

Knots の Union の一般化.

北大 理学部 酒井 健

(Ken Sakai)

Unknotting number 1 の knot が, prime knot であるかどうかは, 古くからの問題であるが, 現在もなお, 未解決である (筆者の知る範囲で). この問題に対する一つの Project-4 として, 2つの knots K_1, K_2 に対し, knots の集合 $K_1 +_n K_2$ (n は non-negative integer) を定義し, この集合に関するある命題が, 上の問題と同値であることを示し, 又, この命題に関連した結果を与える. これらについての, 詳しい内容は, 現在投稿中の論文中にある.

1. $K_1 +_n K_2$ の定義.

K_1 と K_2 を 3-sphere 内の knots として, 2-sphere S^2 を decomposition sphere とする K_1 と K_2 の knot sum

K をつくる: $K = K_1 \#_{S^2} K_2$. $\Sigma = \mathbb{R}^2$, $\Gamma \in$ 下の条件を満たす arc とする:

$$(1) \Gamma \cap K = \partial \Sigma \cap K = \{a, b\} \subset K - S^2.$$

(2) Γ と S^2 とは, general position にあり,

$$\#(\Gamma \cap S^2) = n.$$

$\Sigma = \mathbb{R}^2$. a の十分近くの K の subarc を Γ に引きつけて押しつけていき, b の近くの K の subarc に引きかき, K から得られる knot を K_Γ とする. この時,

$$K_1 +_n K_2 = \{K_\Gamma \mid \Gamma \text{ は (1), (2) を満たす}\}.$$

(但し, 上の定義は若干のおかしさがあるか.)
(今の所, 便利にしなさい.)

この時, 次が成立する:

* 次の Z は, 同値:

(1) unknotting number 1 の knot は, prime である。

(2) $\forall K_1, \forall K_2, \forall n$; 但し, K_1, K_2 は, $\neq$ 12 non-trivial knot; に対し, $K_1 +_n K_2$ は trivial knot を含まない。 //

2. 結果.

上の (2) に帰して, 次のことがわかる:

5
定理 $\forall K_1, \forall K_2$; non-trivial knots に対し,

$n \leq 2$ ならば, $K_1 +_n K_2$ は trivial knot を含
まない。 //

$K_1 +_0 K_2$ については Schubert の結果の Coro. であり,

$K_1 +_1 K_2$ については 樹下-寺阪 の結果である。

筆者は, $K_1 +_2 K_2$ が trivial knot を含むならば,

$K_1 +_0 K_2$ 又は $K_1 +_1 K_2$ が trivial knot を含まなければ
ならないことを示し, $n=2$ の場合の結果を得た。

補注: $n \geq 3$ については不明であるが, とくに,

$n=3$ の時は, 次の成立することから最近わかった:

定理': $K_1 +_3 K_2$ が trivial knot を含み得るならば,

$b(K_1) \leq 2$ 又は $b(K_2) \leq 2$, 但し $b(K_i)$

は K_i の bridge number。 //

[1] S. Kinoshita-H. Terasaka: Osaka Math. J. 9(1957), 131-153.

[2] H. Schubert, Sitz. Akad. Wiss. Heiderberg, math.-nat. Kl. 3 Abh (1949).

[3] H. Terasaka: Osaka Math. J. 12(1960), 113-144.