

氏 名	稲 垣 譲
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2274 号
学位授与の日付	平成 13 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	Logarithmic Sobolev Inequality on Free Loop Groups for Heat Kernel Measures Associated with the General Sobolev Spaces (一般のソボレフ空間に対応した熱核測度にかんするループ群上の対数ソボレフ不等式)
論文調査委員	(主 査) 教 授 重 川 一 郎 教 授 井 川 満 教 授 西 田 孝 明

論 文 内 容 の 要 旨

申請者の主論文における研究は、Lie 群上のループの作る空間上での対数 Sobolev 不等式に関するものである。対数 Sobolev 不等式とは、あるグラディエント作用素（1 階の微分作用素） ∇ に対して、

$$\int_X |f|^2 \log(|f|/\|f\|_2) d\nu \leq C \int_X |\nabla f|^2 d\nu$$

と表現されるもので、 X は空間、 ν は X 上の確率測度、 f は Sobolev の意味で 1 階微分可能な任意の関数、 $\|f\|_2$ は f の L^2 -ノルムを表わす。この不等式は微分可能性が可積分性を改善することを意味し、解析において重要な働きをする。

申請者の研究はこの不等式が、 X として Lie 群 G 上のループ空間 $\mathcal{L}(G)$ 、 ν として $\mathcal{L}(G)$ 上の Brown 運動 (X_t) の固定した時刻 T での分布を取ったときにも成立することを示したものである。Brown 運動は共分散を決めなければ一意的に定まらないが、申請者が扱ったのは共分散に対応する空間（再生核 Hilbert 空間）が G 上の Sobolev 空間 H^s （但し $s > 1/2$ ）の場合である。 $s=1$ の場合に対数 Sobolev 不等式が成立することは T. R. Carson によって示されていたが、申請者はそれをより一般の場合に拡張した。また不等式に現れる定数 C に対し、 $\mathcal{L}(G)$ 上の Ricci 曲率などの幾何学的な量を用いて評価を与えた。

以下、証明の概略を述べる。申請者は共分散に対応する空間として Sobolev 空間 H^s を取っているため、対応する $\mathcal{L}(G)$ 上の Brown 運動から再構成する必要がある。そのために g を G の Lie 環として、線型空間 $\mathcal{L}(g)$ (g 上のループ空間) 上の Brown 運動を構成する。この Brown 運動の共分散を H^s で与える。ここで連続なループの上で Brown 運動を実現するために $s > 1/2$ の制約が必要になる。 $\mathcal{L}(g)$ 上の Brown 運動を基に確率微分方程式を解くことにより $\mathcal{L}(G)$ 上の Brown 運動が定まる。これは独立増分性を持った拡散過程である。出発点を単位元にとった Brown 運動を (X_t) と表わせば、定数 T を固定して X_T により $\mathcal{L}(G)$ 上に測度 ν が定まる。この測度は熱核測度と呼ばれる。

上の方法で測度は構成できるが、緒量を計算するために、 $\mathcal{L}(G)$ 上での Riemann 幾何を展開する必要がある。申請者は Fourier 展開を用いて、実際に計算可能な形でこれを実行した。また空間が無限次元であるので、随所に現れる無限和の収束性が問題となる。Riemann 幾何は接空間に計量を与えることが必要であるが、それがまさに Sobolev 空間 H^s の内積で与えられる。計量が決まれば、それから Levi-Civita 接続が一意に定まる。すなわち共変微分が定義されるが、この表示を Fourier 係数を用いて評価できる形にしておく必要がある。接続が定まればそこから Riemann 曲率や Ricci 曲率などが自然な形で定義される。但し Ricci 曲率は絶対収束はしないので発散がおきないようにうまく基底を選ぶ必要がある。これらはすべて Fourier 展開を用いて与えることが出来る。また Laplace 作用素の具体的な表示も求めておく必要がある。この作用素は先に導入した Brown 運動の生成作用素となるものである。この作用素はループの有限個の時刻にだけ関係する円筒関数に対しては発散なく定義出来る。

対数 Sobolev 不等式に対しては Bakry-Emery による Γ_2 を用いた証明がよく知られている。有限次元の多様体の場合は

Ricci 曲率の下限を用いて不等式の定数の評価を与えることが出来るが、申請者の場合は無限次元なので直接的にはこの方法を用いることが出来ない。そのために時間分点を細分していくことにより、有限次元近似する方法で結論を得ている。

申請者はまた参考論文において、境界を持つ多様体の場合にも対数 Sobolev 不等式を示している。申請者は境界からの影響を第 2 基本形式で表現し、その評価を与えることで不等式を証明した。またそれを応用して、スピンの空間が境界を持つ多様体となる格子スピン系に対しても対数 Sobolev 不等式が成立することを示しており、無限次元の場合を中心に対数 Sobolev 不等式の研究を進めている。

論文審査の結果の要旨

対数 Sobolev 不等式は無限次元空間で解析を進めていく上での基本的な手段である。特に Dirichlet 形式や生成作用素のスペクトルを解明する上で重要である。有限次元の場合には超関数理論や基本解の構成など様々な技術が開発されているが、無限次元では有限次元で有効であった方法はそのままの形ではほとんど使うことが出来ない。そうした中で場の量子論の基本的なスカラー場のモデルの自由場の場合に半群の超縮小性が Nelson により、さらに対応する Dirichlet 形式に対する対数 Sobolev 不等式が Gross によって 1970 年代に証明された。以後、対数 Sobolev 不等式は無限次元空間において基本的な手段として定着してきた。Gross の先駆的な仕事以後、この不等式は様々な空間においてその成立が確かめられてきたが、1990 年代になって無限次元空間における Dirichlet 形式論が整備され、多様体の上の道の空間やループの空間が、その具体例として興味を持たれてきた。Malliavin 解析など無限次元における微積分の枠組が整備されていく中で、対数 Sobolev 不等式が主要な問題としてクローズアップされてきた。

申請者の研究はそうした流れの中にあって Lie 群上のループの空間上で対数 Sobolev 不等式を示したもので、時代の要請に応えたものである。ループ空間において異なる Dirichlet 形式に対してはまた違った困難点が現れる。最初にループ空間の場合に対数 Sobolev 不等式を証明したのは B. Driver と T. Lohrenz である。彼らは固定端の場合を扱ったが、その後自由端の場合を T. R. Carson が示した。Dirichlet 形式はグラディエントで定義されるが、ノルムの取り方に依存する。申請者はそのノルムが Sobolev 空間 H^s ($s > 1/2$) のノルムで与えられる場合を一般的に論じたもので、従来扱われていた $s = 1$ の場合を拡張したものである。 $s = 1/2$ の場合は計量に対称性が存在する重要な場合である。申請者の研究は $s > 1/2$ の場合のみであるが、 $s = 1/2$ の場合を考察する上での手がかりを与えるものと期待されている。Driver などの周辺で問題意識が持たれていたが、申請者の研究はこれに応えたものとなっている。

申請者の研究は、以前の結果を踏まえたもので、従来の技法を取り入れる一方で、申請者自身の工夫も随所に見られる。特に計量を定める空間を一般の Sobolev 空間にしたため計算が著しく複雑になってくる。申請者はトーラス S^1 上の Fourier 展開を用いて各種の計算を巧妙に行っている。特に、ループ空間 $\mathcal{L}(G)$ に共変微分を定義する場合は無限和の収束性が問題になるが、うまい基底を用いて具体的に計算出来る形に纏め上げた点は評価される。

そのほか、Brown 運動の構成、ループ空間の上の確率微分方程式の解の構成など、計量を一般化したためにその都度困難が生じるが、Fourier 展開による手法を縦横に駆使し、これらの問題を解決したものである。こうした点は、申請者の優れた研究能力を示すもので高く評価できる。

この様に主論文はループ空間の上の対数 Sobolev 不等式を論じたもので、従来の結果を一般化するとともに $s = 1/2$ の場合への解決に向け一歩を進めたものである。よって本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。参考論文においても境界を持つ多様体をスピン空間として持つ格子スピン系について対数 Sobolev 不等式を示している。申請者は無限次元空間におけるこの分野で大きな貢献をしており、多くの研究者によって注目されている。

なお、主論文及び参考論文に報告されている研究業績を中心とし、それに関連した研究分野について試問した結果、合格と認めた。