

確率微分方程式を用いた気候モデルについて

中野直人 (Naoto Nakano)*; 稲津将 (Masaru Inatsu)

Faculty of Science, Hokkaido University

向川均 (Hitoshi Mukougawa)

Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University

楠岡誠一郎 (Seiichiro Kusuoka)

Department of Mathematics, Kyoto University

Abstract

本研究では、確率微分方程式を用いて季節予測可能性を評価することを試みる。用いたデータは対流圏中高緯度北半球冬季における 10 日の低周波フィルタを施した 500hPa 等圧面高度の変動である。この長周期変動で卓越する 2 つのモードによって張られた相空間において確率微分方程式を立て、長期間の再解析データから求められたドリフトと拡散係数を用いて、季節予報可能性を定量的に評価する。さらに、確率論的誤差成長過程の考察から、大気長周期変動の力学と予測可能性変動に関する新しい数理モデルの構築について議論する。

1 序

1.1 背景

一週間から一ヶ月のタイムスケールにおける大気の長周期変動 (Low-Frequency Variability, LFV) は、その予測が難しく、不規則的やカオス的などと表現されることがある。その一方で、ブロッキングやテレコネクションパターンなどある程度長寿命の秩序状態もその変動の中に存在することが知られている。このため、そのような秩序状態間の変遷過程を明らかにすることは季節予測可能性を議論する上で重要と考えられている。Charney and DeVore [4] は、中高緯度対流圏における大規模流を表現する、理想化された地形を含む低次元順圧モデルにおいて、存在する二つの安定不動点が帯状流の卓越する状態とブロッキング状態に対応することを見出し、総観規模変動がこれらのレジーム間の遷移を引き起こすという仮説を立てた。この研究が契機となって、多くの気象科学の研究者は LFV の振る舞いを包括的に説明す

*e-mail: n_nakano@mail.sci.hokudai.ac.jp

るために、大気大規模運動を表現する非線形力学系の固定点を探すことに注力した。さらには、カオス的な振る舞いを示すモデルで出現する秩序構造に相当する準定常状態が、モデルの固定点付近 [14] や、極小点付近 [19] を通過するときに出現することも見出された。また、不動点や準定常状態が二つ以上存在するような多重平衡状態も幾つかの低次元系において出現することも報告されている [3, 10, 29]。しかしそのような多重平衡解は、大気大循環モデル (General Circulation Model, GCM) などの、より複雑な系で見つけることは非常に難しい。

また、現実大気の運動で準定常状態に相当する多重天候レジームを見出す試みも行われてきた。この試みでは統計的に得られた LFV の卓越モードで張られる低次元相空間を考え、そこでの確率密度関数が有意にガウス分布からずれているかどうかで、その存在の有無を判断する。ただ、その検定は統計的に困難な場合があり、また、それは高次元相空間を用いて検証すべきという指摘とも相まって、低次元力学系で得られた成果を現実大気運動に直接適用できるかどうかは依然として明らかではない。このことは、変数や領域を制限したり、高次モードを無視したりすることで、高次元の長周期大気運動を低次元力学系に縮約できるか否かという議論と同等である。

一方で、LFV の予測可能性変動とその力学との間の関係を探る研究もいくつか行われている。例えば、Kimoto, Mukougawa and Yoden [13] は、大気運動が帯状流の卓越する状態からブロッキング状態に遷移するときに予測可能性が悪くなることを発見した。また、Palmer [23] は、正の太平洋・北米 (Pacific-North American, PNA) パターンに関する予測は、負のときと比べて予測精度が高くなることを報告している。最近では Tang, Lin, Derome and Tippett [31] が、半球規模での卓越モードである北極振動 (Arctic Oscillation, AO) の正 (負) のパターンのとき予測可能性が高く (低く) なることも示している。また、低次元系においては、準定常状態または天候レジームに軌道が近づくときに予測可能性が高くなることも示されている [20, 35]。しかしながら、上記の研究は、個々の事例における予測可能性と準定常状態との関係について着目したに過ぎない。決定論的非線形力学系の枠組みを用いた相空間における予測可能性変動の大域的な性質の理解にはまだまだ遠いのが現状である。本研究では、この困難を乗り越えるため確率微分方程式という新たな枠組みを用いた解析を実施する。

1.2 確率論的モデル

近年、確率微分方程式を用いた大気 LFV の研究も行われ始めている [1, 30]。その手法の始まりは主に Hasselman [6] によるものであり、次の形の確率微分方程式をもとに考える：

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{A}(\mathbf{X}_t)dt + \mathbf{S}(\mathbf{X}_t)d\mathbf{W}_t. \quad (1.1)$$

ここで、 n を相空間の次元とし、 $\mathbf{X}_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^n)^T$ は相空間における大気の状態ベクトル、 $\mathbf{A}(\mathbf{X}_t) = (A^1(\mathbf{X}_t), A^2(\mathbf{X}_t), \dots, A^n(\mathbf{X}_t))^T$ は決定論的ドリフト、 $\mathbf{W}_t = (W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^m)^T$ は各成分が独立な Wiener 過程からなるホワイトノイズ

で、その個数を m とし、 $\mathbf{S}(\mathbf{X}_t) = (S^{ij}(\mathbf{X}_t))$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$) は状態に依存する乗法的ノイズの係数である。

このアプローチでは、相空間における大気状態は確率微分方程式 (1.1) に従って時間発展するものとする。このモデルで表現されるノイズは、縮約されて陽に表現されない高次元 (空間スケールの小さな) 力学やデータの測定誤差なども含まれる。このように、得られた低次元モデルには常に様々な「ノイズ」が内在的に存在しているのである。決定論的手法は、予測期間が長くなる LFV に対しては有効ではない。このため、初期値の近傍の数点を選び、それらの点からの時間発展を計算し、そのアンサンブルの分布の広がりから予測可能性を評価する。この広がり系の初期値鋭敏性 (GCM での数値天気予測でもその性質は出現する) を表現している。一方、(1.1) に基づく確率論的予測手法では、アンサンブルメンバーの広がり方は、決定論的な系におけるカオスの性質に依るものというより、この種のモデルの特性ともいえるべき、系に影響を与える何かしらの確率論的外力に起因するものとみなす。この観点より、確率微分方程式に基づき、確率分布自体の時間発展を評価することにより LFV の予測可能性変動を解析することを試みる。

さて、 $p(\mathbf{x}, t)$ を遷移確率密度函数とすると、(1.1) から導かれる Fokker-Planck 方程式は以下で表される：

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} (A^i(\mathbf{x})p(\mathbf{x}, t)) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (B^{ij}(\mathbf{x})p(\mathbf{x}, t)). \quad (1.2)$$

ただし、 $\mathbf{x}$ は相空間の位置とし、 $\mathbb{B}(\mathbf{x})$ は、 $\mathbb{B} = (B^{ij}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} \mathbf{S} \mathbf{S}^T$ で表される拡散係数と呼ばれるテンソルである (本稿では確率微分方程式の係数 $\mathbf{S}$ ではなく $\mathbb{B}$ を拡散係数と呼ぶことにする)。このとき、初期条件 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}$ を満たす (1.1) の解 $\mathbf{X}_t$ と係数 $\mathbf{A}$ と $\mathbb{B}$ には以下の公式が成り立つことが知られている。

$$\begin{cases} A^i(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_{\mathbf{x}}[X_t^i - x^i]}{t}, \\ B^{ij}(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_{\mathbf{x}}[(X_t^i - x^i)(X_t^j - x^j)]}{2t}. \end{cases} \quad (1.3)$$

ここで、 $E_{\mathbf{x}}[\cdot]$ は、上記の初期条件を満たす (1.1) の解が導く確率測度に対する期待値である。従って、理論上は、全ての初期値から出発する解を用いると、その係数を逆算することができる。もちろん、(1.3) で求められるのは $\mathbb{B}(\mathbf{x})$ であり、確率微分方程式の係数 $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ ではない。 $\mathbb{B}(\mathbf{x})$ から $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ を計算すること、即ち $\mathbb{B} = \frac{1}{2} \mathbf{S} \mathbf{S}^T$ を満たす $\mathbf{S}$ を求めることも可能だが、一般にはそのような $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ は一つには定まらない。ただ (1.2) に見られるように、分布の時間発展における拡散の効果は $\mathbb{B}$ が支配するため、仮に係数を決めて確率微分方程式 (1.1) でシミュレーションするとき、何か一つ $\mathbb{B} = \frac{1}{2} \mathbf{S} \mathbf{S}^T$ を満たす $\mathbf{S}$ を決めておけば良い。

Berner [1] や Sura *et al.* [30] は (1.3) に注目して、再解析データからこの Fokker-

Planck 方程式のドリフト係数と拡散係数を、次の式により見積もった。

$$\begin{cases} A^i(\mathbf{x}) \cong \left\langle \frac{X_{t+\Delta t}^i - X_t^i}{\Delta t} \right\rangle, \\ B^{ij}(\mathbf{x}) \cong \left\langle \frac{(X_{t+\Delta t}^i - X_t^i)(X_{t+\Delta t}^j - X_t^j)}{2\Delta t} \right\rangle. \end{cases} \quad (1.4)$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle$ はアンサンブル平均である。また、(1.4) の左辺に現れる $\mathbf{x}$ は相空間を離散的に矩形に分割した一つの分割セルを表し、 $\mathbf{X}_t$ はある時刻 t でそのセルに含まれる時系列データとする。ここでは、次の時間ステップでのデータ $\mathbf{X}_{t+\Delta t}$ を用いて、一次と二次のモーメントの微分商のアンサンブル平均を上記の期待値の時間零極限の代わりに取ることにする。なお、この計算をもって代替とするには二つの重要な仮定を課す必要がある。一つは、時系列データは十分な長さがあり、相空間の至るところを軌道が通過し、各矩形内に十分多くの軌道が通過することから、 $E_{\mathbf{x}}[\cdot]$ をアンサンブル平均で代替できるとしたことである。もう一つは、時間変数に対する零極限を、所与のデータセットのサンプル時間間隔の都合から、次ステップのデータとの差分で置き換えたことである。

Sura *et al.* [30] は、大気 LFV に対する線形モデルに乗法的ノイズを加えた低次元システムを作成し、ガウス分布からずれるような確率密度関数が得られることを示した。一方、Branstator and Berner [2] は、超長期の GCM 積分のデータを用いて、惑星波動には非線形性が内在することを確率微分方程式の枠組みで示している。どちらの方法も LFV の性質に迫るものである一方で、LFV の理解には、「線形ドリフト+乗法ノイズ的モデル」が有効か、あるいは「非線形決定論的モデル」が必然なのかについては、未だ決着はしていないが、ここではその問題には深入りしないことにする。

ところで、予報スプレッドと大気状態との関係性について、(1.1) から導かれる揺動散逸関係 [26]

$$\frac{d}{dt} \langle X^i X^j \rangle = \langle X^i A^j(\mathbf{X}) \rangle + \langle A^i(\mathbf{X}) X^j \rangle + 2 \langle B^{ij}(\mathbf{X}) \rangle \quad (1.5)$$

は実に示唆に富んでいる。すなわち、(1.5) で状態ベクトルの二次モーメントが定常 (左辺が 0) のときは、右辺第一項と第二項に表される決定論的ドリフトの効果と、第三項で表される確率論的拡散が釣り合う。近年この関係式 (1.5) を用いて、中高緯度大気 LFV に対する熱帯の影響 [21]、温帯低気圧の統計理論 [34]、熱帯の大西洋の海面水温予測可能性の解析 [27] などの研究が行われている。ただ、確率微分方程式の係数と大気 LFV の予測可能性との関係性について議論するのは、本研究が初めてである。

1.3 本研究の目的と概要

本研究の目的は、確率論的モデルをもとにした LFV の季節予測可能性に対する新しい予測理論の構築である。本稿では、まずその初めとして、北半球冬季におけ

る中高緯度 LFV について経験的直交函数 (Empirical Orthogonal Function, EOF) 解析をし、卓越する 2 つのモードからなる二次元相空間を構築する。次に、この相空間で確率微分方程式 (1.1) に対応する Fokker-Planck 方程式 (1.2) の係数を (1.4) から求め、相空間における状態ベクトルと予測可能性との関係を解析する。用いる確率微分方程式の乗法的ノイズには、高周波成分の非線形相互作用のみならず、この低次元相空間では表現できない高次の LFV 成分が生成する強制力も含まれる。従って、はるかに高次元の運動を二次元空間に射影するため、状態ベクトルの時間変化への寄与は、決定論的ドリフト $\mathbf{A}$ よりも確率論的拡散 $\mathbf{B}$ からの方が統計的に有意となるだろう。ここでは、さらに予想誤差成長に対する決定論的寄与と確率論的寄与を評価する。これにより、低次元系における予報スプレッドと (1.2) の係数との関係を詳らかにすることを目指す。

実際、このような手法を試すには格好の時期となった。今や、高速のスーパーコンピュータを用いた高解像度のアンサンブル数値予報が可能となり、日本の気象庁、欧州中期予報センター、および米国国立気象局は数十ものアンサンブルメンバーを用いた季節アンサンブル予報を 10 年以上続けている。その予報データはアーカイブされ、二次元相空間への予報スプレッドの射影を描けるほどに蓄積されてきた。このため、現在は相空間における予測可能性変動を評価するのに最適の時期である。ただし、データの長さは統計的有意性を示すのには依然として短いため [9]、再解析データから経験的に得られる確率微分方程式による解析で補完する。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節では本研究で用いるデータと二次元相空間の張り方を説明する。第 3 節では (1.2) の係数と季節予報可能性についての関連性について議論し、本手法による結果について第 4 節で述べる。最後に第 5 節で結論と本研究に関する注意点を与える。

2 データ

本研究で用いた予報データは、気象庁の全球モデルを用いた一ヶ月アンサンブル予報である。2001/2002 冬から 2009/2010 冬までの 9 冬分の週 2 回の予報データの蓄積がある。この予報では、2006 年 3 月以降の期間は、水平解像度は TL155、鉛直層 40 のモデルを用い、アンサンブル数は 25 である。一方、それ以前は T106L40 モデル、アンサンブル数は 13 である。アンサンブル予報における初期摂動は成長育成 (BGM) 法によって作成されている。本研究では 500hPa の等圧面高度に対する、2001/2002 冬から 2009/2010 冬までの 9 冬季の 216 アンサンブル予報を用いる。ここで、冬季とは 12 月、1 月、2 月の三ヶ月間を指す。

一方、本研究で用いた再解析データは気象庁再解析データ JRA25/JCDAS である [22]。格子間隔は水平 1.25 度で時間間隔は 6 時間であり、全球スケールの LFV の解析のためには十分な時空間解像度をもつ。解析に用いた期間は、1979/1980 冬から 2009/2010 冬まで 31 冬季であり、二次元の相空間を構築するのに十分なデータ期間である。低次元相空間を用いる多くの先行研究にならない、対流圏の顕著な特徴を表現する 500hPa の等圧面高度のデータを解析する。500hPa の等圧面高度変

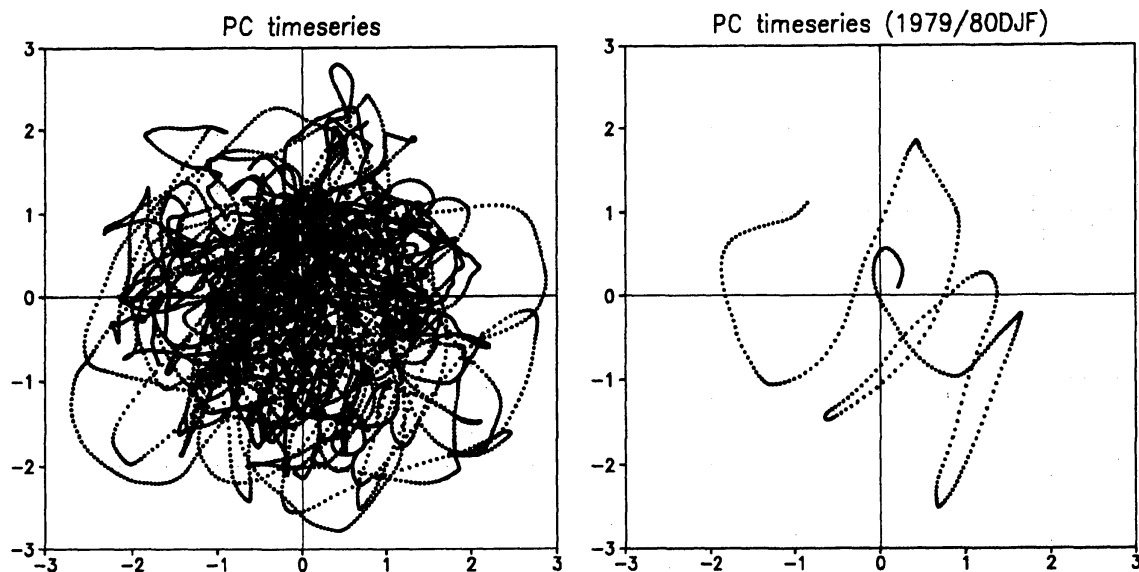


Figure 1: (左) 31 冬季分再解析データの二次元相空間への射影. (右) そのうち 1979 年度 1 冬季分の射影.

動に 10 日の低周波フィルターを使って、対流圏北半球冬季の LFV を取り出し、その気候値を差し引くことで LFV 偏差場を作成した. さらに、北緯 20 度以北の領域での LFV 偏差場に対し主成分分析を行い、上位 2 モードを相空間の基底として選んだ. 得られた相空間に再解析データを射影すると Figure 1 のようになる. 軌道は相空間を一様には通過せず、第二象限の原点近傍に射影の最も密な領域があるように見える. これはそのデータの存在確率密度函数 (Figure 7) の図を見ると明らかである.

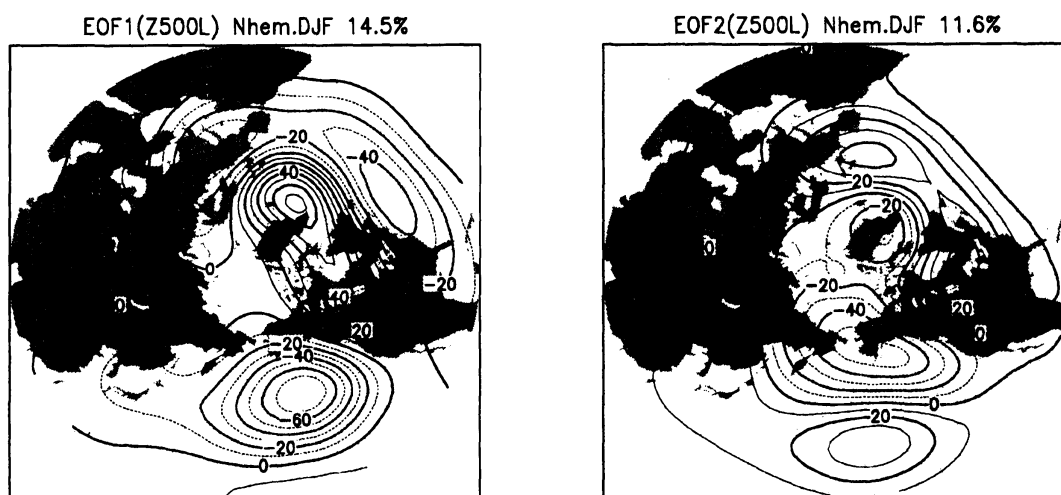


Figure 2: (a) 1979/1980 冬から 2009/2010 冬の 31 冬季の LFV 偏差場に対する EOF1 の図. (b) EOF2 の図.

この EOF 解析による第 1 モードは北大西洋振動 (North Atlantic Oscillation, NAO) に大きな射影をもつパターンであり、第 2 モードは PNA に大きな射影をもつパター

ンである (Figure 2). なお, AO はこの相空間の第二象限と第四象限とを結ぶ線上の振動として表現される [32]. また, ここで得られた EOF は Kimoto and Ghil [12] のそれとほとんど一致している.

本研究では, まず, 再解析データを用いて張られた相空間の上で確率微分方程式を用いて, 再解析データの統計的スプレッドを定量的に評価する. 次に, 実際の予報データのスプレッドの相空間への射影の大きさと比較することで, 構築した確率微分方程式の妥当性を吟味する.

ここで, 主要な EOF で相空間を張ることの意義に関して言及しておく. まず, 卓越モードを基底に取るため, Fourier 級数展開を用いるより, 低次元相空間でより多くの LFV の変動を表現できる. また, 気象学的な視点では, Quadrelli and Wallace [28] や Itoh [8] が, 大部分のテレコネクションパターンは, これらの卓越 2 モードの線形結合で表現できると指摘している. ただし, 本研究の場合, LFV 偏差場の上位 2 モードは全分散のわずか 25% しか説明していない点には注意すべきである. このような大胆な次元の縮約によって失われる情報は非常に多いことも事実である.

3 誤差成長理論

3.1 決定論的誤差成長理論

本研究での新しい誤差成長理論に触れる前に, まずは従来の決定論的誤差成長理論について触れておく [11]. 通常, 気象力学のモデル方程式は次のような自励系

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{X})$$

によって表される. この式より, 接線形方程式 (ある状態 $\mathbf{X}$ まわりでの線形化方程式のこと)

$$\frac{dY^i}{dt}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial A^i}{\partial x^j}(\mathbf{X}) y^j = \sum_{j=1}^n J^{ij}(\mathbf{X}) y^j$$

が導出される. ここで, $\mathbf{Y} = (Y^1(t), Y^2(t), \dots, Y^n(t))^T$ は誤差ベクトル, $\mathbf{J} = (J^{ij}(\mathbf{X}))$ は $\mathbf{A}$ のヤコビ行列である. $\mathbf{A}$ に十分な仮定をおいておけば上の解は一意的な時間大域解をもつ. そこで時刻 $t = 0$ における初期誤差 $\mathbf{Y}(0)$ と基本行列 (ここでは誤差行列とも呼ぶ) $\mathbf{M}(t, \tau) = (M^{ij}(t, \tau))_{i,j=1}^n$ を用いて $\mathbf{Y}(t)$ を次のように表すことにする:

$$Y^i(t) = \sum_{j=1}^n M^{ij}(t, 0) Y^j(0).$$

誤差行列 $\mathbf{M}(t, 0)$ の特異値分解により, その左右特異値ベクトル

$$\mathbf{M}(t, 0) \mathbf{v}^{(m)} = \sigma_D^{(m)} \mathbf{u}^{(m)}$$

は誤差成長にかかわる初期と最終状態の直交基底 $\{\mathbf{v}^{(m)}\}$ と $\{\mathbf{u}^{(m)}\}$ を与える. ここで, 最大成長率が $\|\mathbf{M}(t, 0)\| = \sigma_D^{(1)}$ となることに注意すると, 時刻 t における予報

スプレッドは

$$E_D = \varepsilon \|\mathbf{M}(t, 0)\|$$

と評価することができる。

3.2 確率微分方程式に基づく誤差成長

本研究では次の形の確率微分方程式をもとに誤差成長を考える：

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{A}(\mathbf{X}_t)dt + \mathbf{S}(\mathbf{X}_t)d\mathbf{W}_t. \quad (3.1)$$

本研究では、上の確率微分方程式を他の方程式から演繹的に何らかの方法で導くのではなく、気象の時系列データがそれに従って時間発展しているとみなし、誤差成長を解析する。もちろん、回転系の流体方程式を縮約して低次元力学系を導出することは興味深い研究テーマである。しかし、大気 LFV のような物理が複雑でスケール分離が難しい運動では、級数展開やパラメタリゼーションを用いて有効な閉じた低次元系を導出することは困難である。従って我々は、[1, 30] と同様に、(1.4) を用いて観測された時系列データを用いて帰納的に低次元力学系をモデリングする。

さて、(3.1) を積分形で表すと、

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t A^i(\mathbf{X}_s)ds + \int_0^t \sum_{j=1}^m S^{ij}(\mathbf{X}_s)dW_s^j \quad (3.2)$$

となる。これの両辺の期待値を取ると

$$E_{\mathbf{x}}[X_t^i] = E_{\mathbf{x}}[X_0^i] + \int_0^t E_{\mathbf{x}}[A^i(\mathbf{X}_s)]ds$$

となるので、これを (3.2) から引くと、誤差 δX_t^i に対する積分方程式：

$$\delta X_t^i = \delta X_0^i + \int_0^t \delta A^i(\mathbf{X}_s)ds + \int_0^t \sum_{j=1}^m S^{ij}(\mathbf{X}_s)dW_s^j \quad (3.3)$$

を得る。ただし、 $\delta X_t^i = X_t^i - E_{\mathbf{x}}[X_t^i]$ 、 $\delta A^i(\mathbf{X}_t) = A^i(\mathbf{X}_t) - E_{\mathbf{x}}[A^i(\mathbf{X}_t)]$ である。

確率積分項はないものとし、 $\delta \mathbf{X}_t$ に関する接線形系を考えると、決定論的な要因による誤差成長は

$$\delta X_t^i = \sum_{j=1}^n M^{ij}(t, 0)\delta X_0^j \quad (3.4)$$

によって見積もられる。(3.4) より、決定論的ドリフトに起因するスプレッドの評価は

$$E_D = \varepsilon \|\mathbf{M}(t, 0)\| \quad (3.5)$$

で与えられる。 $\mathbf{M}$ の評価は、短期間的には $\|\mathbf{M}\| \simeq \exp(t \|\mathbf{J}\|) \simeq 1 + t \|\mathbf{J}\|$ により近似できる。

次は (3.3) から (1.5) と同様に揺動散逸関係を導く．誤差共分散行列は

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{x}}[\delta X_t^i \delta X_t^j] &= E_{\mathbf{x}}[\delta X_0^i \delta X_0^j] \\ &+ \int_0^t E_{\mathbf{x}}[\delta X_s^i \delta A^j(\mathbf{X}_s)] ds + \int_0^t E_{\mathbf{x}}[\delta X_s^j \delta A^i(\mathbf{X}_s)] ds + \int_0^t E_{\mathbf{x}}[2B^{ij}(\mathbf{X}_s)] ds \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる．決定論的誤差成長評価 (3.4)-(3.5) と同様に

$$\delta A^i(\mathbf{X}_t) = A^i(\mathbf{X}_t) - E_{\mathbf{x}}[A^i(\mathbf{X}_t)] \simeq \sum_{j=1}^n J^{ij}(E_{\mathbf{x}}[\mathbf{X}_t]) \delta X_t^j$$

とできるので，(3.6) の右辺第二，第三項の非積分関数は

$$\begin{aligned} &E_{\mathbf{x}}[\delta X_s^i \delta A^j(\mathbf{X}_s)] + E_{\mathbf{x}}[\delta X_s^j \delta A^i(\mathbf{X}_s)] \\ &\simeq \sum_{k=1}^n \{ J^{jk}(E_{\mathbf{x}}[\mathbf{X}_s]) E_{\mathbf{x}}[\delta X_s^i \delta X_s^k] + J^{ik}(E_{\mathbf{x}}[\mathbf{X}_s]) E_{\mathbf{x}}[\delta X_s^j \delta X_s^k] \} \end{aligned} \quad (3.7)$$

のように評価できる．

拡散項のみでドリフト項がないものとする場合では，誤差共分散の時間発展には (3.6) の右辺第四項のみが寄与することになるため，非負定値対称なドリフトテンソル $\mathbb{B}$ の固有値解析によって確率論的誤差成長評価を与えることができる． $\mathbb{B}$ の固有値，固有ベクトルを

$$\mathbb{B} \mathbf{e}_S^{(m)} = \sigma_S^{(m)} \mathbf{e}_S^{(m)} \quad (3.8)$$

とすると，確率論的拡散のみに由来するスプレッド E_S の評価は

$$\begin{aligned} E_S &= \|E_{\mathbf{x}}[\delta \mathbf{X}_t \otimes \delta \mathbf{X}_t]\| \simeq \|E_{\mathbf{x}}[\delta \mathbf{X}_0 \otimes \delta \mathbf{X}_0] + 2t E_{\mathbf{x}}[\mathbb{B}(\mathbf{X}_t)]\| \\ &\simeq \sqrt{\varepsilon^2 + 2 \|\mathbb{B}\| t} = \sqrt{\varepsilon^2 + 2\sigma_S^{(1)} t} \end{aligned} \quad (3.9)$$

と与えられる．ただし ε^2 は初期誤差の分散である．

本研究では §1.2 で与えた注意を踏まえ，Berner [1] や Sura *et al.* [30] と同様に，確率微分方程式が導く確率測度に関する期待値 $E_{\mathbf{x}}[\cdot]$ は， $\mathbf{x}$ を含む分割セルを通過する再解析データに対するアンサンブル平均で代替できると仮定し，(1.4) を用いて $\mathbf{A}$ と $\mathbb{B}$ を算出する．このときの Δt は再解析データの時間間隔である 6 時間とした．

4 結果

Figure 3a, 3b は 2001/2002 から 2009/2010 の 9 冬季における気象庁一ヶ月予報に関する統計量を表したものである．再解析データの EOF で張られた二次元相空間に射影した 10 日予報に関する統計量を求めるには，10 日平均した北緯 20 度以北の 500hPa 等圧面高度予測値を用いている．Sura *et al.* [30] に従い，図は 0.4×0.4

のビンについて 3×3 の空間平滑化を行うが、全解析期間中に 216 回の予報しかないため、相空間の原点付近でも数個程度の予報データに基づく統計量であることに注意がいる (Figure 3a). 従って Figure 3 の結果で、統計的有意性を検定することは困難である。しかしながら、予報スプレッドの空間分布は明らかに非一様であることが見て取れる。Figure 3 に 500 hPa 等圧面高度について、予測値の全スプレッド (Figure 3b), 相空間上に射影した予測値の最大分散方向とそれと直交した方向のスプレッド (Figure 3c, 3d) を図示した。その結果、第二象限で予測可能性が高く、第四象限で低いことが示された。両象限間のスプレッドの差は、全スプレッドで 10% 程度であるが、相空間に射影したものの最大分散方向のスプレッドについては 20% を超える。

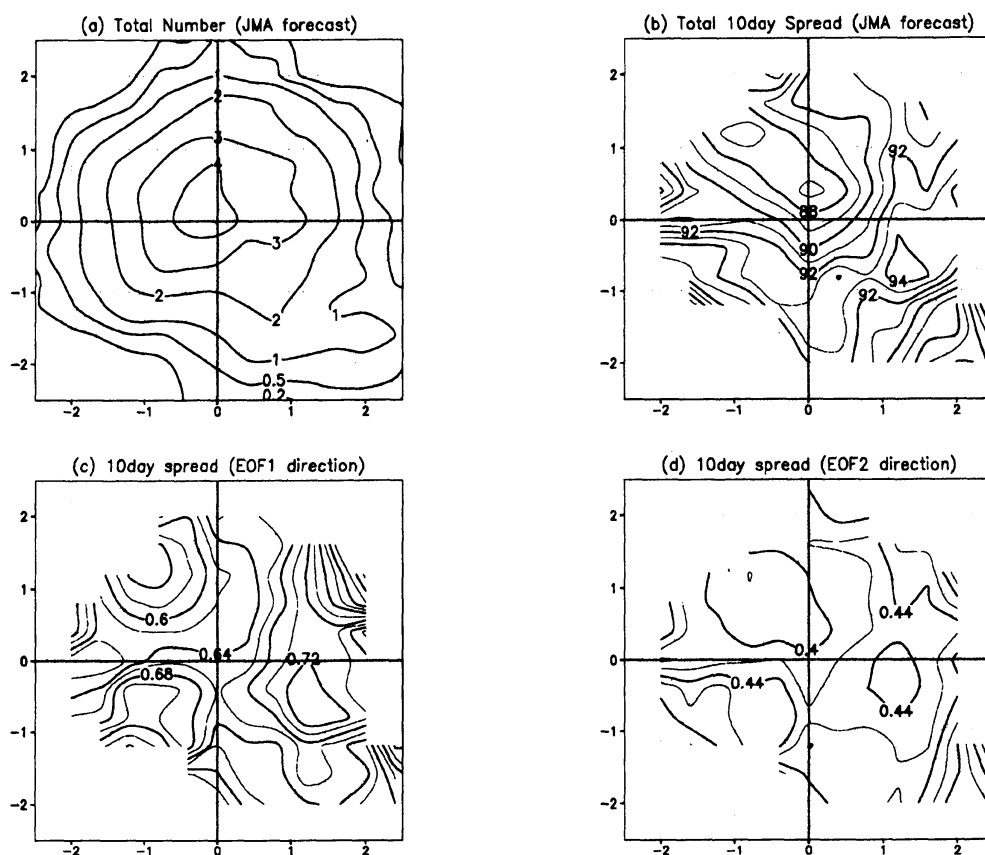


Figure 3: 2001/2002 から 2009/2010 における 9 冬季の気象庁一ヶ月予報に関する統計量の図. (a) それぞれのビンに含まれる気象庁予報の数. (b) LfV 偏差場に対する予報スプレッド. 等高線の間隔は 1m. (c,d) 10 日予報のスプレッドの相空間における (c) 最大分散方向成分, (d) 最小分散方向成分.

ここで、予測スプレッドに関して次の二点を注意しておく。第一は、スプレッドの最大分散方向に関してである。Figure 4 に、それぞれの象限に存在する初期値に対するアンサンブル予測の最大分散方向をプロットした。この図で原点からプロットされた点までを結ぶベクトルは、その最大分散方向とその大きさを表す。この図から、第一、第三、第四象限に存在する初期値では、最大分散方向は EOF2 の

方向に向き (Figure 4a, 4c, 4d), その大きさは最小分散方向に比べかなり大きいことがわかる (Figure 3c, 3d). 一方, 第二象限では, 最大分散方向には統計的特徴は見取れない. (Figure 4b). 第二は, 2006年の気象庁一ヶ月アンサンブル予報システムの変更に伴う影響のチェックである. Figure 4での白丸は変更前, 黒丸は変更後のデータを示す. このプロットからは, 変更の前後で特徴の変化は見られない. 従って, 本研究ではシステム変更の影響は考慮しない.

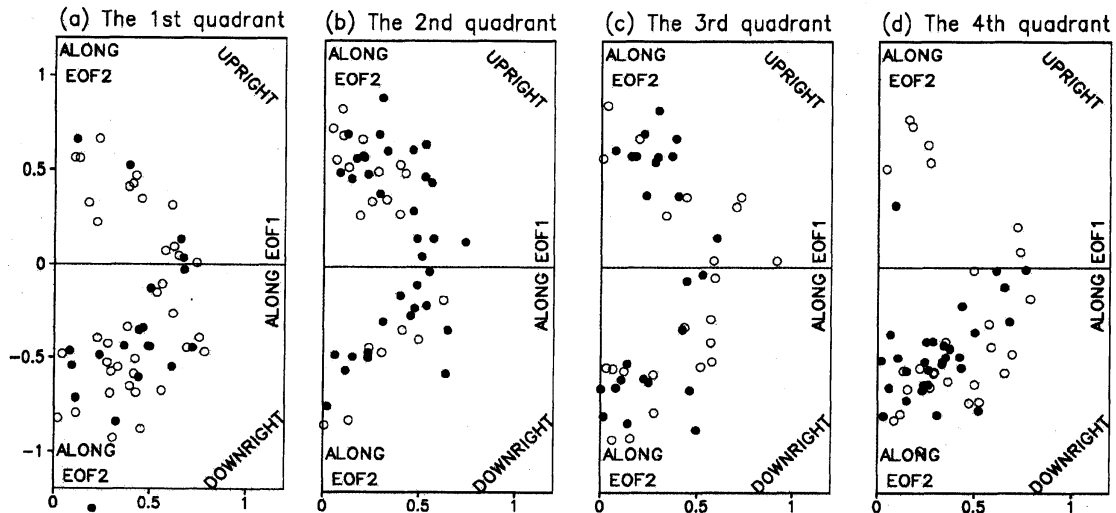


Figure 4: 10日アンサンブル予報のスプレッドの最大分散方向に関する散布図. (a), (b), (c), (d)はそれぞれ相空間の第一, 第二, 第三, 第四象限に対応する. 白丸 (黒丸) は, 予報システム変更前 (変更後) の予報に対応し, 原点からの角度と距離でそれぞれ誤差が最大に成長する方向と大きさを表す.

次に, 初期誤差を二次元相空間に射影した分散の大きさを 0.12 と設定し, (3.5) と (3.9) を用いて決定論的及び確率論的誤差成長を評価する. この初期誤差の大きさは, 気象庁一ヶ月アンサンブル予報の初期摂動の大きさから見積もった. その結果, (3.5) で見積もられる E_D は実際の予測値のスプレッド (Figure 3c) とは異なる分布を持つことがわかった (Figure 5a). 第四象限で若干値が大きくなるが, 原点付近では値はほぼ一様である. サンプルサイズが非常に限られてはいるが, 原点から離れた場所で E_D が大きくなる傾向は見てとれる. また, E_D の値は, 実際の予測値のスプレッドの大きさ ~ 0.65 (Figure 3c) より大幅に小さい. さらに, 第三, 第四象限における最大特異ベクトルの向き (Figure 5a) はいつでも EOF2-軸に沿っているとは限らない. このことも, 気象庁の予測値のスプレッドの特徴とは大きく異なる (Figure 4c, 4d).

一方, (3.9) で見積もられる確率論的な誤差成長 E_S の分布 (Figure 5b) は, 予測値のスプレッドと定性的に良く合致する. Figure 5c で示されるように, (3.6) で誤差共分散行列への右辺第四項からの寄与が大きく, 第二, 第三項からは低い. また, 拡散テンソルのノルムの極大値は第三, 第四象限に存在し, 極小値は第一象限から第二象限に存在するため, 気象庁の予測値のスプレッドの特徴と良く一致している. ただし, 第一象限では, 予測値のスプレッドは大きい (Figure 3c) が, 拡

散テンソルのノルムは相空間内で最小となり (Figure 5b), その値も予測値のスプレッドの三分の一ほどとなる. しかしながら, 全般的には二次元相空間における10日アンサンブル予報のスプレッドは, 定性的には確率論的な誤差成長で説明できることが示された. さらに, $\mathbb{B}$ の第一固有ベクトルの方向は EOF2-軸に概ね平行であり (Figure 5b), 気象庁の予測値のスプレッドの最大分散方向の性質に似ている (Figure 4). また, 初期誤差分散を $\varepsilon^2 = 0.12$ としたときの $\mathbb{B}$ の第二固有ベクトルによって見積もられるスプレッドの大きさ (Figure 5d) は, 最小分散方向の大きさと一致している (Figure 3d). これらの結果は, 相空間に射影したスプレッドの大きさは確率論的な誤差成長のモデルで良く説明できることを示唆している.

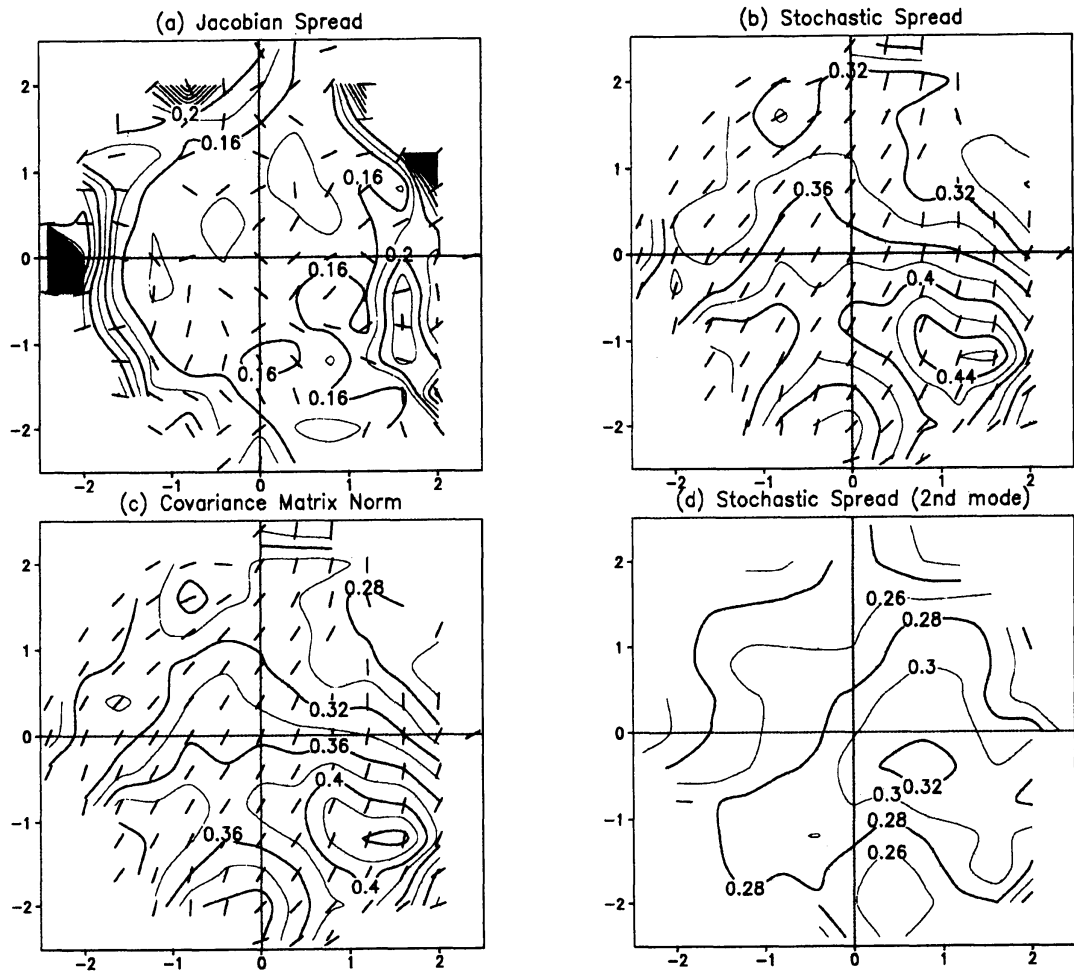


Figure 5: (a) 決定論的ヤコビ行列 $\mathbb{J}$ によって評価されるスプレッド. 等高線の間隔は 0.02. (b) 初期誤差分散を 0.12 とした確率論的拡散テンソル $\mathbb{B}$ によって評価されるスプレッド. 等高線の間隔は 0.02. (c) 誤差共分散行列 (3.6) のノルム. (d) 拡散テンソルの第二固有値で評価した初期誤差分散を 0.12 のスプレッド. (a, b, c) の短い線は, それぞれ $\mathbb{M}$, $\mathbb{B}$, 誤差共分散行列の第一固有ベクトルの向きを表す. 確率密度関数の値 (Figure 7) が 0.01 より小さい領域は空白とする.

Figure 6 に, 初期値を $(PC1, PC2) = (-1.2, -1.2)$ としたときの, 気象庁のアンサンブル予測のスプレッドの時間発展 (実線) と, 本研究で見積もられた決定論的

スプレッド(点線)と確率論的スプレッド(破線)の大きさの時間発展を示す。ここでも初期誤差の大きさは0.12に設定している。実際の予測値のスプレッドは、それが飽和する3週間後までは増加している。一方、確率論的スプレッドは初め5日間は予報スプレッドの挙動と似ているものの、それ以降の増加度は小さくなる。また、決定論的スプレッドは最初から成長が遅く、その大きさは最初の数日で既に予測値のスプレッドよりかなり小さい。このことから、決定論的接線形系によって二次元相空間で予報誤差成長を記述することは難しいことが伺える。この点からも、低次元相空間における対流圏中高緯度LFVの予測可能性評価には確率論モデルを用いることが必要であると示唆される。

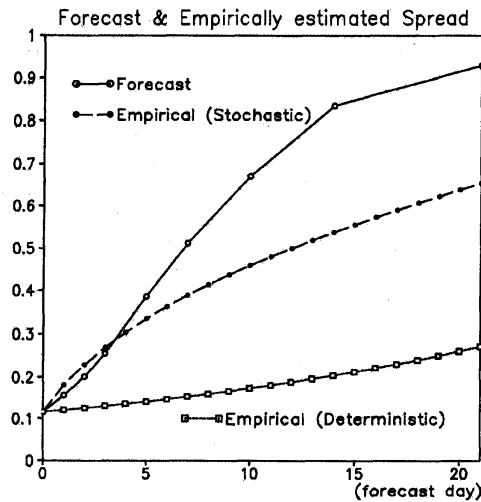


Figure 6: 初期の位置を $(-1.2, -1.2)$ とする予報スプレッド(実線)と本研究で見積もられた決定論的スプレッド(点線)と確率論的スプレッド(破線)の時間発展。

次に、再解析データを二次元相空間にプロットして得られた対流圏中高緯度LFVの気候学的な存在確率密度関数(Figure 7)から、予測値のスプレッドと拡散テンソルとの関係を議論する。この存在確率密度関数は、第四象限の原点から離れたところでガウス分布より小さくなり、かつ第一、第二象限では大きくなる。この非ガウスの存在確率密度関数は、多重天候レジームの存在を示唆する先行研究[12, 30]と整合的である。また、興味深いことに、得られた存在確率密度関数の分布と予測値のスプレッド(Figure 3c)、確率論的スプレッド(Figure 5b)の分布が非常に似ている。Figure 7で、原点から半径1.5くらいの円周上に、ガウス分布よりも存在確率密度の高い三つの領域が確認できるが、それは拡散テンソル $\mathbb{B}$ のノルムが小さい領域と良く合致する。また、第四象限にあるガウス分布より存在確率密度が小さい領域では、ノルムの値も大きい。従って、ガウス分布より存在確率密度が大きい天候レジームの領域は、確率論的スプレッドの小さい場所として特徴付けをすることが可能と考えられる。

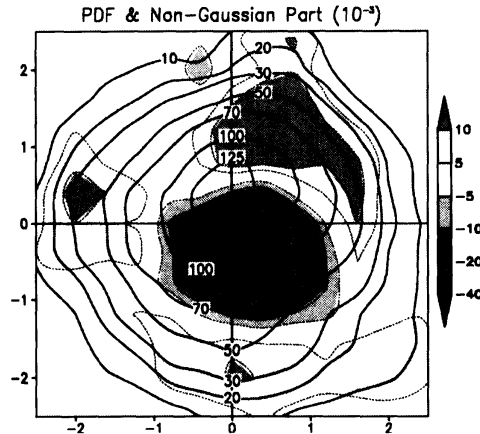


Figure 7: 等高線は二次元相空間における確率密度関数の値，濃淡はガウス分布からのずれを表す。

5 最後に

5.1 結論

本研究では，1979/80 冬から 2009/2010 冬までの 31 冬季の再解析データ (JRA-25/JCDAS) の 500hPa 等圧面高度場 LFV について，2つの主要な EOF を用いて二次元の相空間を張り，この相空間で確率微分方程式のドリフトと拡散係数によって LFV の予測可能性と力学を議論した．2001/02 冬から 2009/10 冬の間の気象庁一ヶ月アンサンブル予報も LFV の予測可能性を評価するために用いた．まず，気象庁アンサンブル予報から見積もられた，LFV の予測スプレッドは，相空間上で顕著な非一様性を示す．一方，予報スプレッドと得られた再解析データから求められる確率微分方程式の拡散テンソルのノルムの分布と予測値のスプレッドとの間に際立った類似点があったが，ドリフトベクトルのヤコビ行列のノルムの大きさの分布も予測値のスプレッドとは大きく異なっていた．従って，拡散テンソルによって表される乗法的ノイズが二次元相空間における予報誤差成長において主要な役割を果たしていることが示された．

本研究で経験的に得られた確率微分方程式による LFV 予測モデルは，新しい低コストの季節予報手法となる可能性を秘めている．ただ，残念なことに二次元相空間では得られた確率微分方程式のドリフト項が相空間に射影された再解析データの解軌道の時間発展の大きさに比べ非常に小さく，低次元相空間での確率微分方程式による予報はまだ実用的ではない (Figure 8a, 8b)．この問題は用いる相空間の次元を上げることによって解決されるであろうと期待している． d 次元相空間の存在確率密度関数を計算するには， $10^{d/2}$ の長さのデータが必要である．このため，現在，再解析データは 30 年程度しか存在しないので，今のところ有意に存在確率密度関数を求められる次元は最高でも 3 次元ということになる．一方，対流圏で重要な LFV の殆どは，3 次元程度では表現することは困難である．この問題点は GCM の長期積分を用いることで打開できると期待している．例えば，対流圏 LFV を 75% 程度まで表現しようとする，100,000 年分の GCM の時間積分が必要とな

る。この積分は、計算機の処理能力が上がった今日では不可能ではなくなったが、その場合、採用する GCM のバイアスを考慮して解析する必要がある。

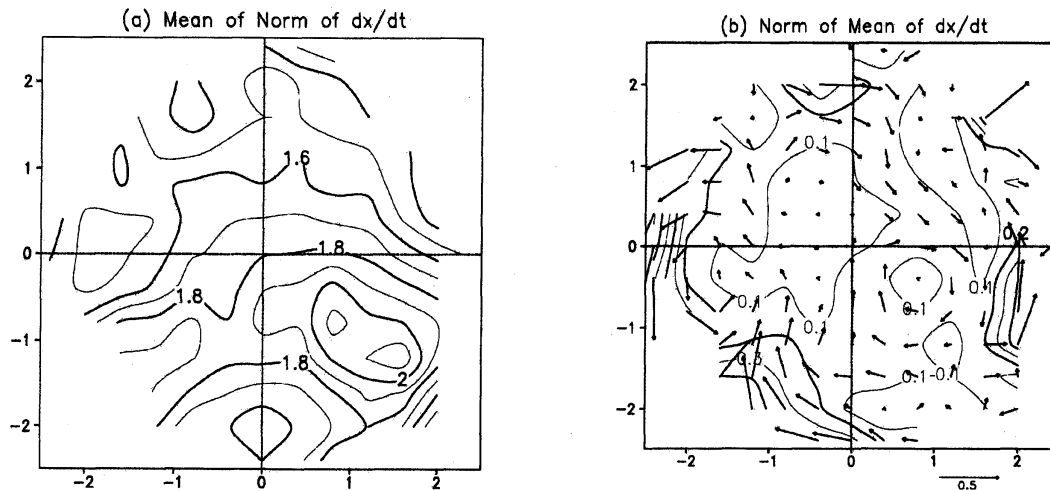


Figure 8: (a) 相空間における状態ベクトルに対する時間変化率のアンサンブル平均. 等高線の間隔は $0.1 (10 \text{ day})^{-1}$. (b) ドリフトベクトル Δ の大きさとその方向.

5.2 コメント

気象の数値モデルに対しては、実際の観測データと合うかどうかはその良し悪しの第一の決め手となる。そのため、多数の自由度を持ち、それらが複雑に影響を及ぼし合っている大気運動を良く再現する“支配方程式”を立てることは非常に難しい。例えば、回転系の渦度方程式に再解析データを代入しても両辺の収支は釣り合わない。まだまだ人間に理解・表現できない物理が隠されているようである。現実の大気の再現には、GCM の開発に代表されるような計り知れない労苦を伴う。

§1.2 で指摘したように、理論気象学では、データの主成分分析を行い、それらの中で卓越する数モードで張られる空間にデータを射影し、大気変動を低次元相空間に射影したデータの軌跡で表現して、その軌道の変遷で予測可能性を議論したり、存在確率密度関数を計算することで気象状態の分布を推定する手法が取られる。このようなデータに基づく経験的解析であれば“方程式”は必要ない。しかし、このままでは大気運動に内在する力学は依然としてブラックボックスのままである。低次元相空間を用いる手法で気象の理解に対して今一步前進するためには、やはりモデル方程式を立てて、それをもとに議論することは必須だろう。複雑な大気運動を一番詳しく表すモデルとしては実際のところ GCM がその役を担っている。ただ、それを用いて気象予測を行うことは、結局は地球シミュレータのように大量の計算資源が必要になり、単なるパワーゲームに耽るだけだ。我々は、そういう手段を選ばずに、例え大雑把でも良いから取り扱いやすい形の確率微分方程式を引っ張り出してきて、例えざっくりとした評価だとしても係数を決める逆問題に取り組み、解析するのである。これを本稿では帰納的モデリングと呼んだが、その意味で

も実際のデータに合わせたモデルを立てるのは非常に重要なことである。勿論我々は低コストモデルの構築を目標としているわけではない。データの解像度の現実から、有限次元系で表すことは致し方ないことである。寧ろ次元縮約における高周波成分のパラメタリゼーションを反省し、適切なモデルを導出することが今後の重要な課題である。また、モデルがデータにフィットしさえすれば良いという考えにも当然至らない。我々は気象学的な議論をなおざりにする気はない。

本研究が含む問題点については以下のように挙げられる。有限次元系でのモード数は、パワースペクトルや自己相関を計算することで、注目する時間スケールに見合うモード数を勘定することや、主成分分析の寄与率などである程度は決めることが出来る。ただし、独立なノイズの数となるとそうはいかない。確率微分方程式を立式するためにもこちらで指定する他はないが、本質的な系のノイズの理解にまで辿らないと、それに対する具体的な根拠を示すことが出来ない。本研究では独立なノイズの数は採用するモード数と同じにしているが、これに対する解釈も必要だ。また、データにもとづく研究の場合、そのデータセットの大きさに解析結果が左右されかねない。実際相空間で軌道が通過しない部分では、(1.4)のような計算方法など手も足も出ない。カーネル推定などデータ寡少の欠を補う統計的手法はあるものの、高次元では一般には良い推定を得ることは難しい。

モデル化における問題点や解析手法に関する問題点など、未だクリアされていない様々な欠陥を孕んだモデルであることは事実だが、我々は本研究が気象数学解析における橋頭堡として、その進展の大いなる小さな一歩になることを期待している。

References

- [1] J. BERNER: Linking nonlinearity and non-Gaussianity of planetary wave behavior by the Fokker-Planck equation. *J. Atmos. Sci.* **62**, 2098-2117 (2003).
- [2] G. BRANSTATOR AND J. BERNER: Linear and Nonlinear Signatures in the Planetary Wave Dynamics of an AGCM: Phase Space Tendencies. *J. Atmos. Sci.* **62**, 1792-1811 (2003).
- [3] P. CEHELISKY AND K. K. TUNG: Theories of multiple equilibria and weather regimes - a critical reexamination. Part II: Baroclinic two-layer models. *J. Atmos. Sci.* **44**, 3282-3303 (1987).
- [4] J. G. CHARNEY AND J. G. DEVORE: Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking. *J. Atmos. Sci.* **36**, 1205-1216 (1979).
- [5] J. E. GEISLER, M. L. BLACKMON, G. T. BATES, AND S. MUÑOZ: Sensitivity of January climate response to the magnitude and position of equatorial Pacific sea surface temperature anomalies. *J. Atmos. Sci.* **42**, 1037-1049 (1985).
- [6] K. HASSELMANN: Stochastic climate models. Part I. Theory. *Tellus* **28**, 473-485 (1976).

- [7] J. D. HOREL AND J. M. WALLACE: Planetary-scale atmospheric phenomena associated with the Southern Oscillation. *Mon. Wea. Rev.* **109**, 813-829 (1981).
- [8] H. ITOH: Reconsideration of the true versus apparent Arctic Oscillation. *J. Climate* **21**, 2047-2062 (2008).
- [9] M. INATSU, N. NAOTO AND H. MUKOUGAWA: Dynamics and predictability of extratropical wintertime low-frequency variability examined by a stochastic differential equation in a low-dimensional system. *J. Atmos. Sci.*, submitted.
- [10] H. ITOH AND M. KIMOTO: Multiple attractors and chaotic itinerancy in a quasi-geostrophic model with realistic topography: Implications for weather regimes and low-frequency variability. *J. Atmos. Sci.* **53**, 2217-2231 (1996).
- [11] E. KALNEY: *Atmospheric modeling, data assimilation, and predictability*. Cambridge University Press, 2003.
- [12] M. KIMOTO AND M. GHIL: Multiple flow regimes in the Northern-Hemisphere winter. I. Methodology and hemispheric regimes. *J. Atmos. Sci.* **50**, 2625-2643 (1993).
- [13] M. KIMOTO, H. MUKOUGAWA, AND S. YODEN: Medium-range forecast skill variation and blocking transition: A case study. *Mon. Wea. Rev.* **120**, 1616-1627 (1992).
- [14] B. LEGRAS AND M. GHIL: Persistent anomalies, blocking and variations in atmospheric predictability. *J. Atmos. Sci.* **42**, 433-471 (1985).
- [15] E. N. LORENZ: A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *Tellus* **17**, 321-333 (1965).
- [16] H. MUKOUGAWA AND M. HAYASHI: On the influence of tropical intraseasonal oscillation on the predictability of PNA pattern. *Annals of Disas. Prev. Res. Inst.* **52B**, 413-419 (2009) (Japanese).
- [17] K. T. MO AND M. GHIL: Cluster-analysis of multiple planetary flow regimes. *J. Geophys. Res.* **93**, 10927-10952 (1988).
- [18] F. MOLTENI, S. TIBALDI, AND T. N. PALMER: Regimes in the wintertime circulation over Northern Extratropics. I. Observational evidence. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **116**, 31-67 (1990).
- [19] H. MUKOUGAWA: A dynamical model of quasi-stationary states in large-scale atmospheric motions. *J. Atmos. Sci.* **45**, 2868-2888 (1988).
- [20] H. MUKOUGAWA, M. KIMOTO, AND S. YODEN: A relationship between local error growth and quasi-stationary states: Case study in the Lorenz system. *J. Atmos. Sci.* **48**, 1231-1237 (1991).

- [21] M. NEWMAN, P. D. SARDESHMUKH, C. R. WINKLER, AND J. S. WHITAKER: A study of subseasonal predictability. *Mon. Wea. Rev.* **131**, 1715-1732 (2003).
- [22] K. ONOGI, J. TSUTSUI, H. KOIDE, M. SAKAMOTO, S. KOBAYASHI, H. HATSUSHIKA, T. MATSUMOTO, N. YAMAZAKI, H. KAMAHORI, K. TAKAHASHI, S. KADOKURA, K. WADA, K. KATO, R. OYAMA, T. OSE, N. MANNOJI, AND R. TAIRA: The JRA-25 Reanalysis. *J. Meteor. Soc.* **85**, 369-432 (2007).
- [23] T. N. PALMER: Medium and extended range predictability and stability of the Pacific/North American mode. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **114**, 691-713 (1988).
- [24] T. N. PALMER: A nonlinear dynamical perspective on climate prediction. *J. Climate* **12**, 575-591 (1999).
- [25] W. PAUL AND J. BASCHNAGEL: *Stochastic processes: From physics to finance*. Springer, 1999.
- [26] C. PENLAND: Noise out of chaos and why it won't go away. *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **84**, 921-925 (2003).
- [27] C. PENLAND AND L. MATROSOVA: Prediction of tropical Atlantic sea surface temperature using linear inverse modeling. *J. Climate* **11**, 483-496 (1998).
- [28] R. QUADRELLI AND J. M. WALLACE: A simplified linear framework for interpreting patterns of Northern Hemisphere wintertime climate variability. *J. Climate* **17**, 3728-3744 (2004).
- [29] B. B. REINHOLD AND R. T. PIERREHUMBERT: Dynamics of weather regimes: quasi-stationary waves and blocking. *J. Atmos. Sci.* **110**, 1105-1145 (1982).
- [30] P. SURA, M. NEWMAN, C. PENLAND AND P. D. SARDESHMUKH: Multiplicative Noise and Non-Gaussianity: A Paradigm for Atmospheric Regimes? *J. Atmos. Sci.* **62**, 1391-1409 (2005).
- [31] Y. TANG, H. LIN, J. DEROME AND M. K. TIPPETT: A Predictability Measure Applied to Seasonal Predictions of the Arctic Oscillation. *J. Climate* **20**, 4733-4750 (2007).
- [32] D. W. J. THOMPSON AND J. M. WALLACE: Annular modes in the extratropical circulation. Part I: Month-to-month variability. *J. Climate* **13**, 1000-1016 (2000).
- [33] J. M. WALLACE AND D. S. GUTZLER: Teleconnections in the geopotential height field during the Northern Hemisphere winter. *Mon. Wea. Rev.* **109**, 784-812 (1981).
- [34] J. S. WHITAKER AND P. D. SARDESHMUKH: A linear theory of extratropical synoptic eddy statistics. *J. Atmos. Sci.* **55**, 237-258 (1998).
- [35] S. YAMANE AND S. YODEN: Predictability variation and quasi-stationary states in simple non-linear systems. *J. Meteor. Soc. Japan* **75**, 557-568 (1997).