

プラズマのシミュレーション — 流体模型 —

日大 理工 川上 一郎

§ 1. プラズマの流体模型

プラズマとは、一種類以上のイオンと電子 — 場合によっては中性分子 — の集団である。その粒子数は、 1cm^3 中に 10^{10} 個から 10^{17} 個もあり、その個々の粒子を、ニュートンの運動方程式によって追跡することは、不可能である。そこでこの集団を何らかの方法で、統計力学的に取扱う必要が生れてくる。

プラズマの統計力学として、古くから知られているのは、いわゆる BBG-KY^{*}理論である¹⁾。今、 N 個の粒子を考え、 i 番目の粒子の座標を x_i 、速度を v_i とすれば、 N 体分布関数 $f_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t)$ 、 $x_i = (x_i, v_i)$ に対しては、Liouville の方程式

$$\partial f_N / \partial t + \{ f_N, H_N \} = 0$$

が成立つ。 $\{ \}$ は Poisson の bracket で、 H_N は N 個の粒子系の Hamiltonian である。次に、 s 体分布関数を次のように

* Bogoliubov - Born - Green - Kirkwood - Yvon

定義する: V を系の体積として,

$$f_s(X_1, X_2, \dots, X_s; t) \equiv V^s \int dX_{s+1} \dots dX_N f_N.$$

N と V を ∞ にもって行き, $N/V \rightarrow n_0$ (有限) にすれば, Liouville 方程式から, f_s の従う方程式がえられる:

$$\partial f_s / \partial t + \{H_s, f_s\} = n_0 \int dX_{s+1} \left\{ \sum_{i=1}^s \phi_{i,s+1}, f_{s+1} \right\},$$

$\phi_{i,j}$ は, 相互作用項で, 右辺は $s+1$ 体の分布関数を含む。

特に $s=1$ に対する方程式は, Boltzmann の方程式 ($f_1 = f$)

$$\partial f / \partial t + \underline{v} \cdot \partial f / \partial \underline{x} + \underline{E} \cdot \partial f / \partial \underline{v} = (\partial f / \partial t)_{\text{coll}}$$

$$\underline{E} = \frac{e}{m} (\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B})$$

である。右辺の衝突項は, プラズマ・パラメタ $g \sim 10^{-3} \sim 10^{-9}$

の展開の最低次ではおちて, いわゆる Vlasov 方程式を得る。

これらの方程式と Maxwell の方程式 — H_N の中に電磁場を含めておけば, 上述の取扱いで自動的に導出される — によって, プラズマを記述することが出来る。

以上のいわゆる Kinetic theory では, f は $(\underline{x}, \underline{v})$ 空間, すなわち位相空間の量である。問題によっては, f の $\underline{v}$ 依存性は不要で, もっぱら $\underline{x}$ に依存する量 — 密度, 圧力, 温度, 巨視的速度など — だけが必要なことがある。そのような場合には, Boltzmann 方程式に, $\underline{v}$ のべきを乗じて, $\underline{v}$ について積分してしまった方程式 — 輸送方程式²⁾ — を解くことになる。この場合にも, f_s に対する方程式に f_{s+1} が入って来

たように, n 次の f の moment $\int d^3v \overbrace{v v \dots v}^{n \text{ 回}} f$ に対する方程式に, $n+1$ 次以上の moment が入って来る。熱平衡に近いプラズマに対しては, 2次から3次まで取れば十分である。輸送方程式は, 適当に定義された密度・圧力・温度・速度などに対する方程式となり, 通常の中性流体に対する方程式と異なるところはない: すなわち, 諸量は, 時間 t と座標 x に依存し, 方程式は非線型偏微分方程式となる。

現在までに Computer による Simulation になったのは, 主として簡単さのために, Kinetic theory では, 1次元 ^{*}Vlasov 方程式と, 輸送方程式は1次元あるいは2次元の場合にすぎない。それらについて以下に述べる。

§2. 1次元 Vlasov 方程式の数値解法

対象となる方程式は, 適当に無次元化 (dimensionless 化) すれば, 次のように書ける:

$$\begin{cases} \partial f(x, v, t) / \partial t + v \partial f(x, v, t) / \partial x + E(x, t) \partial f(x, v, t) / \partial v = 0 \\ \partial E(x, t) / \partial x = \int_{-\infty}^{\infty} dv f(x, v, t) - 1 \\ \partial E(x, t) / \partial t = - \int_{-\infty}^{\infty} dv v f(x, v, t) \end{cases}$$

あとの E についての2式は, f についての適当な境界条件に対しては, 同等であるために, どちらか一方を使えばよい。

* x について1次元, v について1次元

この方程式の数値解法は、大きくわけて、四つある。

2.1 直接法³⁾

(x, v) 空間を網目にわけて、格子点 $(i\Delta x, j\Delta v)$ にあって、時刻 $n\Delta t$ にある f の値を、 $f_{i,j}^n$ と記す。直接法は、与えられた方程式を、そのまま $f_{i,j}^n$ であらわす。 $f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^n + [v\partial f/\partial x + E\partial f/\partial v]_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t$ および $f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = f_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} + [v\partial f/\partial x + E\partial f/\partial v]_{i,j}^n \Delta t$ の2つの式を交互に使って (leap frog)、時空方向に積分を進める。問題は、 (x, v) 方向の差分のとり方である。Kellogg は、最初次のような差分を用いた:

$$[v\partial f/\partial x]_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = (v_j/2\Delta x) [f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}]$$

これは、 $\Delta t/\Delta x$ を十分小さくとれば安定なはずである* (条件付安定)。しかし、実際にはひどい不安定性をもっていた。

そこで、次のような差分を用いた:

$$[\partial v f/\partial x]_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = (1/2\Delta x) \{ v_{j+\frac{1}{2}} [f_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}] + v_{j-\frac{1}{2}} [f_{i+1,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}] \}$$

これは、 $v\partial f/\partial x$ を保存形 $\partial v f/\partial x$ にして差分を取ったことに相当する。この形は、理論的^{*}にも実際にも安定であった。

$E\partial f/\partial v$ の項は、この形にしたにもかゝらず、不安定であったという。しかし、この不安定性は弱かったので、それほど困らなかったそうである。いずれにせよ、直接法は、あまり易しくはないようである。

* Courant - Friedrichs - Lewy の意味での安定⁴⁾

2.2 特性曲線法^{5,6,7)}

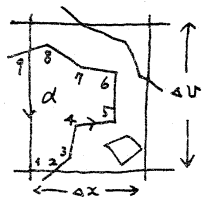
Vlasov 方程式の特性曲線は、Lagrangian 形式と同じく、粒子の運動方程式

$$dx/dt = v, \quad dv/dt = E$$

と同じである。この運動方程式の積分は、数値的不安定性をもたないで、容易に遂行できる（たとえば leap frog で）。

問題は、Maxwell の方程式 $\partial E/\partial x = \int dv f - 1$ の積分である。Stocker⁵⁾ の用いた方法は、数値解法としては、複雑であるので、Roberts-Berk⁷⁾ の方法をのべよう。

(2.1) 平面上に、 f の値の等しい点を結んで、“等高線”を画き、この等高線上の点の運動を追跡する。等高線の間では、 f は一定と考える。ある時刻では、一つの網目の中には、何本かの等高線がありうる。網の系と等高線によってかこま



れた領域では、 f は一定である。この領域は

多角形であるから、頂点に $l = 1, 2, \dots$ と番号

を反時計まわりにつければ、多角形 α につ

いて $\int_\alpha dx dv f = f_\alpha \int_\alpha dx dv = f_\alpha \oint x^\alpha dv^\alpha = f_\alpha \sum_{l=1} \frac{1}{2} (x_{l+1}^\alpha + x_l^\alpha) (v_{l+1}^\alpha - v_l^\alpha)$ と近似できる。

もう一つの方法は、Maxwell の方程式として $\partial E/\partial t$ の式⁶⁾を解く方法である。これについては、ここではのべない。

2.3 Fourier 展開法 ⁸⁾

特性曲線法は、不安定性に関してはずぐれているが、粒子軌道の追跡と本質的には同じであるため、 E に統計的ゆらぎが生ずる。追跡粒子の数を十分多くとれば、ゆらぎは小さくなるが、もともとの Vlasov 方程式は "ならされた" ものであるから、この種のゆらぎは存在しないはずである。この難点⁸⁾は、Fourier 展開法にはない。

分布関数と電界を次のように Fourier 展開をする：

$$F_k(y, t) = (1/L) \int_0^L dx e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{i\gamma v} f(x, v, t)$$

$$E_k(t) = (1/L) \int_0^L dx e^{-ikx} E(x, t)$$

$$K = nK_0, \quad K_0 = 2\pi/L \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

F_k, E_k に対する方程式は、

$$\partial F_k(y, t) / \partial t + K \partial F_k(y, t) / \partial y - \gamma \sum_{q=-\infty}^{\infty} q \neq 0 \frac{F_q(0, t)}{q} F_{k-q}(y, t) = 0$$

$$iK E_k(t) = F_k(0, t), \quad E_0(t) = 0.$$

この形では、 E を求めるのに特別な積分がいらないこと、また F_k の式は、その特性曲線 $dy/dt = K = nK_0$ は直線であることのために dy/dt を K_0 になるようにきめておけば、特性曲線は必ず格子点を通るという利点がある。 n は、

$|n| \leq 2$ ⁸⁾ ぐらいでよいと Knorr は言っているが、問題によることであろう。

2.4 直交関数展開法 ^{9) 10)}

Vlasov 方程式の解析的解法 (もちろん線型近似などの近似解) では, x については Fourier 展開も行なうが, v については普通は行っていない。また, v について Fourier 展開をいふのはならぬ必然性はなく, おしる Maxwell 分布などでは, Hermite 多項式による展開の方が自然である。

⁹⁾ Armstrong は, 次のような展開を行っていい:

$$f(x, v, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inK_0 x} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-v^{1/2}} H_m(v) Z_{nm}(t)$$

$$E(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inK_0 x} E_n(t)$$

H_m は, 適当に定義された Hermite 多項式である。求めねばならぬのは Z_{nm} で, E_n は Z_{nm} によって表わされる:

$$E_0(t) = 0; \quad E_n(t) = i(2\pi)^{1/4} / nK_0 \cdot \text{Re} Z_{0n}(t) \quad (n \neq 0)$$

Z_{nm} に対する方程式は, 常微分方程式で,

$$Z_{0n}(t) + iK_0 n Z_{1n}(t) = 0$$

$$\partial Z_{nm} / \partial t + inK_0 (\sqrt{m} Z_{m-1,n} + \sqrt{m+1} Z_{m+1,n})$$

$$+ i(2\pi)^{1/4} \sqrt{m} / K_0 \cdot \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{Z_{0,n-q}}{n-q} Z_{m-1,q} = 0.$$

Armstrong によると, m については, 1200 項とれば, 十分よい近似となるといふ。(n については $|n| \leq 2$) (x, v) 空間を網目に分けることに比べれば, これは多いとは言えぬが, それにしても, 少ないとは言えない。この真に因りて,

¹⁰⁾ Sadowski は, artificial collision term $(\partial f / \partial t)_{\text{coll}} = \nu_c [$

$\partial(vf)/\partial v + \partial^2 f/\partial v^2]$ を導入して $|m| \leq 99$ でもよい、と言っている。

直交関数系としては、他のものも考えられぬが、実際に行った例はないようである。

§3. 輸送方程式の数値解法

0次、1次、2次の moment までは、²⁾ 輸送方程式は、次の形をもつ：

$$\begin{cases} \partial n / \partial t + \operatorname{div}(n \underline{V}) = 0 \\ mn(\partial / \partial t + \underline{V} \cdot \partial / \partial \underline{x}) V_\alpha = -\partial p / \partial x_\alpha + en(E_\alpha + \frac{1}{c}(\underline{V} \times \underline{B})_\alpha) \\ \quad - \partial \pi_{\alpha\beta} / \partial x_\beta \pm R_\alpha \\ (3/2)n(\partial / \partial t + \underline{V} \cdot \partial / \partial \underline{x})T + p \operatorname{div} \underline{V} \\ \quad = -\operatorname{div} \underline{q} - \pi_{\alpha\beta} \partial V_\alpha / \partial x_\beta + Q \end{cases}$$

これは、それぞれ連続の方程式、運動方程式、状態方程式である。nは密度、 $\underline{V}$ は速度、pは圧力、Tは温度などについては明きらかである。特にQ、 $\underline{R}$ は、衝突項から出て来たものであることを注意しておく。これらの式は、イオンや電子などの各々の種類に対して成立つものである。熱平衡に近いときは、3次までで十分であるが、そうでないときには、もっと高次の moment まで必要となる。

上の形を変形して、質量、運動量、エネルギーの保存則の

形に書いて，体積積分をすると，次の形の式を得る：

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int dV \rho &= - \int d\Omega \rho \underline{V} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int dV \rho \underline{V} &= - \int d\Omega \left[\rho + \frac{B^2}{8\pi} \right] \underline{V} - \int d\Omega \cdot \left(\rho \underline{V} \underline{V} + \frac{B \underline{B}}{4\pi} \right) + \int dV \underline{\Pi} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int dV \left(\frac{1}{2} \rho \underline{V}^2 + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{B^2}{8\pi} \right) \\ &= - \int d\Omega \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho \underline{V}^2 + \frac{\partial p}{\partial-1} \right) \underline{V} + \frac{1}{4\pi} (\underline{E} \times \underline{B}) \right] + \int \varepsilon dV \end{aligned} \right.$$

空間を cell に分け，体積積分も各 cell について行なうことにする。この形で差分に直すと，差分方程式でも物理量の保存が保証される。すなわち面積積分の項は，隣り合った cell 間の物理量の受け渡しを保証することからである。

特に 1 次元の場合には，上に書いた Euler 型方程式よりも，Lagrangean 形式の方程式の方がすぐれている。それは，オ 1 に Lagrangean では，物理量の保存が成立つ形になっていること，オ 2 に，不安定性のおこりやすい $\underline{v} \cdot \partial / \partial \underline{x}$ の項がないためである。2 次元以上になると，“turbulent”な状態になることがあるため，必ずしも Lagrangean 形式が良いとは言えない。“turbulent”にならなければ，Lagrangean 形式がすぐれていることは，通常言えることである。Lagrange 形式がそのまま使いにくいような 2 次元以上の問題には，Euler 形式と混合した方法が考案されている。¹¹⁾

問題によっては，上述の artificial collision term の如く，

もとの微分方程式には含まれていないような輸送係数を含む項をつけ加えて、目的に合致した解をえらび出す方法をこうしなければならない。昔から用いられたものとして、衝撃波を simulate するためには、artificial viscosity⁴⁾を導入しなければならないことが知られている。

文献

- 1) たとえば D. C. Montgomery and D. A. Tidman : Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill, 1964
- 2) たとえば Braginskii : Reviews of Plasma Physics Vol 1.
- 3) Kellogg : Phys. Fluids 8 102 (1965)
- 4) たとえば Richtmyer : Difference Methods for Initial Value Problems, Interscience, 1957
- 5) Stocker : Dissertation, Culham Lab. 1958
- 6) Knorr : Dissertation, Max Planck Inst. 1963
- 7) Roberts and Berk : Phys. Rev. Lett. 19 297 (1967)
- 8) Knorr : Zeits. f. Natf. 18a 1304 (1963)
- 9) Armstrong : Dissertation, Univ. Iowa, 1966
- 10) Sadowsky : Proc. Symp. on Computer Simulation of Plasma.
- 11) Alder ed. : Methods in Computational Phys. vol. 3, Academic Press, New York 1964