

Δ^+ , Δ_{ret} 等の一般化のころみ

京大・物理 南 政 次

§ 1 はじめに

§ 2 基本微分型式

§ 3 Källén 函数を導くこと

§ 4 遅延函数その他

§ 5 遅延(先行)函数を別の方法で記述すること

§ 6 おわりに

§ 1 はじめに

量子論を特徴づける最も基本的な公準は物理量の間の交換関係であるが、これがいわゆる古典力学の正準形式を典型にして対応論的に携えられている限り、必ずしも相対論の要請には適っていないわけであつて、これを相対論的に共変な型式に書きかえることが、場の理論の初期の一つの課題であつた。1929年 Jordan と Pauli は相互作用のない場について次の様な不変デルタ函数と呼ばれる量を持ち込むことによつて交換関係の一般化を果した。

$$\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 q \exp[-i q \cdot x] \delta(q \cdot q - \mu^2) \epsilon(q) \quad (1.1)$$

ここで, $i = \sqrt{-1}$. $x \equiv (x^0, \bar{x}) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$,

$q \equiv (q^0, \bar{q}) \equiv (q^0, q^1, q^2, q^3)$ は夫々位置, 運動量を示す 4 元ベクトルで, 特に x^0 , q^0 は夫々時間, エネルギー成分である。又内積 $q \cdot x$ などは $q \cdot x = q^0 x^0 - \bar{q} \cdot \bar{x} = q^0 x^0 - q^1 x^1 - q^2 x^2 - q^3 x^3$ などと定めるものとする。 $\delta(q \cdot q - \mu^2)$ はいわゆる

Dirac のデルタ函数, $\epsilon(q)$ は

$$\epsilon(q) = \begin{cases} 1 & \text{for } q^0 > 0 \\ -1 & \text{for } q^0 < 0 \end{cases}$$

なる sign 函数である。

実際、今 $\varphi(x)$ を

$$(\square + \mu^2)\varphi(x) = 0$$

を満す、実スカラーな場の演算子とする。但し $\square$ はダランベール演算子、(物理的には $\varphi(x)$ は相互作用をもたない電気的中性な自由場で、 μ は場の表わす粒子の質量になる。) ところで、量子論における交換関係に相当するもの(つまり同一時刻における)は $(AB - BA \equiv [A, B])$ と書く)

$$\left[\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^0}, \varphi(y) \right]_{x^0=y^0} = -i \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_{x^0=y^0} = 0$$

$$\left[\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^0}, \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y^0} \right]_{x^0=y^0} = 0$$

である。 $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^0}$ が、 $\varphi(x)$ の正準共役な演算子になっている。一方、 $\varphi(x)$ は $A(x)$ を使うと

$$\varphi(x) = - \int_{x^0=y^0} d^3\vec{y} \left\{ \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y^0} A(x-y) + \varphi(y) \frac{\partial A(x-y)}{\partial x^0} \right\}$$

と書けることが証明出来る。但し積分は $x^0=y^0$ 内の全ての点 y について行われるものとする。(つまり $x^0=y^0$ における $\varphi(y)$, $\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y^0}$ の値を知つて任意の点 x における $\varphi(x)$ を出すことになっている。) この表示を利用すれば直ちに

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = i A(x-y) \quad (1.2)$$

なる Lorentz 不変な交換関係を得ることが出来るわけである。

特に $A(x)$ は $x \cdot x < 0$ (空間的という)で、消えるから、 $\varphi(x)$ と $\varphi(y)$ は x と y が空間的な場合、可換となるわけである。物理的には因果がない(独立)ということである。

上の方法は相互作用を考慮すると破綻するが相互作用の入った場合の共変な形式の一つとして Feynman の理論があつて、これは簡単に言えば共変な自由場で展開するという考え方に立つといつてよい。その場合、Feynman の不変デルタ函数と呼ばれる $A_F(x)$ が基本的な役割を果す：

$$d_F(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \bar{p}}{2\sqrt{\bar{p}^2 + \mu^2}} \exp[-i(\sqrt{\bar{p}^2 + \mu^2} \cdot |x^0| - \bar{p} \cdot \bar{x})] \quad (1.3)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \exp[-i p x] \left\{ \frac{\mathcal{P}}{p \cdot p - \mu^2} - i\pi \delta(p \cdot p - \mu^2) \right\} \quad (1.3)'$$

($\mathcal{P}$: Cauchyの主値)

(1.3)で x^0 が $|x^0|$ と入っているのが重要で、これはFeynmanの陽電子理論に根ざしたものである。

後に、Feynmanのpropagator $d_F(x)$ を使わずに、たとえば真空偏極の計算が、簡単にしかももつと直接になされた。(Källénなど)これは本質的に次の様な $d^{(1)}(x)$ と遅延(先行)^{*}デルタ函数、 $d_{\text{ret}}(d_{\text{adv}})$ を巧みに使うものである。

$$d^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \exp[-i p \cdot x] \delta(p \cdot p - \mu^2) \quad (1.4)$$

$$d_{\text{ret}}^{\text{adv}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \exp[-i p \cdot x] \left\{ \frac{\mathcal{P}}{p \cdot p - \mu^2} \mp i\pi \delta(p \cdot p - \mu^2) \epsilon(p) \right\}, \quad (1.5)$$

“遅延(先行)”^{*}ということは $x \cdot x > 0$, $x^0 < 0$ ($x^0 > 0$)で $d_{\text{ret}}=0$, ($d_{\text{adv}}=0$)ということから来ている。(因果的)。これは、いわゆる“分散公式”による理論と密接に関係がある。

Feynman-Schwingerの方法は相互作用場をいわゆる摂理論で解くということであつて、勿論収束性その他で問題がある。ところで、現在の場の理論がこれ以上に本質的に進んでいるかどうかは別として、この延長上にあつて、又後のいわゆる公理的な場の理論への橋渡しとしての重要な発展(50年代)はKällénとLehmannによる積分表示による理論である。今、時空点 x と y に夫々異なる粒子があつてそれらは互いに場 ϕ によつて媒介される相互作用をしているものとする。その時、基本的な量として

$$W_2(x-y) = (\Psi_0, \phi(x)\phi(y)\Psi_0) \quad (1.6)$$

を採ることが出来る。 Ψ_0 は真空をあらわす状態ベクトルである。簡単にいえば(1.6)は、 y で真空から ϕ -粒子が発生し、 x で ϕ -粒子が消滅する伝播函数である。 $\phi(x)$ は次の方

* retarded ** advanced

程式 (ハイゼンベルク方程式) をみたすものとする:

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} = i [\phi(x), P^\mu]$$

又は,

$$\phi(x) = \exp[iP \cdot x] \phi(0) \exp[-iP \cdot x] \quad (1.7)$$

但し, P^0 は相互作用も含めたハミルトニアン。(1.6)の右辺を射影演算子によつて中間状態 ψ_q (但し ψ_1 の P^μ の固有状態で, 完全系をなすとする) を入れ (1.7) を用いると,

$$W_2(x-y) = \int d^4 q \exp[-i q(x-y)] |(\psi_0, \phi(0) \psi_q)|^2$$

となり, 更に

$$\rho(q) = (2\pi)^3 |(\psi_0, \phi(0) \psi_q)|^2$$

とおくと

$$W_2(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 q \rho(q) \exp[-i q \cdot (x-y)].$$

ψ_q は "物理的" である筈だから $q \cdot q > 0$ (時間的) に加えて $q^0 > 0$ であると考え。 (以後, この条件を示す時, $q \in V^+$ とする。) すると $\theta(q) = \frac{1}{2} (1 + \epsilon(q))$ によつて

$$W_2(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 q \rho(q^2) \theta(q) \exp[-i q(x-y)]$$

と書くとよく, 又

$$= i \int d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta^+(x-y, \mu^2) \quad (1.8)$$

と書ける。但し

$$\Delta^+(x; \mu^2) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4 q \exp[-i q \cdot x] \delta(q \cdot q - \mu^2) \theta(q) \quad (1.9)$$

もし, $\rho(\mu^2) = \delta(\mu^2 - \mu_0^2)$ なら自由場に還る。

1956年Wightman は (1.6) を一般化した真空期待値

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = (\psi_0, \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \psi_0) \quad (1.10)$$

が場の理論の最も基本的な量とした。一場の理論の要請をこれに押し込めることも出来るし,

逆にWightman 函数を与えると場の理論は一義的にきまつてしまう, 云々。従つて, W_n のいろいろな性質, たとえば解析性を調べる事等が次の問題になるわけだが, その中で58

年KällénとWilhelmsson は (1.8) を一般化して

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = (i)^n \int \prod_0^\infty da_{\kappa\ell} G(a_{\kappa\ell}) \Delta_n^+(\xi_\kappa, \mu_{\kappa\ell}^2)$$

と考え — 但し

$$\Delta_n^+(\xi_\kappa, u_{\kappa l}^2) = \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n}} \int \dots \int d^4 p_1 \dots d^4 p_{n-1} \times$$

$$\times \exp\left[-i \sum_{\kappa=1}^{n-1} p_\kappa x_\kappa\right] \prod_{\kappa=1}^{n-1} \delta(p_\kappa^2 - u_{\kappa l}^2) \prod \theta(p_\kappa) \quad (1.11)^*)$$

W_n の状態を Δ_n^+ から得ることを提唱した。(実際に Källén はのちに $n=4$ の場合についてこのやり方で $W_4(\xi)$ の解析性を部分的に調べた。一般的には未解決。 $n=3$ の場合については direct に解けている。)

扱て、 $n=2$ の場合に戻つて、今迄にいろいろと得た不変デルタ函数の表示は積分路を実軸にとつて、被積分函数をいろいろ変えているわけだがその双対をとつて

$$\Omega(z) = \frac{\exp[-i q \cdot x]}{q \cdot q - \mu^2} \quad (1.12)$$

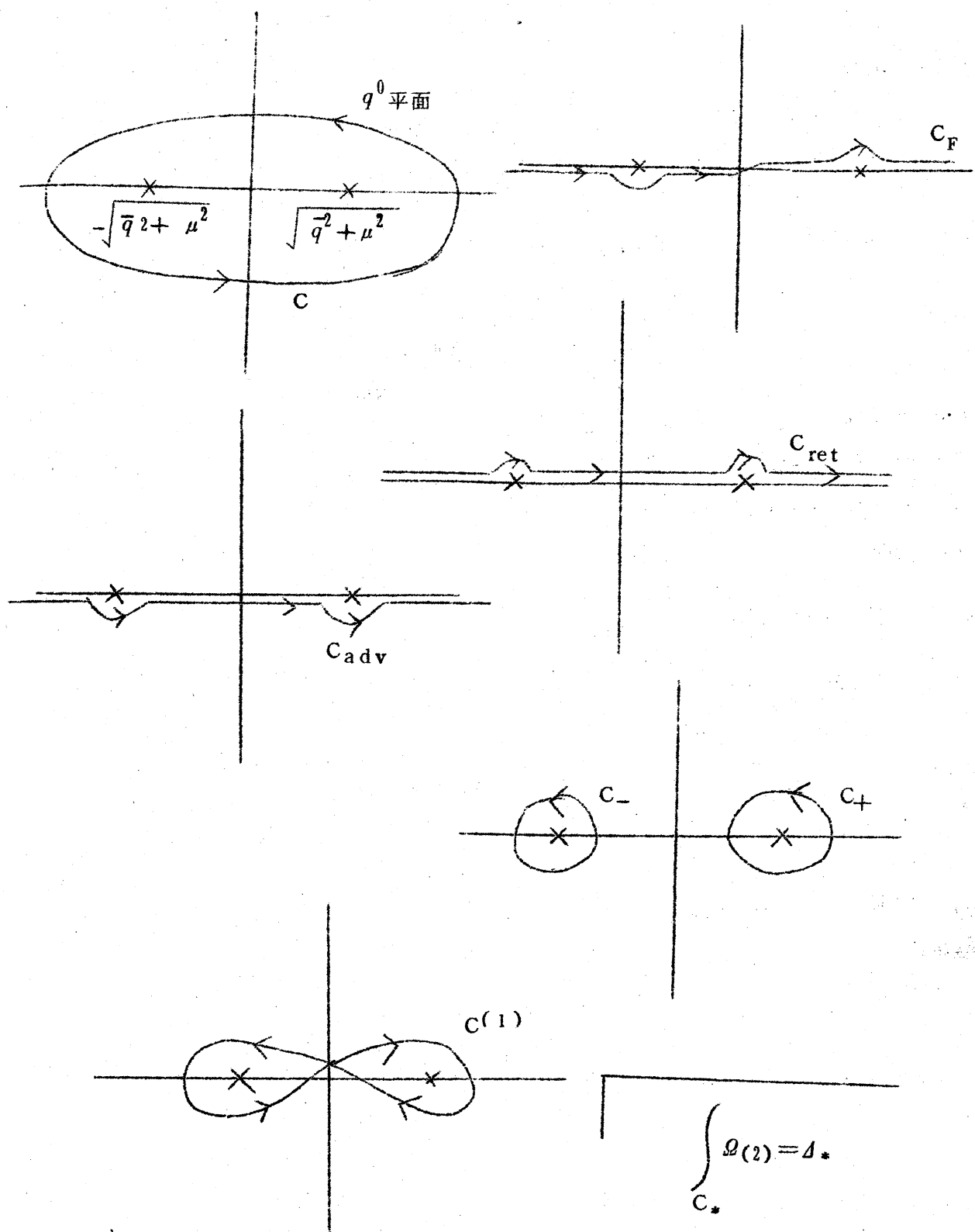
を適当な積分路 (q^0 -平面) で積分しても、全ての Δ 函数が出てくることが知られている。

(下図参照) この表示によるとデルタ函数相互間の関係が積分路の関係に帰着するし、夫々の性質も積分路に還元出来ることになる。たとえば $\Delta_{\text{ret}}(x)$ が、 $x \cdot x > 0$, $x_0 < 0$ で消えることは、 $x_0 < 0$ では (1.12) が q^0 -平面の上半面で analytic だから C_{ret} は上半面で半円を画くと考えられ、極を中に含まないから 0 にホモログになることからわかる。同様に $x_0 > 0$ ($x_0 < 0$) で Δ_F が Δ^+ (Δ^-) になることも容易に判る。

我々の目的は、この考えを多点デルタ (特異) 函数 — たとえば (1.11) — にも適用しようということである。

N. B. ときに、 Δ , $\Delta^\pm$, $\Delta^{(1)}$ などを homogeneous なデルタ函数と云い、 Δ_{ret} , Δ_{adv} , Δ_F 等を inhomogeneous なデルタ函数と云うことがある。それはダランベール演算子 $\square$ を作用させた場合、消えるか $\delta^4(x)$ を残すかに依る。 q^0 平面での積分路をみると、homogeneous なものはコンパクトに局在しているが、inhomogeneous なものは積分路が無限遠点に延びている。

*) 以下でこの種の Δ 函数を Källén 函数と呼ぶ。



§ 2 基本微分型式

1° 位置ベクトル $x_i = (x_i^0, x_i^1, x_i^2, x_i^3)$ $i = 1, 2, \dots, n$ で張る $4n$ 次元空間を X^n とする。 x_i の内積は

$$x_i \cdot x_i = x_i^0 x_i^0 - x_i^1 x_i^1 - x_i^2 x_i^2 - x_i^3 x_i^3$$

と定める。 x_i^0 は時間成分である。 Z^{n-1} は等値関係

$$x_i - x_{i+1} = x'_i - x'_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

による X の商空間とする。(とくに $\xi_i \equiv x_i - x_{i+1}$ とおく) 運動量ベクトル $q_i = (q_i^0, q_i^1, q_i^2, q_i^3)$ $i = 1, 2, \dots, n$ で張る空間を Q^n とする。 q_i の内積は

$$q_i \cdot q_i = q_i^0 q_i^0 - q_i^1 q_i^1 - q_i^2 q_i^2 - q_i^3 q_i^3$$

と定める。 q_i^0 はエネルギー成分である。 $\tilde{Q}^{n-1}$ は

$$\{q : q_1 + q_2 + \dots + q_n = 0\}$$

なる Q^n の部分空間とする。 X^n と Q^n の内積は

$$\sum_i^n q_i \cdot x_i = \sum_i^n (q_i^0 x_i^0 - q_i^1 x_i^1 - q_i^2 x_i^2 - q_i^3 x_i^3)$$

だが, これは $\tilde{Q}^{n-1} \times Z^{n-1}$ では

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (q_1 + q_2 + \dots + q_i) \xi_i$$

I を 1 から n 迄の整数の全ての部分集合とする。その時 q_I を次の様に定義する。

$$M(\mathcal{J}) : q_I = \sum_{i \in I} q_i \quad (2.1)$$

但し, $\sum_{i \in I}$ は I に含まれている全ての整数 i についての和, 更に y_I を次の式によつて導入する。

$$\sum_{i \in I} y_I = x_i - x_n \quad \text{for given } i \quad (2.2)$$

但し, $\sum_{I \ni i}$ は与えられた i を含む全ての I についての和を意味する。

すると

$$\sum_i q_i \cdot x_i = \sum_I q_I \cdot y_I$$

2° (1.1.1) に鑑みて, また x_i のいろいろな置換を考慮に入れて (1.1.2) の一般化されたものは次の様であるとする:

$$\Omega_{(n)} = \omega_{(n)} \exp(-i \sum_I q_I y_I) \quad (2.3)$$

$$\omega_{(n)} = \frac{\prod_I d^4 q_I}{\prod_I (q_I \cdot q_I - a_I) \prod d^4 (q_I - \sum_{i \in I} q_i)} \Big|_{M(\mathcal{G})} \quad (2.4)$$

注意：suffix を I としたのは， x_i の置換を考慮に入れたからであつて，Källén の suffix の採り方とは異なる。

ところで， $\{q_I\}$ の次元は $2^{n-1}-1$ ，一方 q_i による内積の数は $n(n-1)/2$ ，従つて

$$S_I : q_I \cdot q_I - a_I = 0$$

として $\bigcap_I S_I \cap M(\mathcal{G})$ は大抵の場合消える。とくに， $n=2, 3$ の場合は $2^{n-1}-1 = n(n-1)/2$ となるが， $n=4$ では一般に

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_{12} \cap S_{23} \cap S_{31} \cap S_{123} = 0$$

である。

最後に， $S_I \cap M(\mathcal{G})$ の集合を考える場合， $\tilde{O}^{n-1}$ 空間の座標を適当にとることによつて，たとえば

$$q_i^\mu = 0 \quad i \leq \mu$$

とすることが出来ることに注意しておく。時にこの部分空間を $\mathcal{M}$ と称える。

§3 Källén 函数を導くこと

次の段はいろいろな積分路を導入することだが，この節では特に Kallen 函数に相当した特異函数を導出するべく $\tilde{O}^{n-1}$ 上のホモロジーを，特に $n=3, 4$ の場合について考察する。

1° $n=3$ の場合

我々の与えた基本微分型式は，この場合

$$\Omega_{(3)} = \omega_{(3)} \exp[-i q_1 y_1 - i q_2 y_2 - i q_{12} y_{12}]$$

但し

$$\omega_{(3)} = \frac{d^4 q_1 \wedge d^4 q_2 \wedge d^4 q_{12}}{\prod_I (q_I \cdot q_I - a_I) d^4 (q_{12} - q_1 - q_2)} \Big|_{M(12)}$$

y は x によつて

$$y_1 + y_{12} = x_1 - x_\xi (= \xi_1 + \xi_2)$$

$$y_2 + y_{12} = x_2 - x_3 (= \xi_2)$$

である。（ y_1, y_2, y_{12} の内一つは redundant）

補題: S_1, S_2, S_{12} が $M(12): q_{12} - q_1 - q_2 = 0$

上で一般の位置にあるための必要十分条件は

$$\lambda_3(a_1, a_2, a_{12}) \equiv a_1^2 + a_2^2 + a_{12}^2 - 2a_1a_2 - 2a_1a_{12} - 2a_2a_{12} \neq 0 \quad (3.1)$$

$$a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_{12} \neq 0$$

で与えられる。(証明略)

ところで $\mathcal{M}$ 上で, $S_1 \cap S_2 \cap S_{12}$ は 0 次元になり

$$(q_1^0)^2 = a_1, \quad q_2^0 = \frac{a_{12} - a_1 - a_2}{2q_1^0}, \quad (q_2^1)^2 = \frac{\lambda_3(a_{12}, a_1, a_2)}{4a_1} \quad (3.2)$$

と解ける。 $\lambda_3(a_{12}, a_1, a_2) < 0$ の場合, 実の intersection はなく, q_i はユークリッドベクトルになる。

定義: a_1, a_2, a_{12} の内 2 つ a_κ, a_ϵ が実かつ正, そして残りの a_m が実, 最後に $\lambda(a_\kappa, a_\epsilon, a_m) > 0$ である時 $\{a\}$ は (κ, ϵ) -physical 領域にあると称える。

$\{a\}$ を (κ, ϵ) -physical 領域に閉じ込めておいて, 次の実 manifold を定義する。

$$s_j^\pm: q_j q_j - a_j = 0, \quad q_j^0 \geq 0, \quad j = \kappa, \epsilon \quad (3.3)$$

$$s_j: q_j \cdot q_j - a_j = 0, \quad j = m$$

すると, 例えば $\{a\}$ が $(1, 12)$ -physical 領域にある時

$$s_1^+ \cap s_{12}^+ \cap s_2$$

が存在する。そこで, これによつて generate されるホモロジー類を $h^{++}(s_1 \cap s_{12} \cap s_2)$ と記すことにする。他の場合も同様である。

次に δ を Leray の双対境界作用素とする。 $\delta^3 h^{++}(s_1 \cap s_{12} \cap s_2)$ は $\tilde{Q}^2 - s_1 \cup s_{12} \cup s_2$ 上のホモロジー類である。

実際, あとで示す様に $\mathcal{Q}_{(3)}$ を $\delta^3 h^{++}(s_1 \cap s_{12} \cap s_2)$ 上で積分すれば Källén の $A_3^+(x_1, x_2, x_3; a)$ に本質的に等しいものが得られる。

$$\text{定義: } K_3(x_1 x_2 x_3 | a_1 a_{12}; a_2)$$

$$\equiv \langle \delta^3 h^{++}(s_1 \cap s_{12} \cap s_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \quad (3.4)$$

とする。ここで x_1, x_2, x_3 の並びは次の手順で順序づけられているとする: $\{a\}$ が

(1, 12) - physical 領域にあることから q_2 は q_1, q_{12} であらわされていると考え

($q_2 = q_{12} - q_1$) , $\mathcal{Q}_{(3)}$ の exponential 因子を

$$\mathcal{Q}_{(3)} = \omega_{(3)} \exp[-i q_1 (x_1 - x_2) - i q_{12} (x_2 - x_3)]$$

と並べた時の $\{x\}$ の並び $x_1 - x_2, x_2 - x_3$ に依る。この定義によつて、以下の様に x_1, x_2, x_3 を置換した 6 個の K_3 が得られる。

$$\begin{aligned} K_3(x_1 x_2 x_3 | a_1 a_2; a_2) &= \langle \delta^3 h^{++}(S_1 \cap S_{12} \cap S_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \\ K_3(x_1 x_3 x_2 | a_1 a_2; a_{12}) &= \langle \delta^3 h^{+-}(S_1 \cap S_2 \cap S_{12}), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \\ K_3(x_3 x_1 x_2 | a_{12} a_2; a_1) &= \langle \delta^3 h^{--}(S_{12} \cap S_2 \cap S_1), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \\ K_3(x_2 x_1 x_3 | a_2 a_{12}; a_1) &= \langle \delta^3 h^{++}(S_2 \cap S_{12} \cap S_1), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \\ K_3(x_2 x_3 x_1 | a_2 a_1; a_{12}) &= \langle \delta^3 h^{+-}(S_2 \cap S_1 \cap S_{12}), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \\ K_3(x_3 x_2 x_1 | a_{12} a_1; a_2) &= \langle \delta^3 h^{--}(S_{12} \cap S_1 \cap S_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

勿論夫々の $\{a\}$ の領域は限られている： $K_3(x_1 x_2 x_3 | a_1 a_{12}; a_2)$ の場合、もし $a_2 < (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_{12}})^2$ でなければ

$$K_3(x_1 x_2 x_3 | a_1 a_{12}; a_2) = 0$$

証明 $\mathcal{M}$ 上で解くと、 $2q_1^0 q_{12}^0 = a_{12} + a_1 - a_2 > 0$

かつ $\lambda_3(a_1 a_{12} a_2) > 0 \quad \therefore a_{12} + a_1 - a_2 > 2\sqrt{a_1 a_{12}}$.

(明らかに $K_3(x_3 x_2 x_1 | a_{12} a_1; a_2)$ は同じ台をもつ)

それでは $K_3(x_1 x_2 x_3 | a_1 a_{12}; a_2)$ 等が $\mathcal{A}_3^+(x_1 x_2 x_3; u^2)$ 等とみなされること：

$$K_3(x_1 x_2 x_3 | a_1 a_{12}; a_2)$$

$$= \int \frac{\exp[-i q_1 (x_1 - x_2) - i q_{12} (x_2 - x_3)] d^4 q_1 \wedge d^4 q_{12}}{(q_1^0 \cdot q_1 - a_1)(q_{12}^0 \cdot q_{12} - a_{12})((q_{12} - q_1)^0 (q_{12} - q_1) - a_2)} \times \delta^3(s_1^+ \cap s_{12}^+ \cap s_2)$$

ここで Leray の留数公式を使うと

$$\begin{aligned} &= (2\pi i)^3 \int \frac{\exp[-i q_1 (x_1 - x_2) - i q_{12} (x_2 - x_3)]}{(q_1^0 + \sqrt{q_1^2} + a_1)(q_{12}^0 + \sqrt{q_{12}^2} + a_{12})} \times \\ &\quad s_1^+ \cap s_{12}^+ \cap s_2 \\ &\times \frac{d^4 q_1 \wedge d^4 q_{12}}{d(q_1^0 - \sqrt{q_1^2} + a_1) \wedge d(q_{12}^0 - \sqrt{q_{12}^2} + a_{12}) \wedge d((q_{12} - q_1)^0 (q_{12} - q_1) - a_2)} \end{aligned}$$

これを δ -関数で表示すると

$$= \int d^4 q_1 d^4 q_{12} \exp[-i q_1 (x_1 - x_2) - i q_{12} (x_2 - x_3)] \times \\ \theta(q_1) \delta(q_1 q_1 - a_1) \theta(q_{12}) \delta(q_{12} q_{12} - a_{12}) \delta((q_{12} - q_1)(q_{12} - q_1) - a_2)$$

となる。但し、次の公式を使った

$$\frac{1}{q^0 + \sqrt{\vec{q}^2 + a}} \delta(q^0 - \sqrt{\vec{q}^2 + a}) \\ = \delta((q^0)^2 - (\vec{q})^2 - a) \theta(q^0)$$

Källén の表示と identifyさせるには

$$q_1 \rightarrow p_1, \quad q_{12} \rightarrow p_2 \\ a_1 \rightarrow \mu_{11}^2, \quad a_{12} \rightarrow \mu_{22}^2 \\ a_2 \rightarrow \mu_{22}^2 + \mu_{11}^2 - 2\mu_{12}^2$$

と置き換えればよい。

6 個の K_3 は Wightman 3 点関数 $\mathcal{W}_3(x_1 x_2 x_3)$ で場の演算子を置換した 6 個の Wightman 関数に対応している。そして (κ, ι) -physical ということは Wightman 関数を中間状態で分けていつたとき中間状態が“物理的”ということに対応している：

$$\int (\psi_0, \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \psi_0) \\ = d q_1 d q_{12} (\psi_0, \phi(x_1) \psi_{q_1}) (\psi_{q_1}, \phi(x_2) \psi_{q_{12}}) \times \\ \times (\psi_{q_{12}}, \phi(x_3) \psi_0)$$

(1.7) 式を使つて

$$= \int d q_1 d q_{12} \exp[-i q_1 (x_1 - x_2) - i q_{12} (x_2 - x_3)] \times \\ \times (\psi_0, \phi(0) \psi_{q_1}) (\psi_{q_1}, \phi(0) \psi_{q_{12}}) (\psi_{q_{12}}, \phi(0) \psi_0) \quad (3.6)$$

$\psi_{q_1}, \psi_{q_{12}}$ は物理的な中間状態だから $q_1^0 > 0, q_1 q_1 > 0$

(d.h. $q_1 \in V^+$), $q_{12}^0 > 0, q_{12} q_{12} > 0, (q_{12} \in V^+)$ (時間的でエネルギーは正), これが $K_3(x_1 x_2 x_3 | a)$ に抽出されているわけである。

2° $n=4$ の場合

この場合は、 S_1 の数 (7 個) と不変量 $q_i \cdot q_j$ の数 (6 個) の異なる最初の場合である。

$$\mathcal{Q}_{(4)} = \frac{\exp[-i q_1 \gamma_1 - i q_2 \gamma_2 - i q_3 \gamma_3 - i q_{12} \gamma_{12} - i q_{23} \gamma_{23} - i q_{31} \gamma_{31} - i q_{123} \gamma_{123}]}{\prod_I (q_I \cdot q_I - a_I)} \times$$

$$\times \frac{d^4 q_1 \wedge d^4 q_2 \wedge d^4 q_3 \wedge d^4 q_{12} \wedge d^4 q_{23} \wedge d^4 q_{31} \wedge d^4 q_{123}}{d^4 (q_{12} - q_1 - q_2) \wedge d^4 (q_{23} - q_2 - q_3) \wedge d^4 (q_{31} - q_3 - q_1) \wedge d^4 (q_{123} - q_1 - q_2 - q_3)}$$

(3.7)

$s_j^\pm$, s_j 等の定義, (κm) -physical 領域の定義も $n=3$ の場合に準じて与えるものとする。その際, 不変量の数は6であるから7つの S_I の内6個の intersection のホモロジ-類から出発するが, だから $n=3$ の場合の $\lambda_3 > 0$ に代つて, どの6個の S_I の intersection も空でないという条件を与えておかねばならない。

この様にして, 例えば

$$s_1^+ \wedge s_{12}^+ \wedge s_{123}^+ \wedge s_2 \wedge s_{23} \wedge s_3$$

によつて generate されるホモロジ-類を

$$h^{+++}(S_1 \wedge S_{12} \wedge S_{123} \wedge S_2 \wedge S_{23} \wedge S_3)$$

などとする。

実際 Källén の $\Delta_4^+(x_1 x_2 x_3 x_4; u^2)$ を与える類は

$$\delta^6 h^{+++}(S_1 \wedge S_{12} \wedge S_{123} \wedge S_2 \wedge S_{23} \wedge S_3)$$

である。但し, Δ_4^+ と違つて $\mathcal{Q}_{(4)}$ に

$$\frac{1}{q_{13} \cdot q_{13} - a_{13}}$$

という因子があるために

$$\frac{1}{a_{123} + a_1 + a_2 + a_3 - a_{12} - a_{23} - a_{31}}$$

という極型の因子だけが余計にかかることになる。 $\{a_I\}$ 空間における特異 manifold は勿論これだけでなく

$$\lambda_4(a_1 a_2 a_3 a_{12} a_{23} a_{123})$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 2a_1 & a_{12}-a_1-a_2 & a_{13}-a_1-a_3 \\ a_{12}-a_1-a_2 & 2a_2 & a_{23}-a_2-a_3 \\ a_{13}-a_1-a_3 & a_{23}-a_2-a_3 & 2a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

と λ_4 の argument の内 $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{23}, a_{123}$ を

$$a_{13} + a_{32} + a_{21} - a_1 - a_2 - a_3 - a_{123} = 0 \quad (3.9)$$

の式によつて置き換えて得る6個の $\lambda_4 = 0$ 等がある。(その他, 部分的な $\lambda_3 = 0, a_1 = 0$ など)これらは $\{S_I\}$ が, 一般の位置にないという条件になつている。

最後に, 24 個の K_4 の内 — それらが三つの集団に分かれるので, — 代表的に三つ与えておく。

$$\begin{aligned} K_4(x_1 x_2 x_3 x_4 | a_1 a_2 a_{123}; a) &\leq \delta^6 h^{+++}(S_1 \cap S_{12} \cap S_{123} \cap S_2 \cap S_{23} \cap S_3), \mathcal{Q}_{(4)} > \\ K_4(x_2 x_3 x_1 x_4 | a_2 a_{23} a_{123}; a) &\leq \delta^6 h^{+++}(S_2 \cap S_{23} \cap S_{123} \cap S_1 \cap S_{13} \cap S_3), \mathcal{Q}_{(4)} > \\ K_4(x_1 x_3 x_2 x_4 | a_1 a_{13} a_{123}; a) &\leq \delta^6 h^{+++}(S_1 \cap S_{13} \cap S_{123} \cap S_2 \cap S_{21} \cap S_3), \mathcal{Q}_{(4)} > \end{aligned}$$

§4 遅延函数その他

この節では特に $n=3$ の場合について Leray の双対輪体の類 $\delta^3 h$ とは違つた類に属するホモロジー類を導入して, 遅延性(先行性)をもつた distribution を構成する。これは $n=2$ の場合の inhomogeneous な場合に相当する。(K_3 は homogeneous)

尚, この節では $n=3$ の場合のみ考慮するので $q_3 \equiv -q_{12}$ として, q_1, q_2, q_3 を対称に扱う。 $a_1, a_2, a_3 (=a_{12})$ は実で正とする。

定義: $r_{\pm\pm}(q_1, q_2)$ を夫々その台を $\mathcal{U}_{\pm\pm}(q_1, q_2)$ においている (かつその虚部は固定されている) ところの 2×4 次元の閉輪体とする。

但し $\mathcal{U}_{\pm\pm}(q_1, q_2)$ は $I_m q_1 \in V^\pm, I_m q_2 \in V^\pm$ を base とする管領域 (tube domain) のことである。

すると例えば次の結果を得る。

$$\begin{aligned} R_3(x_3; x_1 x_2 | a_1 a_2; a_3) \\ \equiv \langle r_{--}(q_1, q_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \end{aligned} \quad (4.1)$$

は, もし

$$x_3 - x_2 \in V^+ \quad \text{かつ} \quad x_3 - x_1 \in V^+ \quad (4.2)$$

でなければ消える。(注意: R_3 は勿論 distribution の意味で定義されている。恐ら

＜ K_3 の場合より強い testing 函数で smear out しておかねばならない。）

証明： $\mathcal{Q}_{(3)}$ を

$$\mathcal{Q}_{(3)} = \omega_{(3)} \exp[i(x_3 - x_1)q_1 + i(x_3 - x_2)q_2]$$

と並べると判る様に、もし $x_3 - x_1 \in V^+$ でないなら $e \in V^+$ なる 4-ベクトル e が存在して $(x_3 - x_1) \cdot e < 0$ と出来るから $r_{--}(q_1; q_2)$ は $r_{--}(q_1; q_2) - (i\lambda e, 0)$ にホモログである。 λ は $0 \leq \lambda < \infty$ 。 $\lambda \rightarrow +\infty$ とすると $\langle r_{--}(q_1; q_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$ は消える。同様に $x_3 - x_2 \in V^+$ の場合にも証明出来る。（終）

$R_3(x_3; x_2 x_1 | a_1 a_2; a_3)$ は (4.2) を台として持つことからこれを x_3 に関する遅延（特異）函数と呼ぶことが出来る。（ x_3 が x_1 及び x_2 の（時間的に）前にあるとき、 $R_3(x_3; x_1 x_2)$ は消えない。）同様に

$$A_3(x_3; x_2 x_1 | a_1 a_2; a_3) \equiv \langle r_{++}(q_1, q_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \quad (4.3)$$

は、もし

$$x_2 - x_3 \in V^+ \quad \text{かつ} \quad x_1 - x_3 \in V^+$$

でなければ消え、(4.3) を先行（特異）函数と呼ぶことが出来る。

同様に、 x_2 or x_1 に関する遅延函数も拵えることが出来ることは明らかであろう。

扱て、次に $R_3(x_3; x_2 x_1 | a_1 a_2; a_3)$ と我々が前の節で求めた K_3 (and the like) との関係を、ホモロジー類をいろいろな条件のもとで考察することによつて調べることにする。

（以下 A_3 については話が全く対称であるので触れない）

そこで、 $\{x\}$ を (4.2) の内とくに

$$x_3 - x_2 \in V^+, \quad x_2 - x_1 \in V^+ \quad (4.4)$$

に固定してみる。すると、先ず $R_3(x_3; x_2 x_1 | a_1 a_2; a_3)$ は

$$\langle r_{--}(q_1, q_2) - r_{++}(q_1, q_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \quad (4.5)$$

に等しいことが判る。何故なら $\langle r_{++}(q_1, q_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$ は $x_3 - x_2 \in V^+$ かつ $x_1 - x_2 \in V^+$ でなければ消えるが、これは (4.4) に反するからである。所で、

$r_{--}(q_1, q_2) - r_{++}(q_1, q_3)$ は明らかに S_1 を囲む (Leray) の双対境界に等しい。

（ $q_1 + q_2 + q_3 = 0$ に注意する。上の積分路は $\mathcal{C}_{-+}(q_2, q_3)$ に入っているのである。）

この様にして (4.4) が成立てば

$$\langle r_{--}(q_1, q_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \sim \langle \delta h_{(-+)}(S_1 - S_2 \cup S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \quad (4.6)$$

ということになる。但し、 $\delta h_{(-+)}$ は次の定義による。

定義; 1° $h_{(\pm\mp)}^{\pm}(S_1-S_2\cup S_3)$ は $s_1^{\pm}\cap\mathcal{C}_{\pm\mp}(q_2, q_3)$ の中の積分路によつて generate された $(2\times 4-1)$ -次元ホモロジー類, 2° $\delta h_{(\pm\mp)}^{\pm}(S_1-S_2\cup S_3)$ は, $h_{(\pm\mp)}^{\pm}(S_1-S_2\cup S_3)$ の S_1 に関する Leray の双対ホモロジー類。そして 3° $\delta h_{(\pm\mp)}(S_1-S_2\cup S_3)$ は次の様に定義する。

$$\begin{aligned} \delta h_{(\pm\mp)}(S_1-S_2\cup S_3) \\ = \delta h_{(\pm\mp)}^{+}(S_1-S_2\cup S_3) - \delta h_{(\pm\mp)}^{-}(S_1-S_2\cup S_3) \end{aligned} \quad (4.7)$$

次に (4.4) に加えて更に

$$\lambda_3(a_1 a_2 a_3) < 0 \quad (4.8)$$

という条件をつけ加える。(これは前述した様に, S_1, S_2, S_3 が実の intersection を持たない — q がユークリッドベクトルになるという条件。)

定義; 1° $\lambda_3(a_1 a_2 a_3) < 0$ のもとで $h^{\epsilon\epsilon'}(S_1\cap S_2-S_3)$ は $s_1^{\epsilon}\cap s_2^{\epsilon'}$ in $\text{Re } \tilde{Q}^2$ (ϵ, ϵ' は + or -) によつて generate される $(2\times 4-2)$ -次元ホモロジー類, 2° $\delta^2 h^{\epsilon\epsilon'}(S_1\cap S_2-S_3)$ は S_1 と S_2 に関する $h^{\epsilon\epsilon'}(S_1\cap S_2-S_3)$ 双対ホモロジー類。

すると, (4.8) のもとで, 次の Lemma を証明することが出来る:

$$\begin{aligned} \delta h_{(\pm\mp)}^{\epsilon}(S_1-S_2\cup S_3) - \delta h_{(\mp\pm)}^{\epsilon}(S_1-S_2\cup S_3) \\ \sim \mp \delta^2 h^{\epsilon+}(S_1\cap S_2-S_3) \pm \delta^2 h^{\epsilon-}(S_1\cap S_2-S_3) \\ \pm \delta^2 h^{\epsilon+}(S_1\cap S_3-S_2) \mp \delta^2 h^{\epsilon-}(S_1\cap S_3-S_2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

(証明略)

これを使うと $R_3(x_3; x_2 x_1 | a_1 a_2; a_3)$ は (4.4) 及び (4.8) の条件のもとでは次の様に展開される。

$$\begin{aligned} & \langle r_{--}(q_1, q_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \\ & \sim \langle \delta^2 h^{++}(S_1\cap S_2-S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle - \langle \delta^2 h^{+-}(S_1\cap S_2-S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \\ & - \langle \delta^2 h^{++}(S_1\cap S_3-S_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle + \langle \delta^2 h^{+-}(S_1\cap S_3-S_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \\ & - \langle \delta^2 h^{-+}(S_1\cap S_2-S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle + \langle \delta^2 h^{--}(S_1\cap S_2-S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \\ & + \langle \delta^2 h^{-+}(S_1\cap S_3-S_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle - \langle \delta^2 h^{--}(S_1\cap S_3-S_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

証明； $\langle r_{++}(q_1, q_2) - r_{--}(q_1, q_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$ を考えると、これは (4.4) で明らかに消える。そして $r_{++}(q_1, q_2) - r_{--}(q_1, q_3)$ は $-\delta h_{(+)}(S_1 - S_2 \cup S_3)$ に等しい。そこで、(4.5) とこれとを加えると、 $\langle r_{--}(q_1, q_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$ は

$$\langle \delta h_{(+)}(S_1 - S_2 \cup S_3) - \delta h_{(+)}(S_1 - S_2 \cup S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$$

に等しいと言つてよい。所が、後者は定義と先の Lemma によつて (4.10) である。(終)

例として、 $\delta^2 h^{++}(S_1 \cap S_2 - S_3)$ を採つて、これに Leray の留数公式をあてはめてみよう；

$$\begin{aligned} & \langle \delta^2 h^{++}(S_1 \cap S_2 - S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \\ &= (2\pi i)^2 \int \exp[i(x_3 - x_1)q_1 + i(x_3 - x_2)q_2] \times \\ & \times \delta(q_1 q_1 - a_1) \delta(q_2 q_2 - a_2) \theta(q_1) \theta(q_2) \times \\ & \times \frac{1}{(q_1 + q_2)(q_1 + q_2) - a_3} dq_1 dq_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

所で、

$$\frac{1}{q \cdot q - a} = \int_{-\infty}^{\infty} da' \frac{\delta(q \cdot q - a')}{a' - a}$$

と考へて、(4.11) を変型すると、結局

$$\begin{aligned} & \langle \delta^2 h^{\varepsilon\varepsilon'}(S_1 \cap S_2 - S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int da'_3 \frac{\langle \delta^3 h^{\varepsilon\varepsilon'}(S_1 \cap S_2 \cap S_3), \mathcal{Q}'_{(3)} \rangle}{a'_3 - a_3} \end{aligned} \quad (4.12)$$

を得る。被積分函数の分子は前節で考へたものと同質である。特に、 $\langle \delta^3 h^{(\pm\mp)}(S_1 \cap S_2 \cap S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$ は全く前節で採りあげたものに等しく、その台は

$$a_3 < (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \quad (4.13)$$

であつた。同様に、 $\langle \delta^3 h^{(\pm\pm)}(S_1 \cap S_2 \cap S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$ の台は

$$a_3 > (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2 \quad (4.14)$$

であることが証明出来る。

従つて、 $\langle \delta^2 h^{(\pm\mp)}(S_1 \cap S_2 - S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$ と

$\langle \delta^2 h^{(\pm\pm)}(S_1 \cap S_2 - S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$ は夫々 (4.13) と (4.14) に

branch cut をもっていることになる。具体的に表示すると

$$\begin{aligned} & \langle \delta^2 h^{(\pm\mp)}(S_1 \cap S_2 - S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} da'_3 \frac{\langle \delta^3 h^{(\pm\mp)}(S_1 \cap S_2 \cap S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle}{a'_3 - a_3} \end{aligned} \quad (4.15')$$

$$\begin{aligned} & \langle \delta^2 h^{(\pm\pm)}(S_1 \cap S_2 - S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} da'_3 \frac{\langle \delta^3 h^{(\pm\pm)}(S_1 \cap S_2 \cap S_3), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2 a'_3 - a_3} \end{aligned} \quad (4.16)$$

これらを使つて, $R_3(x_3; x_2 x_1 | a_1 a_2; a_3)$ を (4.10) によつて K_3 (and the like) で表現することが出来るわけである。(4.15)(4.16) は場の理論という dispersion relation (分散公式) と非常に近いものであるが, ここでは触れないことにする。(実際, $\lambda_3(a_1 a_2 a_3) < 0$ をはずした場合上の様な関係式がどの様になるかということの類似した問題もいわゆる公理的場の理論で非常に重要になつてゐる。)

最後に $n=2$ の場合の $\mathcal{A}_F$ に相当する time ordered な 3 点のデルタ不変函数について簡単に解れる;

$n=2$ の場合 (4-ベクトル一つ; q_1) a_1 を $a_1 - i$ (ϵ は無限小正数) として $\text{Re } q_1$ 空間を 4-cycle とすればよかつた。これにならつて singularity

$$(\text{Re } q_j) \cdot (\text{Re } q_j) - a_j = 0 \quad (4.17)$$

の近傍では, $r_{\text{FFF}}(\tilde{Q}^2)$ は $\text{Re } q_j \cdot I_m q_j > 0, \|I_m q_j\| < \delta$ (δ : 固定小数) に台をもち singularity (4.17) を離れれば $\text{Re } \tilde{Q}^2$ にホモロークになつてゐる様に定義する。そのとき

$$\begin{aligned} & F_3(x_1 x_2 x_3 | a_1 a_2 a_3) \\ & \equiv \langle r_{\text{FFF}}(\tilde{Q}^2), \mathcal{Q}_{(3)}(\tilde{Q}^2 - \cup S) \rangle \end{aligned} \quad (4.18)$$

を所用のものとする。

次を証明することが出来る。

$$x_1 - x_2 \in V^+, \quad x_2 - x_3 \in V^+$$

で、かつ $\lambda_3(a_1 a_2 a_3) < 0$ のとき

$$\begin{aligned} r_{\text{FFF}}(\tilde{Q}^2) &\sim \delta^2 h^{-+}(S_3 \cap S_1 - S_2) \\ &\quad - \delta^2 h^{++}(S_1 \cap S_2 - S_3) \\ &\quad - \delta^2 h^{--}(S_2 \cap S_3 - S_1) \end{aligned} \quad (4.19)$$

(証明略)

尚、物理でよく知られた様に表示すると、次の様になる。

$$\langle r_{\text{FFF}}(\tilde{Q}^2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$$

$$= \int_{\text{Re} \tilde{Q}^2} \exp[-i \sum_j x_j q_j] \frac{\delta(q_1 + q_2 + q_3)}{\prod_j (q_j q_j - a_j + i \epsilon)} dq_1 dq_2 dq_3$$

また、 Δ_F を $F_2(x_1 x_2 | a_1)$ と書き直すと

$$\begin{aligned} F_3(x_1 x_2 x_3 | a_1 a_2 a_3) \\ = (2\pi)^{-N} \int F_2(x_1 x | a_1) F_2(x_2 x | a_2) F_2(x_3 x | a_3) dx \end{aligned}$$

実は、我々の formalism の範囲内では場の演算子の積という概念は入っていない。従つて "time ordered" と称えても限られた意味においてである。(4.19) から明らかな様に $x_1 - x_2 \in V^+$, $x_2 - x_3 \in V^+$ と $\{x\}$ を揃えても r_{FFF} は $-\delta^3 h^{+-}(S_1 \cap S_3 \cap S_2)$ となるのではなく $\delta^2 h^{-+}(S_3 \cap S_1 - S_2)$ の型であり、更に他に二項存在している。

§5 遅延(先行)関数を別の方法で記述すること

位置空間と運動量空間との対称性(双対性)に鑑みて $\tilde{Q}$ 空間と Z 空間を置き換えることを試みる。具体的には q 変数と ξ 変数を例えば (5.1) の様に取り換えるわけだが、これによつて §3 で考えた内積 (Leray の双対輪体と $\mathcal{Q}_{(3)}$ の) を新しく遅延(先行)関数の Fourier 変換とみなすことが出来るのである。

1° $n=3$ の場合

先ず

$$\begin{aligned} q_1 &\rightarrow \xi_1 = x_1 - x_2 \\ q_2 &\rightarrow \xi_2 = x_2 - x_3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

と変数を取り換える。又 $\xi_{12} = \xi_1 + \xi_2$ とする。混乱をさける為に、 $\tilde{Q}$ 空間での $a, S, s, \dots$ に対応して夫々 $\alpha, \Sigma, \sigma, \dots$ などとする。

$$\Sigma_I: \xi_I \xi_I - \alpha_I = 0 \quad (5.2)$$

$\mathcal{Q}_{(3)} \in h^*(Z^2 - \Sigma_1 \cup \Sigma_{12} \cup \Sigma_2)$ は次の型をなす。

$$\mathcal{Q}_{(3)} = \omega_{(3)} \exp[i\xi_1 p_1 + i\xi_{12} p_{12} + i\xi_2 p_2]$$

$$\omega_{(3)} = \frac{d^4 \xi_1 \wedge d^4 \xi_{12} \wedge d^4 \xi_2}{\prod_I [\xi_I \cdot \xi_I - \alpha_I] d^4(\xi_1 + \xi_2 - \xi_{12})} \quad (5.3)$$

p_I は γ_I の counterpart である。

そこで、例えば

$$\langle \delta^3 h^{++}(\Sigma_1 \cap \Sigma_{12} \cap \Sigma_2), \mathcal{Q}_{(3)}(Z^2 - \cup \Sigma) \rangle$$

を $x_1 - x_2 = \xi_1 \in V^+$, $x_1 - x_3 = \xi_{12} \in V^+$ (5.4)

に support をもつた distribution の Fourier 変換と考えるのである。(5.4)

によってこれを x_1 に関して遅延性をもっている distribution の Fourier 変換とし

$\tilde{r}_3(1)$ と記す。もし $\delta^3 h^{--}(\Sigma_1 \cap \Sigma_{12} \cap \Sigma_2)$ を採用すれば

$$x_2 - x_1 = -\xi_1 \in V^+ \quad x_3 - x_1 = -\xi_{12} \in V^+$$

に support をもつたもの (x_1 に関して先行性の Fourier 変換が得られ、これを $\tilde{a}_3(1)$

とする：

$$\tilde{r}_3(1) = \langle \delta^3 h^{++}(\Sigma_1 \cap \Sigma_{12} \cap \Sigma_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$$

$$\tilde{r}_3(2) = \langle \delta^3 h^{+-}(\Sigma_2 \cap \Sigma_1 \cap \Sigma_{12}), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$$

$$\tilde{r}_3(3) = \langle \delta^3 h^{--}(\Sigma_{12} \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_1), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$$

$$\tilde{a}_3(1) = \langle \delta^3 h^{--}(\Sigma_{12} \cap \Sigma_1 \cap \Sigma_2), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$$

$$\tilde{a}_3(2) = \langle \delta^3 h^{+-}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_{12}), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$$

$$\tilde{a}_3(3) = \langle \delta^3 h^{++}(\Sigma_2 \cap \Sigma_{12} \cap \Sigma_1), \mathcal{Q}_{(3)} \rangle$$

これら 6 個は $K_3(x_\kappa x_l x_m | a)$ の dual になつていゝといえる。

この第二の考えも矢張り遅延函数その他の独立性等の代数的な性質を整理する一方法だが、
 $n=4$ の場合その non-trivial な例がある。

2° $n=4$ の場合

$n=3$ の場合は K_3 の 6 個に対して、6 個の $\tilde{r}_3, \tilde{a}_3$ が存在した。しかし、24 個の K_4 に対して、普通の意味での $\tilde{r}_4, \tilde{a}_4$ は 8 個しか作れない((5.6) 以下参照)

先ず、(5.1) と同じ様に

$$q_i \rightarrow \xi_i = x_i - x_{i+1} \quad i=1, 2, 3$$

$$\xi_I = \sum_{i \in I} \xi_i$$

但し, ξ_{123} の代りに $\xi_4 = -\xi_{123}$ を時には用いる。 $\sum_{i=1}^4 \xi_i = 0$ 又, $\xi_{23} = -\xi_{14}$ など
 に注意する。

$$\Omega_4(Z^3 - \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_{123}) \text{ と } \delta^6 h^{+++}(\Sigma_k \cap \Sigma_{kl} \cap \Sigma_{klm} \cap \check{\Sigma}) \quad (5.6)$$

の内積を $\tilde{r}_4(k)$ とする。但し (k, m) は $(123), (234), (341), (412)$ のいずれか,
 $\check{\Sigma}$ は 7 個の Σ_1 から $\Sigma_k, \Sigma_{kl}, \Sigma_{klm}$ 及び Σ_{13} をのぞいた残りの 3 個の Σ_1 の
 intersection である。すると $\tilde{r}_4(k)$ は

$$\xi_k = x_k - x_l \in V^+ \quad \xi_{kl} = x_k - x_m \in V^+ \\ \text{かつ} \quad \xi_{klm} = x_k - x_m \in V^+ \quad (5.7)$$

でなければ消える遅延函数の Fourier 変換とみてよい。但し添字 n は (k, mn) が (1234)
 のある置換になる様な 1~4 迄の整数

同様に (5, 6) の代りに

$$\delta^6 h^{---}(\Sigma_k \cap \Sigma_{kl} \cap \Sigma_{klm} \cap \check{\Sigma})$$

によるものを $\tilde{a}_4(k)$ とする。すると $\tilde{a}_4(k)$ は

$$x_l - x_k \in V^+ \quad x_m - x_k \in V^+ \\ \text{かつ} \quad x_n - x_k \in V^+$$

でなければ消える先行函数の Fourier 変換とみられる。

先にも注意した様に $\tilde{r}_4(k), \tilde{a}_4(k)$, $k=1, 2, 3, 4$ は 8 個しか存在していない
 ので, 24 個の K_4 の dual にはなっていない。そこで, 次の様に別種の遅延(先行)函数を
 構成する。

$$\Omega_{(4)}(Z^3 - U\Sigma) \text{ と夫々}$$

$$\delta^6 h^{+++}(\Sigma_{kl} \cap \Sigma_{klm} \cap \Sigma_l \cap \check{\Sigma}) + \delta^6 h^{+++}(\Sigma_{kl} \cap \Sigma_{klm} \cap \Sigma_{lm} \cap \check{\Sigma}) \quad (5.8)$$

$$\delta^6 h^{+++}(\Sigma_k \cap \Sigma_{klm} \cap \Sigma_l \cap \check{\Sigma}) + \delta^6 h^{+++}(\Sigma_k \cap \Sigma_{klm} \cap \Sigma_m \cap \check{\Sigma}) \quad (5.9)$$

$$\delta^6 h^{+++}(\Sigma_k \cap \Sigma_{kl} \cap \Sigma_{lm} \cap \check{\Sigma}) + \delta^6 h^{+++}(\Sigma_k \cap \Sigma_{kl} \cap \Sigma_m \cap \check{\Sigma}) \quad (5.10)$$

の内積を夫々

$$\tilde{r}_4(kl), \quad \tilde{r}_4(km), \quad \tilde{r}_4(km)$$

とする。すると, $\tilde{r}_4(ks)$, $s=l, m, n$ は

$$x_k - x_l \in V^+ \text{ and } x_k - x_u \in V^+ \quad (5.11)$$

$$\text{かつ } x_s - x_l \in V^+ \text{ or } x_s - x_u \in V^+$$

を台にもつ distribution の Fourier 変換とみられる。但し $(kstu)$ は (1234) のある置換である。

同様に $(5.8)(5.9)(5.10)$ で $\delta^6 h^{(++\pm)} \rightarrow \delta^6 h^{(--\mp)}$ と肩の符号をかえて得るものを、夫々、

$$\tilde{a}_4(kl) \quad \tilde{a}_4(km) \quad \tilde{a}_4(kn)$$

としよう。すると、これを Fourier 変換とする Z space での distribution の台は (5.11) で V^+ を V^- に置き換えたものになる。そこでこの台の性質によつて $\tilde{r}_4(ks)$ (or $\tilde{a}_4(k, s)$) を x_k が x_l と x_u のどちらよりも進んで (or 遅れて) おり、同時に x_s が x_l か x_u のどちらかより進んで (or 遅れて) いる遅延 (先行) 函数の Fourier 変換と称えることにする。((5.11) 等の台を持つたこの種の distribution は Wightman プログラムの中で、O. Steinmann, H. Araki and N. Burgoyne などによつて最初構成された。)

扱て、 $\tilde{r}_4(ks)$ $\tilde{a}_4(ks)$ の数だけで 24 個、従つて前に定義した $\tilde{r}_4(k)$, $\tilde{a}_4(k)$ とで 32 個となる。しかし、今定義した $\tilde{r}_4(ks)$, $\tilde{a}_4(ks)$ は夫々独立なわけではなく、次の関係にある。

$$\tilde{r}_4(ks) + \tilde{r}_4(sk) = \tilde{a}_4(tu) + \tilde{a}_4(ut) \quad (5.12)$$

この関係式は Wightman プログラムのなかでは Steinmann の等式と呼ばれるものだが、証明も我々のホモロジカルな考え方で行なえば、自動的に可能である。

§ 6 おわりに

以上が大体の d^+ , d_{ret} 等の一般化に関する straight forward な御膳立である。あと、いろいろな方面にわたつて分析することがあろう。

例えば、最初の目的であつた様な、局所性 (locality) のホモロジカルな解釈などもその一つである。今 $n=2$ の場合をとり、更に、4 元ベクトル q_1 を 1 元の q_1^0 (時間的) と簡単化して考えることにする。すると ξ_1 が空間的な場合 $q_1 \cdot \xi_1 = 0$ よつて $\mathcal{Q}(2) = \omega(2)$ 。従つて singularity は $(q_1^0)^2 - a_1 = 0$ のみ。 a_1 を physical とすると、 q_1^0 平面の実軸上に二つの極があつて一方の双対境界が $K_2(x_1 x_2 | a_1)$ を与えるとする、他方のそれは $K_2(x_2 x_1 | a_1)$ を与える。ところが一方は他方にホモログになるから、 $\xi_1 = x_1 - x_2 \notin V$ のとき

$$K_2(x_1 x_2 | a_1) = K_2(x_2 x_1 | a_1)$$

となることになる。これが、 ξ_1 が空間的なとき、 $A(\xi_1) = 0$ (cf. (1,2)以下)であることの解釈であり、 $n \geq 3$ の場合でも、大体似た風な考察が可能と思われる。しかしながら $n=2$ の場合においても、上の如く簡単化を行なわないと話簡単ではないようである。それは、 q_1 の計量がユークリッド計量でないことに依る。

Z 空間での解析性とホモロジーの関係も次の重要な問題となろう。

最後にもう一つ面白そうな問題に触れておく。 $\{a_j\}$ がphysical領域にあるというとき $\sqrt{a_j}$ が物理的な質量と考えて正の実数に制限しているわけだが、例えば $K_3(x_1 x_2 x_3 | a_1 a_3, a_2)$ を、複素数 a_1, a_3, a_2 の函数と見做したら、どうかという話である。 $\{a_j\}$ をその空間で、はじめの点から動かして、再び元の点に戻したとき K_n にどれだけ変化があつたかという問題なども含まれる。これを一般的に観るのは困難なので、 $q_j^\mu = 0$ for $\mu \geq j$. という制限をおいて少々概観する。($n=3$ の場合)

$\mathcal{O}_{(3)}(\{a\})$ のなす空間で $n=3$ の場合) での singularity manifolds は前述したように

$$\begin{aligned} G_j: a_j &= 0 & j=1, 2, 3 \\ G_{123}: \lambda_3(a_1 a_2 a_3) &= 0 \end{aligned}$$

であるが、これらを除いた $\mathcal{O}_{(3)}$ 上の点 $\{a_0\}$ から、たとえば $a_1, a_3 - a_2$ を固定して $\lambda_3(a_1 a_2 a_3)$ 平面で $G_{123}: \lambda_3(a_1 a_2 a_3) = 0$ のまわりを正の方向に $\{a\}$ が動いて再び $\{a_0\}$ に戻つたとしよう。そのとき

$$\delta^3 h^{\epsilon \epsilon'}(S_1 \cap S_l \cap S_m) \rightarrow -\delta^3 h^{\epsilon \epsilon'}(S_1 \cap S_l \cap S_m)$$

と変化する。($\epsilon \epsilon'$ は $++$, $+-$, $-+$, $--$ のいずれ。) 何故なら $q_j^\mu = 0$ for $\mu \geq j$ のもとでは $h^{+-}(S_1 \cap S_3 \cap S_2)$ は二点から成っているが、 $\{a\}$ を G_{123} のまわりを一回転させると二点が夫々入れ換り、符号が逆になる。((3.2) 参照) (証明終) これによつて

$$K_3(x_1 x_l x_m | a) \rightarrow -K_3(x_1 x_l x_m | a)$$

などとなる。従つてまた G_{123} は square root 型の singularity であることも判る。(二度 G_{123} のまわりをまわせばよい。) これらの結論は先きの制限をはずしても成立つのではないと思われる。

同様に、 a_2 と a_3 を固定して、 a_1 平面で $G_1: a_1 = 0$ のまわりを $\{a\}$ を回転させると

$$\delta^3 h^{(+-)}(S_1 \cap S_3 \cap S_2) \rightarrow -\delta^3 h^{(+-)}(S_1 \cap S_3 \cap S_2)$$

などとなることが証明出来る。従つて

$$K_3(x_1 x_2 x_3 | a) \rightarrow K_3(x_3 x_2 x_1 | a)$$

などと変化する。

この様なことが，もつと一般的に明らかになれば，解析性との関連が握める糸口が出てくるかもしれない。実際， $K_3(x_1 x_2 x_3 | a)$ は $\mathcal{C}_{++}(x_1 - x_2, x_2 - x_3)$ で正則なある函数の境界値とみられ $K_3(x_3 x_2 x_1 | a)$ は $\mathcal{C}_{--}(x_1 - x_2, x_2 - x_3)$ で正則なある函数の境界値とみられるが， $\mathcal{C}_{++}$ と $\mathcal{C}_{--}$ が $\{a\}$ によつて何かの意味で繋がっていると云えそうという様なこともあるからである。

附記： 本稿の原論文は Progress of Theoretical Physics vol. 35 No. 4 に掲載されますので，詳しい点，たとえば個々の証明， $K_4(x_k x_l x_m x_n | a)$ の具体的な表示等は，そちらを参照していただきたいと思います。また References もこちらでは一切省きましたが，英文の方には附けてあります。

最後に，末尾ながら，御指導をいただいた荒木不二洋教授に感謝いたします。