

Periodic homeomorphisms on surfaces and singular points of curves

佐賀大学・理工学部・数理科学科 廣瀬 進 (Susumu Hirose)
Department of Mathematics, Faculty of Science and Engineering
Saga University

1. INTRODUCTION

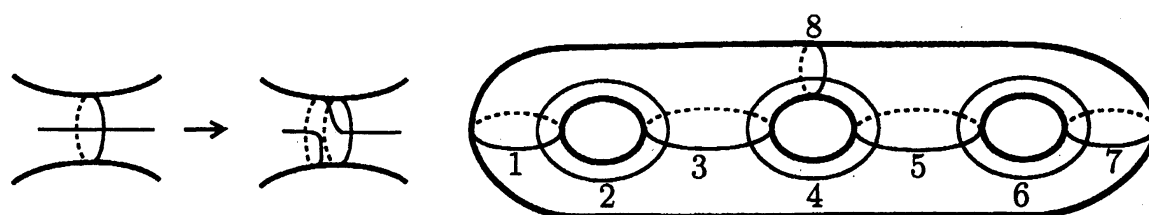


FIGURE 1

Dehn [7] showed that mapping class groups of closed orientable surfaces are generated by Dehn twists illustrated in the left hand of Figure 1 (precisely saying, a twist illustrated is called a *right handed Dehn twist*), Lickorish [15] reduced the number of generators and Humphries [13] showed that Dehn twists about the circles shown in the right hand side of Figure 1 generate the mapping class group $\mathcal{M}_3$ of Σ_3 , a closed oriented surface of genus 3. By the symbol k , we also mean the right handed Dehn twist about the curve indicated by k . Let ϕ be an element of $\mathcal{M}_3$ defined by: $\phi = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8$, where $i \cdot j$ means apply i first then apply j . By using “Teruaki for Mathematica” (T4M), implemented by K. Ahara (Meiji Univ.) and T. Sakasai (Univ. of Tokyo), we can check the action of ϕ on the simple closed curves shown in Figure 1 and see that ϕ^{12} brings these simple closed curves back to their original position (of course, up to isotopy). This means that ϕ^{12} commutes with the Dehn twists about these simple closed curves, so, by the above mentioned result of Humphries, ϕ^{12} commutes with any elements of $\mathcal{M}_3$. Powell [18] showed that, if $g \geq 3$, $\mathcal{M}_g$ is centerless, i.e. the element of $\mathcal{M}_g$ which commutes with any elements of $\mathcal{M}_g$ should be id_{Σ_g} . Therefore, $\phi^{12} = id_{\Sigma_3}$. In this note, we will introduce a method to find a word of Dehn twists, which represent periodic map.

For the detail of fact shown in this note, please see a preprint [12], which is available from <http://www.ms.saga-u.ac.jp/~hirose/work.html>. From the next section, we write this note in Japanese. If you cannot read Japanese, please learn Japanese or check this preprint.

This research was partially supported by Grant-in-Aid for Encouragement of Young Scientists (No. 16740038), Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Japan.

2. NIELSEN による周期的写像の分類

以下, Σ_g で向き付けられた種数 g の閉曲面を表す. また, 特に断らない限り Σ_g 上の同相写像は常に向きを保つものとする. 曲面 Σ_g 上の写像 f が周期的 (periodic) であるとは, 1 以上の整数 n で $f^n = id_{\Sigma_g}$ なるものが存在することであり, そのような n の内, 最小の数を f の周期 (period) とよぶ.

いま, n を Σ_g 上の周期的写像 f の周期であるとする. Σ_g 上のほとんど全ての点については, f を n 回の作用させることではじめて元の位置に戻ってくるが, 中には途中で元の位置に戻ってくるような点がある. つまり, 曲面 Σ_g 上のある点 p に対して, $0 < k < n$ なる整数 k で $f^k(p) = p$ となるものが存在してしまうのだが, この p のことを f の multiple point とよぶ. また, M_f で f の multiple point 全体の集合を表す.

曲面 Σ_g の点の内, f でうつりあうものを同一視してできる空間を Σ_g/f であらわし, f の軌道空間 (orbit space) という. このとき, Σ_g の点 p に対して, Σ_g/f の点で p の代表するもの $[p]$ を対応づける写像 π_f を考えると, これは n 重分岐被覆となっている. すなわち, Σ_g/f のほとんど全ての点の上で π_f は通常 n 重被覆であるが, $[f \text{ の multiple point}] \in \Sigma_g/f$ において分岐している. そこで, $[f \text{ の multiple point}]$ を f の branch point と呼び, $B_f (= \pi_f(M_f))$ で f の branch point 全体の集合をあらわす. このとき, $\pi_f|_{\Sigma_g \setminus M_f} : \Sigma_g \setminus M_f \rightarrow (\Sigma_g/f) \setminus B_f$ は通常 n 重被覆となっている.

この n 重被覆を記述する準同型 $\Omega_f : \pi_1((\Sigma_g/f) \setminus B_f, x) \rightarrow \mathbb{Z}_n$ (ただし, x は $(\Sigma_g/f) \setminus B_f$ の点) を次の通り定める. まず, $\pi_f(\tilde{x}) = x$ なる Σ_g の点 $\tilde{x}$ を一つ決める. 基本群 $\pi_1((\Sigma_g/f) \setminus B_f, x)$ の元は x を基点とする $(\Sigma_g/f) \setminus B_f$ 内の loop

$l: [0, 1] \rightarrow (\Sigma_g/f) \setminus B_f$ で $l(0) = l(1) = x$ となるものによって記述される. この loop l の Σ_g 上への lift $\tilde{l}: [0, 1] \rightarrow \Sigma_g$ で $\tilde{l}(0) = \tilde{x}$ なるものを考えると, $\pi_f(\tilde{l}(1)) = l(1) = x$, つまり $\tilde{l}(1)$ は $\tilde{l}(0) = \tilde{x}$ の f による軌道上にあるので, 整数 k で $f^k(\tilde{x}) = \tilde{l}(1)$ なるものがある. そこで, $\Omega_f([l]) = k \in \mathbb{Z}_n$ と定める. このとき, $\mathbb{Z}_n$ が可換群であるため $\pi_1((\Sigma_g/f) \setminus B_f, x)$ の可換化すなわち $H_1((\Sigma_g/f) \setminus B_f)$ から $\mathbb{Z}_n$ への準同型 ω_f が Ω_f から誘導される.

2つの Σ_g 上の周期的写像 f, f' に対して, 同相写像 g で $f' = g \circ f \circ g^{-1}$ なるものが存在するとき (つまり, f と f' との違いが見かけ上だけで力学的な振る舞いが同じであるとき), f と f' とが共役 (conjugate) であるという. (ちなみに, Nielsen の論文では topologically equivalent と呼ばれている.)

周期的写像 f の branch point たち $B_f = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_b\}$ について, Q_i を中心とする (他の branch point を囲まない程度に) 十分小さい円周に時計回りの向きを入れたものを S_{Q_i} とする.

Theorem 2.1. [17] 閉曲面 Σ_g 上の2つの周期的写像 f, f' が共役であるための必要十分条件は次の3条件である.

- (1) f の周期 = f' の周期,
- (2) B_f の点の個数 = $B_{f'}$ の点の個数,
- (3) $B_{f'} = \{Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_b\}$ の点の番号付けを適当にかえれば, 各 i について $\omega_f(S_{Q_i}) = \omega_{f'}(S_{Q'_i})$ が成り立つ. □

この定理より, $\theta_i = \omega_f(S_{Q_i})$ と定めると, 列 $[g, n; \theta_1, \dots, \theta_b]$ で f の共役類が完全に記述される. なお, 以下では, この列の代わりに, 等価な情報を与える total valency と呼ばれるデータ $(n, \theta_1/n + \dots + \theta_b/n)$ を用いる (ただし, この記述を用いる場合, どの種数の曲面上の周期的写像を考えているかは, あらかじめ断っておく必要がある). この記述方法は, 足利正氏と石坂瑞穂氏 [5] によって導入されたものである. なお, total valency に現れる分数はしばしば既約分数により表示される.

Introduction で述べられた周期的写像は, この表示を用いると, $(12, 1/12 + 2/3 + 1/4)$ と表される Σ_3 上の周期的写像である. 次の節では, この周期的写像の Dehn twist による表示を求める方法を述べる.

3. INTRODUCTION で述べた DEHN TWIST の積の1つの見つけ方

まずは、一般的な状況を考える. すなわち, f を Σ_g 上の周期 n の周期的写像とし, f の branch point の個数を b とする. D^2 で $\mathbb{C}$ 上の単位円板を表すこととする. $\Sigma_g \times D^2$ 上の $(x, t) \rightarrow (f(x), \exp(2\pi i/n) \cdot t)$ で定義される同相写像は $\Sigma_g \times D^2$ 上の $\mathbb{Z}_n$ 作用を定めるが, この商空間 $(\Sigma_g \times D^2)/\mathbb{Z}_n$ は $[f \text{ の branch point }, 0]$ で定まる b 個の点を商特異点とする. これらの特異点を以下に述べる方法, Hirzebruch-Jung resolution, により解消する.

ここで, Q を f の branch point で valency が θ/n であるものとする. これに対応して, 1点で交わる2本の線 L_{-1} , L_0 を描き, L_{-1} の脇には n を L_0 の脇には θ を添えておくことにする. 以下では, 説明の都合上 $k_0 = \theta$ と定めておくことにする. もしも k_0 が n を割り切るならば, これ以上, 線を書き加えないことにする. 一方, k_0 が n を割り切らないときは, L_0 と1点で交わり L_{-1} とは交わらない1本の線 L_1 を書き加え, $n + k_1$ が k_0 で割り切れるような最小の自然数 k_1 をその脇に添えておく. さらに, この操作を, 停止するまで続ける. すなわち, L_i まで既に書き加えたとして, もしも k_i が k_{i-1} を割り切るならば, これ以上, 線を書き加えないことにする(「停止」). 一方, k_i が k_{i-1} を割り切らないならば, 更に, L_i と1点で交わり他の線とは交わらない1本の線 L_{i+1} を書き加え, $k_{i-1} + k_{i+1}$ が k_i で割り切れるような最小の自然数 k_{i+1} をその脇に添えておく. ここで, 各線に添えた数のことを, その線の *multiplicity* と呼ぶ.

ここまでの操作で得られた図に対して, 境界付きの4次元多様体を構成する. 線 L_{-1} に対しては, 2次元円板 B 上の D^2 束(この場合はただの直積)を構成しておく. 他の線 L_{k_i} に対しては, 2次元球面 S_i 上の D^2 束を構成しておく. 2次元球面 S_i 上の D^2 束は Euler 数, すなわち S_i の自己交差数 $S_i \cdot S_i$ により決定されるが,

$$S_i \cdot S_i = - \frac{L_i \text{ と交差する直線の multiplicity の総和}}{k_i}$$

と定めておく. さらに, 2本の線が交差するとき, それらの線に対応する D^2 束の plumbing をとると, 境界付きの4次元多様体を得られ, その境界は $(\Sigma_g \times D^2)/\mathbb{Z}_n$ における $[Q, 0]$ の近傍の境界と同相である. そこで, $[Q, 0]$ の近傍を取り除き, 代わりに上で構成した4次元多様体を貼り付ければ, 1つ商特異点が解消されたことになる.

この手段を、あと残りの $b-1$ 個の商特異点に対して適用すれば、境界付き 4 次元多様体が構成できる。ただし、以上の操作によって境界の微分同相型に変化がないことに注意せよ。

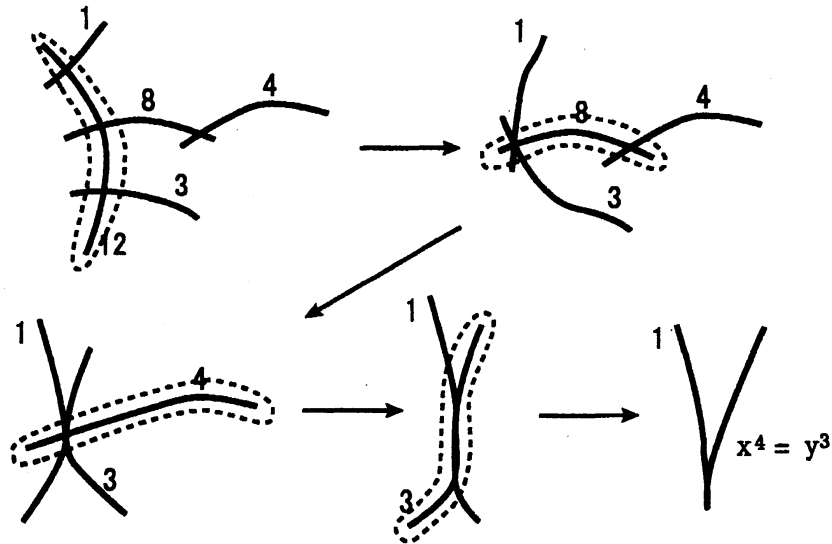


FIGURE 2. 自己交差数 -1 の球面を破線で囲んだ

ここで、問題となっている Σ_3 上の周期的写像 $f = (12, 1/12 + 2/3 + 1/4)$ に対して上の構成を行うと、 $(\Sigma_3/f) \times 0 \subset (\Sigma_3 \times D^2)/\mathbb{Z}_{12}$ が Figure 2 の左上に描かれている互いに横断的に交わる球面の和集合に置き換えられる。この絵において、multiplicity が 12 の球面は商空間 Σ_3/f に、他の球面は f の branch point に由来している。さらに、Figure 2 に描かれている通り、繰り返し blow-down することにより、自己交差数 -1 の 2 次元球面を完全に取り除く（大まかな言い方をすれば、この様な 2 次元球面は null-homotopic な単純閉曲線に沿った Dehn twist に対応しているので、余計なものとして取り除いている?）。すると、最終的に、 $(0,0)$ を孤立特異点とする平面曲線 $x^4 = y^3$ が得られる。

そこで、 $x^4 = y^3$ のモノドロミーを求めるのであるが、そもそも、モノドロミーとは何だろう：写像 $\Psi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ を $\Psi(x,y) = x^4 - y^3$ で定めると、 $\Psi^{-1}(0)$ が問題の平面曲線である。ここで、 ϵ を十分小さい数とし、 $S_\epsilon^3 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = \epsilon^2\}$ と定めると、 $L_\epsilon = S_\epsilon^3 \cap \Psi^{-1}(0)$ は結び目になっている（一般的には、絡み目になっている）。写像 $\psi: S_\epsilon^3 - L_\epsilon \rightarrow S^1$ を $\psi(x,y) = \frac{\Psi(x,y)}{|\Psi(x,y)|}$ で定義すると、これは、 L_ϵ の Seifert 曲面

をファイバーとする S^1 上の曲面束となっている. この fibration $\psi : S^3_\epsilon - L_\epsilon \rightarrow S^1$ を $x^4 - y^3 = 0$ の *Milnor-fibration* [16] と呼ぶ. 先に述べた, $x^4 - y^3 = 0$ のモノドロミーとは, この fibration のモノドロミーのことである. モノドロミー自身は, 境界付きの曲面上定まっているが, 境界に円板でふたをしてそのふたの上に恒等写像によりモノドロミーの定める写像を拡張すると, 問題となっている f と isotopic な写像が得られる. 従って, モノドロミーの Dehn twist 表示が得られれば, f の表示が得られる.

ところで, 平面曲線 $x^4 - y^3 = 0$ の特異点の周りが $(4, 3)$ -torus knot であることなどは, すでに, Milnor [16] によって知られていることであり, well-known とすべきところかもしれないが, f 以外の周期的写像へのアプローチも考慮して目で見える形で述べるのが目的であるので, あえて A'Campo の divide の理論 [2, 3, 4] を用いた方法を述べることにする. なお, 他にも, モノドロミーを求めるいろいろな方法があり, 例えば, ロシアの数学者たちによる *real morsification* を用いた方法もあるそうである (Gusein-Zade [1] の方法などを参照).

まずは, $x^4 - y^3 = 0$ を特異点の近所で perturb する. そのために, 合田洋氏 (東京農工大学), 平沢美可三氏 (名古屋工業大学), 山田裕一氏 (東京電機大学) による論文 [10] の方法を述べることにする. なお, 以下の説明では, Figure 3 を参照していただきたい. まずは, 横の長さが x のべき (この場合 4) に等しく, 縦の長さが y のべき (この場合 3) に等しい長方形を描き, 縦横の長さが 1 の正方形に分割する. この長方形の右上の角から正方形の対角線を描き, 長方形の縁に到達するまで延長し, 長方形の縁で 90 度反射させ, 更に延長し, 長方形の縁に達したら 90 度反射させ... を長方形の角に到着するまで繰り返す. このようにして描かれた対角線をつなぎ合わせた線画の角を丸めたものが perturb された $x^4 - y^3 = 0$ の図である. これは, 単位円板に proper にはめ込まれた曲線とみなすことが出来, *divide* と呼ばれるものの一種とみなせる.

単位円板 D 内に proper かつ generic (横断的な 2 重点のみを交点として許容している) にはめ込まれたコンパクトな 1 次元多様体 P を divide とよぶ. Divide P に対し, 次の様にして絡み目 $L(P)$ が定まる:

$$L(P) = \{(u, v) \in TD \mid u \in P, v \in T_u P, |u|^2 + |v|^2 = 1\} \subset S^3.$$

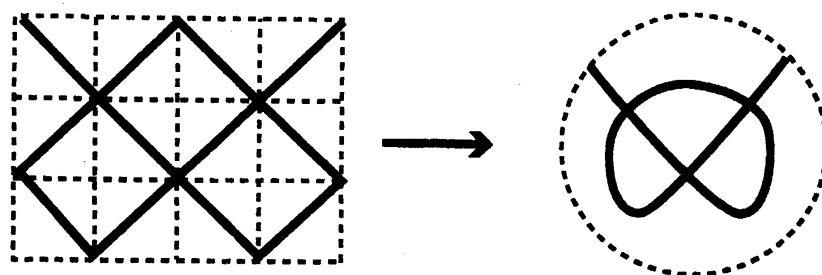


FIGURE 3

P を Figure 3 の右側に書いた divide とすると, $L(P)$ は $x^4 - y^3 = 0$ の特異点の周りの L_ϵ に isotopic である. ここで, Figure 3 において水平方向の座標を「高さ」とみなすことにすると, P の高さ関数に極大値と極小値が唯一つづつあると見ることが出来る. 高さ関数に関して, このような性質が成り立つ divide を *ordered Morse divide* と呼ぶ. Ordered Morse divide に対しては, O. Couture, B. Perron [6] や, 合田洋氏, 平沢美可三氏, 山田裕一氏 [10] による, $L(P)$ 自身とそのファイバー曲面を目で見る方法がある. まず, 問題の divide を Figure 4 の左側のように, 平行に走った破線の

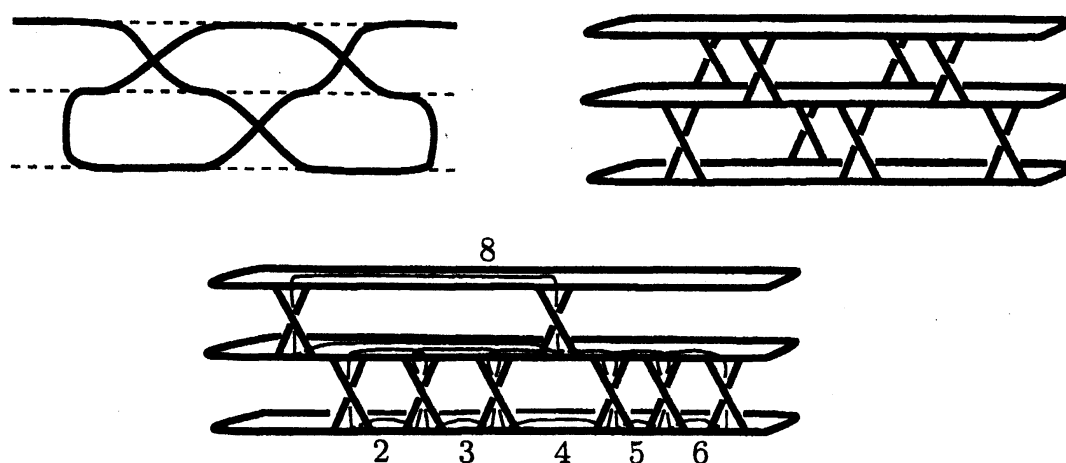


FIGURE 4

上に描く. さらに, 同じ Figure の右側のように, 各破線に対して, 一枚ずつ円盤を描き, divide 上の各交差点に対して, 手前に一つ, 奥に一つねじれたバンドを貼り付け, さらに, 極大点と極小点の各々に対して, 一つねじれたバンドを貼り付けることにする. こうして出来た曲面 $F(P)$ の境界が $L(P)$ であり, $F(P)$ はファイバー結び目 $L(P)$ のファイバー曲面である. ここで, あとの説明の都合上, $F(P)$ を Figure 4

の下の変形しておく. この曲面は境界成分が 1 つある種数 3 の曲面であり, その境界を円盤でふさいで得られる閉曲面と Figure 1 に描かれている曲面との間の同相写像を, 番号付けられた閉曲線が互いに対応するものとして定めておく.

3 次元球面 S^3 内の曲面 R が 2 つの S^3 内の曲面 R_1, R_2 の村杉和 であるとは, 以下の条件を満たすことである;

- (1) $R = R_1 \cup_{\Delta} R_2$, ただし, 2 次元円盤 Δ は $\partial\Delta = \mu_1 \cup \nu_1 \cup \cdots \cup \mu_n \cup \nu_n$ を満たすものとし, ここで μ_i (resp. ν_i) は R_1 (resp. R_2) 上の proper arc である.
- (2) S^3 内に次の条件を満たす 3 次元球体 B_1, B_2 がある:
 - $B_1 \cup B_2 = S^3, B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2 = S^2$,
 - $R_1 \subset B_1, R_2 \subset B_2$ であり, さらに $R_1 \cap \partial B_1 = R_2 \cap \partial B_2 = \Delta$.

Gabai [8, 9] は, $(S^3, \partial R_i)$ が R_i を fiber とし ϕ_i を monodromy とする fibered link であるならば, R_1 と R_2 の村杉和 R について $(S^3, \partial R)$ が R を fiber とし $\phi_1 \cdot \phi_2$ を monodromy とする fibered link であることを示した. Figure 5 に描かれた S^3 内に埋

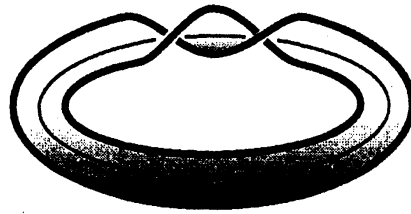


FIGURE 5

め込まれた annulus を (positive) Hopf band と呼び, その境界を (positive) Hopf link と呼ぶ. (Positive) Hopf link は (positive) Hopf band をファイバーとする fibered link であり, その monodromy は core となっている曲線に沿った right handed Dehn twist である. Figure 4 において, B_i で i を core とする Hopf band を表すと, $F(P)$ は B_i の村杉和となっており, Gabai の結果より $L(P)$ の monodromy が $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8$ であることが分かり, $f = (12, 1/12 + 2/3 + 1/4)$ の right handed Dehn twist による表示が求まった.

論文 [12] において, 種数 4 以下の有向閉曲面上の周期的写像の Dehn twist による表示を完全に求めた. 中には, 上記の方法で表示の得られるものも複数存在する. しかし, 商空間に対して Hirzebruch-Jung resolution を適用し blow-down を繰り返して

も、平面曲線の孤立特異点に帰着しない場合が少なからずあり、その場合は手と計算機で直に扱っている。ここで挙げた方法を一般化し、全ての周期的写像の Dehn twist による表示を求める（このような短いノートで、方法がほぼ完全に述べられる程度に）容易な方法を開発することが望まれる。

Acknowledgments. The author would like to express his gratitude to Professors Tadashi Ashikaga, Ikuko Awata, Hisaaki Endo, Mikami Hirasawa, Masaharu Ishikawa, Mizuho Ishizaka, Yukio Matsumoto, Haruko Nishi, Yoshihisa Sato, Shigeru Takamura and Yuichi Yamada for fruitful discussions and comments, and to Professors Kazushi Ahara and Takuya Sakasai for their useful program “Teruaki for Mathematica”.

REFERENCES

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Guseĭn-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Vol. II. Monodromy and asymptotics of integrals*, (Translated from the Russian by Hugh Porteous. Translation revised by the authors and James Montaldi.) Monographs in Mathematics, 83. Birkhauser, 1988
- [2] N. A'Campo, *Real deformations and complex topology of plane curve singularities*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 8, (1999), 5–23.
- [3] N. A'Campo, *Generic immersions of curves, knots, monodromy and Gordian number*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 88, (1998), 151–169.
- [4] N. A'Campo, *Planar trees, slalom curves and hyperbolic knots*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 88, (1998), 171–180.
- [5] T. Ashikaga and M. Ishizaka, *Classification of degenerations of curves of genus three via Matsumoto-Montesinos' theorem*, Tohoku Math. J. (2) 54, (2002), 195–226.
- [6] O. Couture, B. Perron, *Representative braids for links associated to plane immersed curves*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 9, (2000), 1–3.
- [7] M. Dehn, *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Acta Math. 69, (1938), 135–206.
- [8] D. Gabai, *The Murasugi sum is a natural geometric operation*, Low-dimensional topology (San Francisco, Calif., 1981), 131–143, Contemp. Math., 20, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [9] D. Gabai, *The Murasugi sum is a natural geometric operation. II*, Combinatorial methods in topology and algebraic geometry (Rochester, N.Y., 1982), 93–100, Contemp. Math. 44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
- [10] H. Goda, M. Hirasawa, and Y. Yamada, *Lissajous curves as A'Campo divides, torus knots and their fiber surfaces*, Tokyo Jour. Math., 25, (2002), 485–491.
- [11] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Math., 20, Amer. Math. Soc., 1999.
- [12] S. Hirose, *Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4*, preprint available from <http://www.ms.saga-u.ac.jp/~hirose/work.html>
- [13] S. P. Humphries *Generators for the mapping class group*, In: Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977), Lecture Notes in Math., 722, 44–47 Springer, 1979.

- [14] **M. Ishizaka**, *Presentation of hyperelliptic periodic monodromies and splitting families*, preprint.
- [15] **W.B.R. Lickorish**, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 60(1964), 769–778, Corrigendum: Proc. Cambridge Philos. Soc. 62(1966), 679–681.
- [16] **J. Milnor**, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, No. 61 Princeton University Press, 1968
- [17] **J. Nielsen**, *Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen*, Math. -fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 15, nr.1 (1937) (English transl. in “Jakob Nielsen collected works, Vol.2”, 65–102).
- [18] **J. Powell**, *Two theorems on the mapping class group of a surface*, Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978), 347–350.
- [19] **P.A. Smith**, *Abelian actions on 2-manifolds*, Michigan Math. J., 14 (1967), 257–275.
- [20] **K. Yokoyama**, *Classification of periodic maps on compact surfaces. I*, Tokyo J. Math. 6 (1983), 75–94.