

Multivariate Meixner-Pollaczek polynomials and an application

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 若山 正人 (Masato WAKAYAMA)

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University (述)

九州大学大学院数理学府 井上 公人 (記)

ここでの内容は, Jacques Faraut 氏との共同研究 [FW1, FW2] に基づくものである.

1 一変数の場合と例

一変数の Meixner-Pollaczek polynomial (MP) とは, 以下で定義される多項式である [AAR].

$$P_m^{(\frac{\nu}{2})}(\lambda; \phi) = \frac{(\nu)_m}{m!} e^{im\phi} {}_2F_1\left(-m, \frac{\nu}{2} + i\lambda; \nu; 1 - e^{-2i\phi}\right) \quad (0 < \phi < \pi).$$

Meixner 1934, Pollaczek 1949 (rediscovered)

この多項式については, 直交性や母関数, 微分方程式, 差分方程式, 積分表示式が知られている. 以下では Meixner-Pollaczek polynomial が現れる例を述べる.

Example 1.1 (Meixner(-Pollaczek) process ($\subset$ Levi process) in Finance). 一変数の場合は W. Schoutens (2001) [Sc] によるが, 今回の多変数化によってこの process の時間多変数化が考えられると期待される.

Example 1.2 (Gaussian unitary ensemble). $\text{Herm}(n, \mathbb{C})$ を n 次のエルミート行列全体, μ_n を $\text{Herm}(n, \mathbb{C})$ 上の固有値分布とすると, そのモーメントは

$$\mathfrak{M}_{2m}(\mu_n) = \frac{1}{n} \int_{\text{Herm}(n, \mathbb{C})} \text{tr}(X^{2m}) \mathbb{P}(dX),$$

$$\mathbb{P}(dX) = C e^{-\text{tr}(X^2)} \lambda(dX): \text{Gaussian probability on } \text{Herm}(n, \mathbb{C})$$

で与えられる (C は正規化定数). $C(m, n)$ を

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n = 1 + 2 \sum_{m=0}^{\infty} C(m, n) x^{m+1}, \quad C(m, n) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k+1} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

と定義すると,

$$\mathfrak{M}_{2m}(\mu_n) = \frac{1}{n} \frac{(2m)!}{2^m m!} C(m, n)$$

となる. この $C(m, n)$ は Meixner-Pollaczek polynomial で次のように与えられる.

$$C(m, n) = \frac{1}{2} (m+1)! P_m^{(0)}\left(in, \frac{\pi}{2}\right)$$

(Haver-Zagier 1986 [HZ], Mehta 1991 [Meh], Haagerup et al. 2003 [HT]). 今回扱う多変数 Meixner-Pollaczek polynomial に対する母関数は, $C(m, n)$ の母関数の拡張になっている.

Example 1.3 (完備 Riemann zeta の近似).

$$\Xi(t) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \quad s = \frac{1}{2} + it \quad (t \in \mathbb{R})$$

Meixner-Pollaczek polynomial による完備リーマンゼータ関数の良い近似が [Ku] で述べられている.

Example 1.4 (Operator ordering). p, q が $[p, q] = pq - qp = i$ を満たすとする. σ を symmetrization とする. つまり,

$$\sigma((pq)^l) = \{l \text{ 個の } p \text{ と } q \text{ の可能な順序積の全ての和}\}$$

とする. このとき, ある多項式 $S_l(\lambda)$ が存在して,

$$\sigma((pq)^l) = S_l((pq)^1)$$

と書けることは明らかである. これについて [BMP] で,

$$S_l(\lambda) = P_l^{(1)}\left(\lambda; \frac{\pi}{2}\right)$$

となることが発見され, Koornwinder 1989 [Ko] で証明された. また, 組合せ論を用いた証明もある [HZ].

以下は Meixner-Pollaczek polynomial が単位円板上の単項式から一連の変換で得られることを示す picture である. これが多変数 Meixner-Pollaczek polynomial を定義するにあたっての一つのアイディアを与える.

関数空間	$\mathcal{H}_\nu^2(\mathcal{D})$	$\xrightarrow{\sim c_\nu}$	$\mathcal{H}_\nu^2(T)$	$\xrightarrow{\sim \mathcal{L}_\nu^{-1}}$	$L_\nu^2(0, \infty)$	$\xrightarrow{\sim \mathcal{M}_\nu}$	$L^2(\mathbb{R}, M_\nu(d\lambda))$
直交基底	$\{\varphi_m\}$				$\{\psi_m^{(\nu)}\}$ Laguerre		$\{q_m^{(\nu)}\}$ MP
Operator	$2w \frac{d}{dw}$ Euler op.				微分方程式		差分方程式

ただし

$$\varphi_m(w) = w^m,$$

$$\psi_m^{(\nu)}(u) = e^{-u} L_m^{(\nu-1)}(2u), \quad L_m^{(\nu-1)}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\Gamma(m+\nu)}{\Gamma(k+\nu)} \frac{(-x)^k}{k!(m-k)!} \quad (\text{classical Laguerre polynomial}),$$

$$q_m^{(\nu)}(s) = \frac{(\nu)_m}{m!} {}_2F_1\left(-m, s + \frac{\nu}{2}; 2; \frac{\nu}{2}\right) = \frac{(\nu)_m}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(m)_k (-s - \frac{\nu}{2})_k}{(\nu)_k} \frac{2^k}{k!}.$$

ここで, 各空間について (m を $\mathbb{C}$ 上の Lebesgue measure として)

1. $\mathcal{H}_\nu^2(\mathcal{D})$: weighted Bergman 空間
 $= \left\{ f(w) \left| \mathcal{D} \text{ 上正則}, \int_{\mathcal{D}} |f(w)|^2 (1 - |w|^2)^{\nu-2} m(dw) < \infty \right. \right\}$
 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$: unit disc
2. $\mathcal{H}_\nu^2(T) = \left\{ F(z) \left| T \text{ 上正則}, \int_T |F(z)|^2 x^{\nu-2} m(dw) < \infty \right. \right\}$
 $T \subset \mathbb{C}$: 右半平面
3. $L_\nu^2(0, \infty) = \left\{ \psi(u) \left| \int_0^\infty |\psi(u)|^2 u^{\nu-1} du < \infty \right. \right\}$
4. $M_\nu(d\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{2^\nu}{\Gamma(\nu)} \left| \Gamma(i\lambda + \frac{\nu}{2}) \right|^2 d\lambda$

上の picture におけるユニタリ同型写像はそれぞれ

$$\begin{aligned} (C_\nu f)(z) &= \left(\frac{z-1}{2} \right)^{-\nu} f\left(\frac{z-1}{z+1} \right) \quad (\text{Cayley 変換}), \\ (\mathcal{L}_\nu \psi)(z) &= \frac{2^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty e^{-zu} \psi(u) u^{\nu-1} du \quad (\text{Laplace 変換}), \\ (\mathcal{M}_\nu \psi)(s) &= \frac{1}{\Gamma(s + \frac{\nu}{2})} \int_0^\infty \psi(u) u^{s + \frac{\nu}{2} - 1} du \quad (\text{Mellin 変換}) \end{aligned}$$

で与えられる. また Meixner-Pollaczek polynomial の差分方程式は以下ようになる.

$$\begin{aligned} (D_\nu f)(s) &= \left(s + \frac{1}{2} \right) (f(s+1) - f(s)) - \left(s - \frac{1}{2} \right) (f(s-1) - f(s)) \\ (D_n q_m^{(\nu)})(s) &= 2m q_m^{(\nu)}(s). \end{aligned}$$

2 多変数化

今回の目的は 1 変数 Meixner-Pollaczek polynomial の描像を管状 Hermite 対称空間の枠組みで構築することである. 記号を以下のように定めておく.

V : Jordan algebra ($\dim V = N, \text{rank } V = n$)

d : multiplicity ($N = n + \frac{d}{2}n(n-1)$)

$\Omega \subset V$: symmetric cone associated with V

G : Ω の自己同型群 $G(\Omega)$ の単位元成分

$K \subset G$: V の単位元 e の等方部分群

Spherical function $\varphi_s(u)$ を $s \in \mathbb{C}^n, u \in \Omega$ に対して

$$\varphi_s(u) = \int_K \Delta_{s+\rho}(ku) dk, \quad \rho_j = \frac{d}{4}(2j - n - 1)$$

とする. $\mathbb{D}(\Omega)$ を G -invariant differential operator の全体とする. $\mathbb{D}(\Omega)$ の元 D に対し

$$D\varphi_s = \gamma_D(s)\varphi_s$$

となる。ここで $\gamma: \mathbb{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)^{\mathfrak{S}_n}$ は Harish-Chandra isomorphism の特別な例である。また, $\mathcal{P}(V)$ を V 上の多項式全体とすると, これは G -加群として重複度 1 で既約分解できて,

$$\mathcal{P}(V) = \bigoplus_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n \\ m_1 \geq \dots \geq m_n}} \mathcal{P}_{\mathbf{m}}, \quad \mathcal{P}_{\mathbf{m}} : \text{irreducible under } G$$

となる。K-invariant polynomials $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^K$ は $\mathbb{C}$ 上一次元であって spherical polynomial $\Phi_{\mathbf{m}}$ で生成される。以下, $d_{\mathbf{m}} := \dim \mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ とおく。

$$D^{\mathbf{m}} := \Phi_{\mathbf{m}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \in \mathbb{D}(\Omega), \quad \gamma_{\mathbf{m}} := \gamma_{D^{\mathbf{m}}}$$

とすると, $\gamma_{\mathbf{m}}(s)$ は Pochhammer symbol $(s)_{\mathbf{m}} = s(s-1)\dots(s-m+1)$ ($= x^{\mathbf{m}} \left(\frac{d}{dx} \right)^{\mathbf{m}}$ の eigenvalue) の多変数類似である。さらに, Gindikin のガンマ関数を

$$\Gamma_{\Omega}(s) = \int_{\Omega} e^{-\text{tr} u} \Delta_s(u) \Delta(u)^{-\frac{N}{n}} m(du) \quad (s \in \mathbb{C}^n, \Delta(u) = \det(u))$$

とする。

$$\Gamma_{\Omega}(s) = (2\pi)^{\frac{N-n}{2}} \prod_{j=1}^n \Gamma\left(s_j - \frac{d}{2}(j-1)\right)$$

である。 $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$ に対して Pochhammer symbol の一般化を

$$(\alpha)_{\mathbf{m}} := \frac{\Gamma_{\Omega}(\mathbf{m} + \alpha)}{\Gamma_{\Omega}(\alpha)}$$

で定める。

ψ を K-invariant で $e \in V$ の近傍で解析的な関数とすると,

$$\psi(e+v) = \sum_{\mathbf{m}} d_{\mathbf{m}} \frac{1}{\left(\frac{N}{n}\right)_{\mathbf{m}}} (D^{\mathbf{m}} \psi)(e) \Phi_{\mathbf{m}}(v)$$

と Taylor 展開される。特に

$$\psi = \varphi_s \implies \varphi_s(e+v) = \sum_{\mathbf{m}} d_{\mathbf{m}} \frac{1}{\left(\frac{N}{n}\right)_{\mathbf{m}}} \gamma_{\mathbf{m}}(s) \Phi_{\mathbf{m}}(v)$$

$$\psi = \Phi_{\mathbf{m}} \implies \Phi_{\mathbf{m}}(e+v) = \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{m}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}}(v)$$

となる。一変数 Meixner-Pollaczek polynomial $P_m^{(\frac{\nu}{2})}(\lambda)$ の超幾何多項式としての表示を拡張し, 多変数 Meixner-Pollaczek polynomial を以下のように定義する。

Definition 2.1. 多変数 Meixner-Pollaczek polynomial $\{Q_{\mathbf{m}}^{(\nu)}(s)\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n}$ を,

$$Q_{\mathbf{m}}^{(\nu)}(s) = \frac{(\nu)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{N}{n}\right)_{\mathbf{m}}} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{m}} d_{\mathbf{k}} \frac{\gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{m} - \rho) \gamma_{\mathbf{k}}\left(-s - \frac{\nu}{2}\right)}{(\nu)_{\mathbf{k}}} \frac{1}{\left(\frac{N}{n}\right)_{\mathbf{k}}} 2^{|\mathbf{k}|}$$

と定める。

$Q_{\mathbf{m}}^{(\nu)}(s)$ は $s \in \mathbb{C}^n$ について対称関数である。これらが spherical polynomial の変換から得られるという, 一変数の場合と同様な picture が, 次のように描ける;

関数空間	$\mathcal{H}_\nu^2(\mathcal{D})^K \xrightarrow{\sim_{C_\nu}} \mathcal{H}_\nu^2(T_\Omega)^K \xrightarrow{\sim_{\mathcal{L}_\nu^{-1}}} L_\nu^2(\Omega)^K \xrightarrow{\sim_{\mathcal{F}_\nu}} L^2(\mathbb{R}^n, M_\nu(d\lambda))^{\mathfrak{S}_n}$
直交基底	$\{\Phi_m\}$ spher.poly. $\{\Psi_m^{(\nu)}\}$ Laguerre $\{Q_m^{(\nu)}\}$ mult.MP
Operator	Euler op. 微分方程式 差分方程式

ここで各関数空間について

1. $\mathcal{H}_\nu^2(\mathcal{D})$: weighted Bergman 空間

$$= \left\{ f(w) \mid \mathcal{D} \text{ 上正則}, \int_{\mathcal{D}} |f(w)|^2 \Delta(e - w^2)^{\nu-2\frac{N}{n}} m(dw) < \infty \right\}$$
 $\mathcal{D} \subset V$: bounded symmetric domain
2. $\mathcal{H}_\nu^2(T_\Omega) = \left\{ F(z) \mid T_\Omega \text{ 上正則}, \int_{T_\Omega} |F(z)|^2 \Delta(x)^{\nu-2\frac{N}{n}} m(dz) < \infty \right\}$
 $\Omega \subset V$: symmetric cone(G/K)
 $T_\Omega = \{z = x + iy \mid x \in \Omega, y \in V\}$
3. $L_\nu^2(\Omega) = \left\{ \psi(u) \mid \int_{\Omega} |\psi(u)|^2 \Delta(u)^{\nu-\frac{N}{n}} m(du) < \infty \right\}$
4. $M_\nu(d\lambda) = a_\nu^{(4)} \left| \Gamma_\Omega(i\lambda + \rho + \frac{\nu}{2}) \right|^2 \frac{1}{|c(i\lambda)|^2} m(d\lambda)$
 c : Harish-Chandra c -function
 $a_\nu^{(i)}$: normalized constant

とおき, 各変換 (intertwiner) を

$$(C_\nu f)(z) = \Delta\left(\frac{z+e}{2}\right)^{-\nu} f((z-e)(z+e)^{-1}) \quad (\text{Calay 変換}),$$

$$(\mathcal{L}_\nu \psi)(z) = a_\nu^{(3)} \int_{\Omega} e^{(z|u)} \psi(u) \Delta(u)^{\nu-\frac{N}{n}} m(du) \quad (\text{Laplace 変換}),$$

$$(\mathcal{F}_\nu \psi)(s) = \frac{1}{\Gamma_\Omega(s + \frac{\nu}{2} + \rho)} \int_{\Omega} \psi(u) \varphi_s(u) \Delta(u)^{\frac{\nu}{2}-\frac{N}{n}} m(du) \quad ((\text{modified}) \text{ spherical Fourier 変換})$$

としている.

上に現れる Laguerre function $\Psi_m^{(\nu)}(u)$ は

$$\Psi_m^{(\nu)}(u) = e^{-\text{tr } u} L_m^{(\nu-1)}(2u)$$

で与えられる. $L_m^{(\nu)}(u)$ は多変数 Laguerre 多項式で,

$$\begin{aligned} L_m^{(\nu-1)}(x) &= \frac{(\nu)_m}{\left(\frac{N}{n}\right)_m} \sum_{k \subset m} \binom{m}{k} \frac{1}{(\nu)_k} \Phi_k(-x) \\ &= \frac{(\nu)_m}{\left(\frac{N}{n}\right)_m} \sum_{k \subset m} d_k \frac{\gamma_k(\rho - m)}{(\nu)_k} \frac{1}{\left(\frac{N}{n}\right)_k} \Phi_k(-x) \end{aligned}$$

と表示される. 多変数 Laguerre 多項式に関しては [ADO1, ADO2], [DOZ1, DOZ2], [OF] の中でも議論されている.

さらにパラメータ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ を

$$\Phi_m^{(\theta)}(w) := \Phi_m(w \cos \theta + ie \sin \theta)$$

と入れる. これを intertwiner で順に移していき,

$$\begin{aligned} F_m^{(\nu, \theta)} &:= \mathcal{C}_\nu \Phi_m^{(\theta)}, \\ \Psi_m^{(\nu, \theta)} &:= \mathcal{L}_\nu^{-1} F_m^{(\nu, \theta)}, \\ Q_m^{(\nu, \theta)} &:= \mathcal{F}_\nu \Psi_m^{(\nu, \theta)}, \end{aligned}$$

と定め, パラメータ θ 付きの多変数 Meixner-Pollaczek polynomial

$$Q_m^{(\nu, \theta)}(s) = e^{i|m|\theta} \frac{(\nu)_m}{\left(\frac{N}{n}\right)_m} \sum_{k \subset m} d_k \frac{\gamma_k(m - \rho) \gamma_k(-s - \frac{\nu}{2})}{(\nu)_k} \frac{1}{\left(\frac{N}{n}\right)_k} (2e^{-i\theta} \cos \theta)^{|k|}$$

を考える.

3 結果

パラメータ付き多変数 Meixner-Pollaczek polynomial についての基本的な結果を述べる.

Theorem 3.1 (直交性). 内積

$$(q_1 | q_2)_{(\nu, \theta)} = \int_{\mathbf{R}} q_1(i\lambda) \overline{q_2(i\lambda)} e^{2\theta(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} M_\nu(d\lambda)$$

に関して

$$\begin{aligned} \left(Q_m^{(\nu)}(s) \middle| Q_{m'}^{(\nu)}(s) \right)_{(\nu, \theta)} &= 0 \quad (m \subsetneq m' \text{ or } m \supsetneq m'), \\ \left(Q_m^{(\nu)}(s) \middle| Q_m^{(\nu)}(s) \right)_{(\nu, \theta)} &= (\cos \theta)^{-n\nu} \frac{1}{d_m} \frac{(\nu)_m}{\left(\frac{N}{n}\right)_m}. \end{aligned}$$

が成り立つ.

Theorem 3.2 (母関数). $w \in \mathcal{D}$, $s \in \mathbb{C}^n$ に対し,

$$\sum_m d_m Q_m^{(\nu, \theta)}(s) \Phi_m(w) = \Delta((e - e^{i\theta} w)(e + e^{-i\theta} w))^{-\frac{n}{2}} \varphi_s(c_\theta(w)^{-1}).$$

ただし, $c_\theta(w) = (e + e^{-i\theta} w)(e - e^{i\theta} w)^{-1}$.

Theorem 3.3 (行列式表示). $d = 2$ の場合 (i.e. $V = \text{Herm}(n, \mathbb{C})$, $K = U(n)$),

$$Q_m^{(\nu, \theta)}(s) = (-2 \cos \theta)^{-\frac{1}{2}n(n-1)} \delta! \frac{\det(q_{m_j + \delta_j}^{(\nu - n + 1, \theta)}(s_i))_{1 \leq i, j \leq n}}{V(s_1, \dots, s_n)}.$$

ここで $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$, $q_m^{(\nu, \theta)}$ は一変数 Meixner-Pollaczek polynomial である.

Theorem 3.4 (差分方程式). 差分作用素 $D_{\nu, \theta}$ を

$$\begin{aligned}
D_{\nu,\theta}f(s) &= e^{-i\theta} \sum_{j=1}^n \left(s_j + \frac{\nu}{2} - \frac{d}{4}(n-1)\right) \alpha_j(s) (f(s + \varepsilon_j) - f(s)) \\
&\quad + e^{i\theta} \sum_{j=1}^n \left(-s_j + \frac{\nu}{2} - \frac{d}{4}(n-1)\right) \alpha_j(-s) (f(s - \varepsilon_j) - f(s)), \\
\{\varepsilon_j\} &: \text{canonical basis,} \\
\alpha_j(s) &= \prod_{k \neq j} \frac{s_j - s_k + \frac{d}{2}}{s_j - s_k}
\end{aligned}$$

と定義する. Meixner-Pollaczek polynomial $Q_m^{(\nu,\theta)}$ は $D_{\nu,\theta}$ の eigenfunction である;

$$D_{\nu,\theta} Q_m^{(\nu,\theta)} = 2|m| \cos \theta Q_m^{(\nu,\theta)}.$$

Theorem 3.5 (Pieri's formula).

$$\begin{aligned}
&(2|s| \cos \theta - 2i|2m + \nu| \sin \theta) Q_m^{(\nu,\theta)}(s) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(m_j + \nu - 1 - \frac{d}{4}(j-1)\right) \alpha_j(m - \varepsilon_j - \rho) d_{m-\varepsilon_j} Q_{m-\varepsilon_j}^{(\nu,\theta)}(s) \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \left(m_j + 1 + \frac{d}{4}(n-j)\right) \alpha_j(-m - \varepsilon_j - \rho) d_{m+\varepsilon_j} Q_{m+\varepsilon_j}^{(\nu,\theta)}(s).
\end{aligned}$$

4 コメント

1. 差分関係式の証明において以下の involution S を導入すると議論がよりクリアになる; $f \in \mathcal{H}_\nu^2(D)$ に対して $(Sf)(w) = f(-w)$. S を intertwiner で移すと $L_\nu^2(\Omega)$ では Hankel 変換が現れる [FK]. これを拡張すると, 多変数の fractional Hankel 変換が自然に定義される.
2. Example 1.4 は $Q_m^{(\nu)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ を用いると, Heisenberg 群の表現論を展開して多変数の場合に拡張される [FW2].
3. $\text{ad}, \check{\text{ad}}$ ($\check{\text{ad}}(a)b = ab + ba$) から $\mathfrak{sl}_2$ -triple

$$\begin{aligned}
E &:= \frac{1}{2} \check{\text{ad}}(a) \check{\text{ad}}(a^+) \left(= \frac{1}{2} \check{\text{ad}}(a^+) \check{\text{ad}}(a) \right), \\
F &:= \frac{1}{2} \text{ad}(a) \text{ad}(a^+) \left(= \frac{1}{2} \text{ad}(a^+) \text{ad}(a) \right), \\
H &:= \frac{1}{2} \{ \text{ad}(a) \check{\text{ad}}(a^+) - \check{\text{ad}}(a) \text{ad}(a^+) \} \\
a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right)
\end{aligned}$$

ができる. これを用いると Meixner-Pollaczek polynomial が満たす差分方程式が導かれる. なお, 同様の議論が [GS] でなされていることが近頃わかった. 最近, [Sh] では $\check{\text{ad}}$ と Meixner-Pollaczek polynomial の母関数を利用して, [Ko] のみならず, [HZ] の結果を統一的かつ簡明に (拡張した形で) 導いた.

参考文献

- [AAR] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy: *Special Functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 71. Cambridge University Press, 1999.

- [ADO1] Aristidou, M., Davidson, M., Ólafsson, G.: Differential recursion relations for Laguerre functions on symmetric cones, *Bull. Sci. Math.*, **130** (2006), 246–263.
- [ADO2] Aristidou, M., Davidson, M., Ólafsson, G.: Laguerre functions on symmetric cones and recursion relations in the real case, *J. Comput. Appl. Math.*, **199** (2007), 95–112.
- [BMP] C. M. Bender, L. R. Mead and S. S. Pinsky: Resolution of the Operator-Ordering Problem by the Method of Finite Elements, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986), 2445–2448.
- [DOZ1] Davidson, M., Ólafsson, G., Zhang, G.: Laplace and Segal-Bargmann transforms on Hermitian symmetric spaces and orthogonal polynomials, *J. Functional Analysis*, **204** (2003), 157–195.
- [DOZ2] Davidson, M., Ólafsson, G., Zhang, G.: Differential recursion relations for Laguerre functions on Hermitian matrices, *Integral transforms and special functions*, **14** (2003), 469–484.
- [FK] Faraut, J., Korányi, A.: Analysis on symmetric cones, Oxford University Press, 1994.
- [FW1] Faraut, J., Wakayama, M.: Hermitian Symmetric Spaces of Tube Type and Multivariate Meixner-Pollaczek Polynomials, [arXiv:0812.1292](https://arxiv.org/abs/0812.1292).
- [FW2] Faraut, J., Wakayama, M.: Invariant Differential Operators on The Heisenberg Group and Meixner-Pollaczek polynomials, Preprint (2012).
- [GS] Gnatowska, E., Strasburger, A.: The weyl algebra, Spherical harmonics, and Hahn polynomials, [arXiv:math-ph/0110006v1](https://arxiv.org/abs/math-ph/0110006v1).
- [HT] Haagerup, U., Thorbjørnsen, S.: Random matrices with complex Gaussian entries, *Exp. Mat.*, **21** (2003), 293–337.
- [HZ] Harer, J., Zagier, D.: The Euler characteristic of the moduli space of curves, *Invent. Math.*, **185** (1986), 457–485.
- [Ko] Koornwinder, T.: Meixner-Pollaczek polynomials and the Heisenberg algebra, *J. Math. Phys.*, **30** (1989), 767–769.
- [Ku] Kuznetsov, A.: Expansion of the Riemann Ξ function in Meixner-Pollaczek polynomials. *Canad. Math. Bull.*, **51** (2008), 561–569.
- [Meh] Mehta, M. L.: Random matrices, Academic Press, 1991.
- [OF] Chébli, H., Faraut, J.: Fonctions holomorphes à croissance modérée et vecteurs distributions, *Math. Z.*, **248** (2004), 541–565.
- [Sc] Schoutens, W.: Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials, Lecture Notes in Statistics 146. Springer-Verlag, New York.
- [Sh] Shibukawa, G.: Operator orderings and Meixner-Pollaczek polynomials, [arXiv:1211.6646](https://arxiv.org/abs/1211.6646).