傍で $V \subset \nabla \subset U$ となっているものとする, ε を満たすものが存在することを意味する。

定義 $\bar{p} \leq (0, 0, 1, 1, 2, 2, \dots)$ なる pervasivity $\bar{p}$ に従属する $X_{(n)}$ の計量とは, 以下を満たす非負実数列 $c = (c_2, \dots, c_n)$ に従属する計量のこととする。

$$\begin{cases} 2p_k \leq k-3 \text{ なら } \frac{1}{k-1-2p_k} \leq c_k < \frac{1}{k-3-2p_k} \\ 2p_k = k-2 \text{ なら } 1 \leq c_k < \infty \end{cases}$$

補題 任意の非負実数列 c に従属する $X_{(n)}$ の計量は, p.s.r.-同値なものを除いて一意に存在する。

そこで、以下では、porosity $P \leq (0, 0, 1, 1, \dots)$ を固定し、 ε 此に従属する計量 $\varepsilon X(n)$ に λ れておくこととする。

以下の我々の目標は、de Rham の定理の一般化であるが、strata どうしが複雑にからみあひ影響を及ぼしあつてゐるが、表現は、どうしても複雑な形となる。それを出来るだけ回避する為、必要な道具立てを天下りの的に列挙してしまふ。
 $\varepsilon > 0$ は十分小さく取つてあるとする。

$$W(\varepsilon) = X - \bigcup_{i \leq n-2} \lambda_{(i)}^{-1}(\varepsilon)$$

$$T_j(\varepsilon) = \lambda_{(j)}^{-1}([0, \varepsilon]) \cap (X - \bigcup_{i \neq j-1} \lambda_{(i)}^{-1}([0, \varepsilon])) \cap X(n)$$

$$S_j(\varepsilon) = \lambda_{(j)}^{-1}(\varepsilon) \cap (X - \bigcup_{i \neq j-1} \lambda_{(i)}^{-1}([0, \varepsilon])) \cap X(n)$$

と置く。各列 $(x_0, x_1, \dots, x_{n-2})$, $x_j = -1, 0$ または 1 , に対して、以下の二条件により帰納的に定まる compact manifolds の組を、
 $\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-2} \rangle$ と置く。

$$(i) \langle 0, \dots, 0 \rangle = (W(\varepsilon), \emptyset)$$

$$(ii) \langle x_0, \dots, x_{j-1}, 0, \dots, 0 \rangle = (A, B) \text{ なら}$$

$$\begin{cases} \langle x_0, \dots, x_{j-1}, -1, 0, \dots, 0 \rangle = (A, (A \cap \lambda_{(j)}^{-1}(\varepsilon)) \cup B) \\ \langle x_0, \dots, x_{j-1}, 1, 0, \dots, 0 \rangle = (A \cap \lambda_{(j)}^{-1}(\varepsilon), B \cap \lambda_{(j)}^{-1}(\varepsilon)) \end{cases}$$

である。

de Rham の cohomology 群よりなる以下の長完全列が存在する
 ことは自明である。

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\delta_j^*} H^{i-1}(\langle x_0, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_{n-2} \rangle) \xrightarrow{\delta_j^*} H^i(\langle x_0, \dots, x_{j-1}, -1, x_{j+1}, \dots, x_{n-2} \rangle) \\ & \xrightarrow{\delta_j^*} H^i(\langle x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_{n-2} \rangle) \xrightarrow{\delta_j^*} H^i(\langle x_0, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_{n-2} \rangle) \xrightarrow{\delta_j^*} \dots \end{aligned}$$

$\overline{p} = (p_2, p_3, \dots, p_n)$ は, “適当な狭義単調整数列 $1 = k_1 < k_2 < \dots < k_m = n$ を取ると, $k_{l-1} < k \leq k_l$ なる k に対して $p_k = e$ である” と仮定し, 以下のような de Rham cohomology 群を考える。

定義

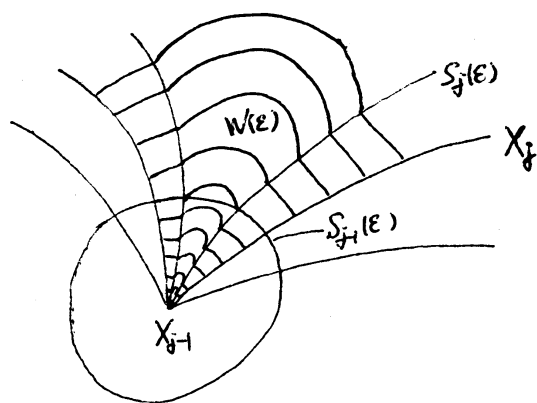
$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{\overline{p}}^i(X) \\ = & \begin{cases} H^0(\langle 0, \dots, 0 \rangle) & ; i = 0 \quad \dots \dots (1) \\ \tilde{c}_{n-i}^*(H^i(\langle 0, 0, \dots, \overset{n-i-1}{-1}, \dots, -1 \rangle)) & ; 1 \leq i < k_0 - 1 \quad \dots \dots (2) \\ \bigoplus_{\substack{(j_l, \dots, j_0) \\ \text{at } j_l = n-i-l-1 \\ j_l < j_{l-1} \leq n-k_l-1 \\ \vdots \\ j_1 < j_0 \leq n-k_0}} \left(\prod_{0 \leq t \leq l} \tilde{c}_t^* \right) \left(\prod_{\substack{j_l \leq u \leq j_0 \\ u \neq j_t \\ (l \leq t \leq l)}} \delta_u^* \right) (H^{n-j_0-1}(\langle 0, 0, \dots, \overset{j_l}{-1}, \dots, \overset{j_{l-1}}{-1}, \dots, \overset{j_t}{-1}, \dots, \overset{j_0}{-1}, \dots, -1 \rangle)) & ; k_{l-1} - l \leq i < k_l - (l+1) \\ & (l = 1, \dots, m-1) \quad \dots \dots (3) \\ & \text{又 } k_{m-1} - m \leq i < n - m \quad (l = m) \quad (4) \\ \bigoplus_{\substack{(j_l, \dots, j_0) \\ \text{at } -1 \leq j_l - i \leq n-k_l-1 \\ j_1 < j_0 \leq n-k_0}} \left(\prod_{0 \leq t \leq l-1} \tilde{c}_t^* \right) \left(\prod_{\substack{0 \leq u \leq j_0 \\ u \neq j_t \\ (0 \leq t \leq l-1)}} \delta_u^* \right) (H^{n-j_0-1}(\langle 1, \dots, \overset{j_{l-1}}{-1}, \dots, \overset{j_l}{-1}, \dots, \overset{j_t}{-1}, \dots, \overset{j_0}{-1}, \dots, -1 \rangle)) & ; i = n - l \quad (l = 1, \dots, m) \quad \dots \dots (5) \\ H^n(\langle -1, \dots, -1 \rangle) & ; i = n \quad \dots \dots (6) \end{cases} \end{aligned}$$

ただし, $m=0$ の場合, (2), (3), (5) は, あらわれていない。

注意 以下のような包含関係があるとみなしてよい。

$$\begin{cases} (2) \text{ の場合の } \mathcal{H}_{\overline{p}}^i(X) \subset H^i(\langle 0, 0, \dots, \overset{n-i-1}{-1}, \dots, -1 \rangle) \\ (3), (4) \text{ の場合の } \mathcal{H}_{\overline{p}}^i(X) \subset H^i(\langle 0, 0, \dots, \overset{n-i-l-1}{-1}, \dots, -1 \rangle) \\ (5) \text{ の場合の } \mathcal{H}_{\overline{p}}^i(X) \subset H^i(\langle -1, \dots, -1 \rangle) \end{cases}$$

定義 $W(\varepsilon)$ 上の form ϕ に対して $X_{(n)}$ 上の form $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_0 \in \Lambda^k X$ 下のように帰納的に定義する: $W(\varepsilon) \cup T_{n-2}(\varepsilon)$ 上の form $\tilde{\phi}_{n-2} \in$, $W(\varepsilon)$ 上 $\tilde{\phi}_{n-2} = \phi$, $T_{n-2}(\varepsilon)$ 上 $\tilde{\phi}_{n-2} = (\phi|_{S_{n-2}(\varepsilon)})$ の自然な拡張) によって定義する。帰納的に, $W(\varepsilon) \cup T_{n-2}(\varepsilon) \cup \dots \cup T_j(\varepsilon)$ 上の form $\tilde{\phi}_j$ に対して, $W(\varepsilon) \cup T_{n-2}(\varepsilon) \cup \dots \cup T_{j+1}(\varepsilon)$ 上の form $\tilde{\phi}_{j+1} \in$, $W(\varepsilon) \cup T_{n-2}(\varepsilon) \cup \dots \cup T_j(\varepsilon)$ 上, $\tilde{\phi}_{j+1} = \tilde{\phi}_j$, $T_{j+1}(\varepsilon)$ 上, $\tilde{\phi}_{j+1} = (\tilde{\phi}_j|_{S_{j+1}(\varepsilon)})$ の自然な拡張) によって定義する。



図式的に書くと左図のようになる。尚 $\tilde{\phi}_j|_{S_{j+1}(\varepsilon)}$ 達は, $S_{j+1}(\varepsilon)$ における tangent 成分であるから $\tilde{\phi}_j$ 達は, $S_{j+1}(\varepsilon)$ のところで, tangent 成分のみ連続であり,

normal 成分は一般に不連続となっている。

補題 写像 $\phi \mapsto \tilde{\phi}$ は, 上記注意の右辺から $H_{\text{cl}}^k(X_{(n)})$ への写像を導く。

さて, 最終的な結論を述べることになるが, 実は, 我々は X に, 以下のような条件を課する。

条件 $j \leq n-2$ のとき, $V_{(j)}$ は, (空集合でない場合) $(0,1)^j$ の有限個の直和に微分同型である。

この条件が満たされていない場合, intersection homology と

L^2 -cohomology との仲立ちとなる $N_p^*(X)$ を、前述のように明記することは困難となる。筆者には、 $N_p^*(X)$ を明確に書き下しておくことが重要であると思われるのでこの条件を記したわけである。また、intersection homology の stratification の取り方によらないことを思えば、与えられた stratification の X_{n-2} を適当に三角形分割し条件を満たすものにおきかえてしまえば、intersection homology の研究には充分なはずである。

さて、前述の補題より、我々は、写像 $E^*: N_p^{\bar{c}}(X) \rightarrow H_n^{\bar{c}}(X)$ を得たことになる。そして、この拡張写像は、実は同型写像である。

定理 $E^*: N_p^{\bar{c}}(X) \cong H_n^{\bar{c}}(X_{in})$

また、 $\Lambda^i(W(E)) \otimes IC_c^{\bar{c}}(X)$ の $(\phi, \bar{\phi})$ に対して $P(\phi, \bar{\phi}) = \int_{X_{n-2}} \bar{\phi}$ とおくと、この二次形式は、 $N_p^{\bar{c}}(X) \otimes IH_c^{\bar{c}}(X)$ 上の二次形式 P^* を導く。そして

定理 $P^*: N_p^{\bar{c}}(X) \otimes IH_c^{\bar{c}}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ は、非退化である。

これから二つの定理の証明は、strata に関する帰納法による。

これから二つの定理より以下のような結論を得る。

定理 $(IH_c^{\bar{c}}(X))^* \cong H_n^{\bar{c}}(X_{in})$

参考文献

- [1] J. Cheeger : On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds ,
Proc. of Sym. in Pure Math. 36 (1980), 91-146.
- [2] J. Cheeger, M. Goresky and R. MacPherson : L^2 cohomology and
intersection homology of singular algebraic varieties, preprint.
- [3] M. Goresky : Triangulation of stratified objects, PNAS, USA,
78 (1978), 193-200.
- [4] M. Goresky and R. MacPherson : Intersection homology theory, Topology,
19 (1980), 135-162.
- [5] M. Goresky and R. MacPherson : Intersection homology II, preprint.
- [6] M. Nagase : De Rham Hodge theory on a manifold with cone-like
singularities, preprint.
- [7] M. Nagase : L^2 -cohomology of a manifold with singularities, preprint.
- [8] M. Nagase : L^2 -cohomology and intersection homology of stratified
spaces, preprint.

(尚, intersection homology に関する参考文献の詳しいリスト
は, AMS, 1981, Summer institute on singularities, Humboldt State
University, Arcata, California, にある。)