

結晶格子上の排他過程に対する流体力学的極限

田中亮吉

京都大学

Ryokichi Tanaka¹

Department of Mathematics, Kyoto University

1 序

結晶格子とは、有限グラフの被覆グラフであり、その被覆変換群が有限階数の自由アーベル群である無限グラフのことである。例として、 $\mathbb{Z}^d$ の標準的な格子 ($d \geq 1$)、三角格子、六角格子、籠目格子と呼ばれているものがある。ここでの目的は、こうしたグラフの上で、相互作用をする粒子系を考え、そのスケール極限を考察することである。具体的には、排他的な相互作用を持つミクロな離散モデルを考え、そのスケール極限として現れる系のマクロな挙動 (粒子の密度の時間発展) が、ある準線形偏微分方程式によって支配されることを見る。こうした問題は、流体力学的極限の問題と呼ばれ、種々のモデルに対して多くの研究がある。(例えば, [KOV]). ここでの問題意識の一つは、下の空間がミクロに何かある幾何構造を持っていたときに、それが系のマクロな挙動にどのように影響を与えるか、ということである。現段階で扱うのは結晶格子であり、この問題は、 $\mathbb{Z}^d$ の場合の研究の拡張として得られるものである。

2 結晶格子の標準実現

$X = (V, E)$ を連結な有向グラフとする。また、ある辺 $e \in E$ について、その向きも入れ替えた辺 $\bar{e} \in E$ も E に入っているとする。ある $\mathbb{Z}^d (d \geq 1)$ が X に自由に作用しているとし、その商グラフ $X_0 = (V_0, E_0)$ は有限グラフであるとする。このとき、 X を結晶格子と呼ぶことにする。

結晶格子は“物理的”には、 $\mathbb{R}^d$ の中で周期的に実現されていて、それが“平衡状態”にあると考えられる。数学的には、 X から $\mathbb{R}^d$ への $\mathbb{Z}^d$ -同変な調和写像により埋め込まれていると考える。こうした結晶格子の調和写像による埋め込みの中で“標準的”なものを与えるのが、小谷-砂田による標準実現である。([KS]). この標準実現 $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ は、次の様にして与えられる。まず有限グラフの平坦トーラスへの埋め込み $\Phi_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{T}^d$ として、 $\Phi_{0*} : \pi_1(X_0) \rightarrow \mathbb{Z}^d$ が全射であるものを考える。この写像についてエネルギー汎関数の離散類似を考え、そのホモトピー類の中で最小値を与える写像を取る。(そのような写像は存在する。またこれは、各頂点の配置が離散の意味で調和であるという条件を与える)。この離散版エネルギー汎関数は平坦トーラスの平坦計量に依存するが、トーラスの体積を一定

¹e-mail: rtanaka[AT]math.kyoto-u.ac.jp

に保ったまま平坦計量をも動かすことを許した上で、ホモトピー類の中でエネルギー最小となる写像を取る。この持ち上げとして標準実現 Φ は定義される。(標準実現 Φ は存在してユークリッド運動変換を除いて一意的に定まる)。また、標準実現 Φ は離散版 Albanese 写像の持ち上げとして構成できるものである。

この標準実現は結晶格子の上の組み合わせ論的ラプラスianの収束に関して良い性質を持っている。また、標準実現と結晶格子上のランダム・ウォークの中心極限定理との関係が調べられている。

以下、標準実現 $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ を一つ固定して話を進める。

今、正の整数 N を取ると、 $\mathbb{Z}^d$ の部分群 $N\mathbb{Z}^d$ も X に作用する。その商グラフを $N\mathbb{Z}^d \backslash X = X_N = (V_N, V_N)$ とおく。 X_N は有限グラフである。また、 $|V_N| = |V_0|N^d \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ である。この有限グラフが適当なスケール極限を取ることで平坦トーラスに収束することを見る。

標準実現のスケールを取ったもの $(1/N)\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ を考える。これは定義域の $N\mathbb{Z}^d$ の作用と値域の $\mathbb{Z}^d$ の格子群としての作用 ($\mathbb{Z}^d$ の標準的な作用とは限らない) で割ることにより、写像 $\Phi_N: X_N \rightarrow \mathbb{T}^d$ を誘導する。 ($\mathbb{T}^d$ は標準実現を定義したときに選んだ平坦計量が入っている)。このとき、この写像による像 $\Phi_N(X_N)$ は $\mathbb{T}^d$ に $N \rightarrow \infty$ で“収束する”。(これは厳密には Gromov-Hausdorff 位相により正当化されるが、今はこのことは用いない)。

3 モデル

有限グラフ X_N の上で対称単純排他過程、弱非対称排他過程を考える。

配置空間として $Z_N := \{0, 1\}^{V_N}$ と定義する。また、一つの配置を $\eta \in Z_N, \eta = \{\eta_x\}_{x \in V_N}$ と表すことにする。配置空間に $(1/2)$ -Bernoulli 測度の積測度 $\nu_N := \prod_{V_N} \nu_{1/2}$ を導入する。ここで対称単純排他過程の生成作用素 $L_N: L^2(Z_N, \nu_N) \rightarrow L^2(Z_N, \nu_N)$ は以下で定義されるものである：

$$L_N F(\eta) := \frac{1}{2} \sum_{e \in E_N} (1 - \eta_{oe}) \eta_{te} \{F(\eta^e) - F(\eta)\}, \quad F \in L^2(Z_N, \nu_N).$$

ここで oe, te はそれぞれ辺 e の始点、終点を与える頂点であり、 η^e は配置 η の oe と te での状態を入れ替えて得られる配置である。また、弱非対称排他過程は対称単純排他過程の摂動として与えられる。具体的には、トーラス上の“外場”(drift) として $H \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ を取る。ここで弱非対称排他過程の生成作用素 $L_N^H: L^2(Z_N, \nu_N) \rightarrow L^2(Z_N, \nu_N)$ は以下で定義されるものである：

$$L_N^H F(\eta) := \frac{1}{2} \sum_{e \in E_N} (1 - \eta_{oe}) \eta_{te} \exp[H(\Phi_N(te)) - H(\Phi_N(oe))] \{F(\eta^e) - F(\eta)\}.$$

関数 H が定数関数のとき、特別な場合として対称単純排他過程が与えられることがわかる。この生成作用素 L_N^H により生成される連続時間マルコフ連鎖 $\eta(t) = \{\eta_x(t)\}_{x \in V_N}$ を考える。粒子の密度を次のように定義する：

$$\xi_N(t) := \frac{1}{|V_N|} \sum_{x \in V_N} \eta_x(N^2 t) \delta_{\Phi_N(x)}(d\mu).$$

ここで, μ は $\mathbb{T}^d$ 上の Lebesgue 測度であり, δ は Dirac 測度である. また, 連続時間マルコフ連鎖は N^2 により時間スケールを取っている.

このとき, 次が成り立つ:

定理 1. 可測関数 $\rho_0 : \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 1]$ を一つ固定する. $\xi_N(0) \rightarrow \rho_0 d\mu$, $N \rightarrow \infty$ in prob. のとき, 各時間 $t \geq 0$ において, $\xi_N(t) \rightarrow \rho_t d\mu$, $N \rightarrow \infty$ in prob. であり, ρ_t は次の準線形偏微分方程式の一意的弱解である:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{1}{2|V_0|} \Delta \rho - \frac{1}{2|V_0|} \sum_{e \in E_0} \nabla_{\mathbf{v}(e)} (\rho(1 - \rho) \nabla_{\mathbf{v}(e)} H), \quad \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot).$$

ここで, $\mathbf{v}(e) := \Phi(te) - \Phi(oe)$ for $e \in E_0$.

測度の収束は弱収束である. この定理の証明は局所エルゴート定理を定式化し証明することで得られる. 結晶格子の場合の局所エルゴート定理の定式化とその証明の詳細については [T] を参照されたい.

4 謝辞

本原稿は研究集会「幾何学的力学系の新展開」における講演の内容をまとめたものである. 講演の機会をくだり, 有益な助言をくださった, 研究代表者である岩井敏洋先生と千葉逸人さんに感謝いたします.

参考文献

- [KOV] Kipnis, C., Olla, S., Varadhan, S. R. S.: Hydrodynamics and large deviation for simple exclusion processes. Comm. Pure Appl. Math., Vol. XLII, 115-137 (1989)
- [KS] Kotani, M., Sunada, T.: Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps. Trans. Amer. Math. Soc. 353, 1-20 (2001)
- [T] Tanaka, R.: Hydrodynamic limit for weakly asymmetric exclusion processes in crystal lattices. arXiv:1105.6220v1