

Banach function spaces

について

岡山大理 越 昭 三

序 (Ω, Σ, μ) を σ -finite measure space とし, 其の上の equivalent class は同一視して measurable function からなる Banach space L_p (p は norm) に関する表現定理と Szegő の定理について述べる。

§1 L_p M^+ を非負可測関数の集合とし, 其の上で定義された $\bar{\mathbb{R}}^+$ (non-negative extended real number) に値をとる p についてつぎの条件がみたされているものとする。

$$(1) \quad 0 \leq p(f) \leq +\infty, \quad p(f) = 0 \iff f = 0 \quad (f \in M^+)$$

$$(2) \quad p(\alpha f) = \alpha p(f) \quad (\alpha \geq 0)$$

$$(3) \quad p(f+g) \leq p(f) + p(g) \quad (f, g \in M^+)$$

$$(4) \quad f \leq g \Rightarrow p(f) \leq p(g)$$

$L_p = L_p(\Omega, \Sigma, \mu) = \{f \mid p(|f|) < \infty\}$ とし, p は L_p の norm となる。complete になるための条件として,

$$(5) \quad f_n \uparrow f \quad (f_n, f \in M^+), \quad \sup_n p(f_n) < \infty \Rightarrow p(f) < \infty \quad (\text{w. F. P.})$$

$$(\tilde{5}) \quad f_n \uparrow f \quad (f_n, f \in M^+) \Rightarrow p(f_n) \uparrow p(f) \quad (\text{S. F. P.})$$

なる ρ (function norm) を考える。以下 $(\tilde{5})$ ((5) は $(\tilde{5})$ より弱い) をみたすものとし, 更に $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$ (disjoint 和) とし, $X \subset \Omega_B$, $\mu(X) > 0$ ならば $\rho(\chi_X) = +\infty$ なる性質を Ω_B はもち, $\exists \Omega_n \uparrow \Omega$, $\rho(\chi_{\Omega_n}) < +\infty$ となる Ω_A を定めることが出来る。trivial case を除くため Ω_B (purely infinite part) は measure 0 という仮定をつけておく。 (5) をみたす ρ は $(\tilde{5})$ をみたす function norm と equivalent になる。 ρ に対して

$$\rho'(f) = \sup \left\{ \int_{\Omega} |fg| d\mu \mid \rho(g) \leq 1 \right\}$$

と定義すれば, ρ' は $(\tilde{5})$ をみたす function norm である。

Ω が ρ に関して purely infinite part をもたなければ ρ' に関してももたない。このとき, $\Omega_n \uparrow \Omega$, $\rho(\chi_{\Omega_n}) < +\infty$ となる可測集合列 Ω_n を ρ -admissible というが, ρ -admissible であると同時に ρ' -admissible な Ω_n がとれる。更に $(\tilde{5})$ をみたせば

$$\rho(f) = \rho''(f)$$

であり, 又つぎの Hölder の不等式が成立する。

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu = \|f \cdot g\|_1 \leq \rho(f) \rho'(g)$$

一般に $L_{\rho'} \subset L_{\rho}^*$ (L_{ρ} の Banach space としての dual)

§2 $B(X, L_{\rho})$ の表現

Banach space X から Banach function space L_{ρ} への連続な linear operator の全体を $B(X, L_{\rho})$ としておく。この operator が抽象的な additive set function と考えられることをみよう。

X^* を X の Banach dual とする。 $\Sigma_0 = \{E \in \Sigma \mid \rho(\chi_E) < +\infty\}$,
 $\Sigma'_0 = \{E \in \Sigma \mid \rho'(\chi_E) < +\infty\}$ とする。 $\mathcal{C}$ は Ω の有限分割の一部とし、 $\mathcal{C}$ のメンバー E_i (i は有限) については $E_i \in \Sigma_0$, かつ $\mu(E_i) < +\infty$ としておく。 更に $f \in L_\rho$ に対して

$$f_{\mathcal{C}} = \sum_{E_i} \left(\int_{E_i} |f| d\mu / \mu(E_i) \right) \chi_{E_i}$$

ここで L_ρ に関する性質 (L) を導入する。

$$(L) \quad \text{任意の } \mathcal{C} \text{ に対して} \quad \rho(f_{\mathcal{C}}) \leq \rho(f)$$

したがって、分割 $\mathcal{C}$ を細かくすると、 $\rho(f_{\mathcal{C}})$ は increasing である。 L_ρ が (L) をもてば $\rho(\chi_E) \geq \frac{\mu(E)}{\mu(E \cup F)} \rho(\chi_F)$ (E, F は有限測度) であり、 $0 < \mu(E) < \infty$ ならば $0 < \rho(\chi_E) < \infty$, 更に $\mu(E) < \infty$ のとき $\mu(E) = \rho(\chi_E) \rho'(\chi_E)$. ところで $\Sigma_F = \{E \mid E \in \Sigma, \mu(E) < \infty\}$ としたら ρ が (L) をもつとき

$$\Sigma_0 \cap \Sigma_F = \Sigma'_0 \cap \Sigma_F$$

更に ρ が (L) をもてば ρ' もまた (L) をもつ。

さて、additive set function $x^*(\cdot): \Sigma'_0 \rightarrow X^*$ を考える。 $x^*(\cdot)$ の variation をつぎのように定義する。

$$V_\rho(x^*(\cdot)) = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\mathcal{C}} \rho\left(\sum_{E_i} [x^*(E_i)x / \mu(E_i)] \chi_{E_i}\right)$$

ところで $V_\rho = \{x^*(\cdot) \mid x^*(\cdot): \Sigma'_0 \rightarrow X^*, x^*(\cdot) \text{ countably additive かつ } \mu(E) \rightarrow 0 \text{ ならば } x^*(E)x \rightarrow 0 \text{ かつ } V_\rho(x^*(\cdot)) < \infty\}$ とおくと、 V_ρ は V_ρ を norm とする normed linear space になる。

定理1 L_p が (5) をみたし, purely infinite part をもたないとき, 性質 (L) をもつならば

$$\mathcal{V}_p \cong \mathcal{B}(X, L_p)$$

証明 $T \in \mathcal{B}(X, L_p)$ とする。 $x^*(\cdot)$ をつぎのように定義する。

$$x^*(E)x = \int_E (Tx)(\omega) d\mu(\omega) \quad E \in \Sigma'_0$$

このとき, $x^*(\cdot) \in \mathcal{V}_p$ である。まず $x^*(\cdot)$ が定義できることは

$$|x^*(E)x| = \left| \int_E (Tx)(\omega) d\mu(\omega) \right| \leq p(Tx) p'(x_E) < \infty$$

$$(E \in \Sigma'_0) \text{ から分る。更に } \|x^*(E)\|_{x^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |x^*(E)x|$$

$$\leq \sup_{\|x\| \leq 1} p(Tx) p'(x_E) = \|T\| p'(x_E) < \infty \text{ から } x^*(E) \in X^*.$$

$x^*(\cdot)x$ は countably additive で μ -continuous である。 E を

$$\text{分割としたとき, } p''((Tx)_E) = p''\left(\sum_{E_i} [x^*(E_i)x/\mu(E_i)] \chi_{E_i}\right)$$

$$\leq p''(Tx). \text{ 故に}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_p(x^*(\cdot)) &= \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_E p\left(\sum_{E_i} [x^*(E_i)x/\mu(E_i)] \chi_{E_i}\right) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} p(Tx) \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

つぎに逆を証明する。 $x^*(\cdot) \in \mathcal{V}_p$ として Radon-Nykodym を

$$\text{使つて } x^*(E)x = \int_E f d\mu \quad (\text{for all } E \in \Sigma'_0) \text{ で表わす。}$$

この f を $dx^*(\cdot)x/d\mu$ で表わす。 $\therefore$ で

$$Tx = dx^*(\cdot)x/d\mu$$

とおくと $T \in \mathcal{B}(X, L_p)$ がつぎのようにして云える。 T が

linear であることは容易に分る。

$$\int_E Tx d\mu = \int_E (dx^*(\cdot)x/d\mu) d\mu = x^*(E)x \quad (E \in \Sigma'_0)$$

故に $(Tx) \cdot \chi_E \in L_1$ (for all $E \in \Sigma'_0$) であって, $\|Tx \cdot \chi_E\| = |x^*(E)x|$.
 g が simple function すなわち $g = \sum \alpha_i \chi_{E_i}$, $E_i \in \Sigma'_0$ のときは
 $Tx \cdot g \in L_1$ で

$$\begin{aligned} \|Tx \cdot g\|_1 &\leq \int \sum_i |\alpha_i| (|x^*(E_i)x|/\mu(E_i)) \chi_{E_i} d\mu \\ &\leq \rho(g) \rho\left(\sum_i (x^*(E_i)x/\mu(E_i)) \chi_{E_i}\right) \leq \rho(g) V_p(x^*(\cdot)) \|x\| \end{aligned}$$

したがって $M_p' = \{f \in L_{p'} \mid f \text{ simple function}\} \ni g \Rightarrow Tx \cdot g \in L_1$
 M_p' の性質から $Tx \cdot g \in L_1$ (for all $g \in L_p'$) が分り, $Tx \in L_p$.
 つぎに T が bounded operator を見よう。

$$\int |g| |Tx| d\mu = \int |g| \lim_E \sum_i (|x^*(E_i)x|/\mu(E_i)) \chi_{E_i} d\mu$$

とくに $g \in L_{p'}$ が simple function のときは

$$= \lim_E \int |g| |(Tx)_E| d\mu.$$

$$\begin{aligned} \rho(Tx) &= \rho''(Tx) = \rho''\left(\lim_E (Tx)_E\right) = \sup_{\rho'(g) \leq 1, g \text{ simple}} \int \lim_E |g| |(Tx)_E| d\mu \\ &= \sup_{\rho'(g) \leq 1} \lim_E \int |g| \sum_i (|x^*(E_i)x|/\mu(E_i)) \chi_{E_i} d\mu \end{aligned}$$

を用いて,

$$\rho''(Tx) \leq \sup_E \rho''\left(\sum_i (|x^*(E_i)x|/\mu(E_i)) \chi_{E_i}\right)$$

$$\text{したがって, } \|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \rho(Tx) \leq V_p(x^*(\cdot)) \quad \text{以上}$$

§3 $B(L_p, X)$ の表現

一般の L_p についてはよく分らない。 $M_p = \{f \in L_p \mid f \text{ simple}\}$
 は L_p の closed linear subspace である。 $L_p = M_p$ の場合を
 考える。 X -valued set function $x(\cdot)$ に対して ρ' -variation
 をつぎのように定義する。

$$W_{p'}(x(\cdot)) = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sup_E p' \left(\sum_E [x^* x(E)/\mu(E_i)] \chi_{E_i} \right)$$

を norm として, つぎの normed linear space を考える.

$$W_{p'} = \{ x(\cdot) \mid x(\cdot) : \Sigma_0 \rightarrow X, x(\cdot) \text{ finitely additive}, \mu(E)=0 \Rightarrow x(E)=0, W_{p'}(x(\cdot)) < \infty \}$$

$x(\cdot)$ に関する積分を定義しよう.

f を simple function あるいは $f = \sum_i \alpha_i \chi_{E_i}$ ($E_i \in \Sigma_0$) のとき, $\int_E f d\mu = \int_E (\sum_i \alpha_i \chi_{E_i}) d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(E_i \cap E)$ と定める.

f を measurable function とし, つぎの性質をもつ simple function の列 f_n がみつかるとき f を $x(\cdot)$ integrable という.

$$(1) \quad f_n \rightarrow f \quad \text{in } x(\cdot) \text{ measure}$$

$$(2) \quad \lambda_n(E) = \int_E f_n d\mu \text{ のとき, } \lambda_n(E) \text{ は uniformly absolutely continuous } (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|\chi\|(E) < \delta \Rightarrow \|\lambda_n(E)\| < \varepsilon (n=1,2,\dots))$$

$$(3) \quad \lambda_n(E) \text{ は equi-continuous } (\forall \varepsilon > 0 \exists E_\varepsilon \in \Sigma, \forall G \subset \Omega - E_\varepsilon, G \in \Sigma, \|\lambda_n(G)\| < \varepsilon (n=1,2,\dots))$$

ただし, variation はつぎの形で入れる.

$$\|\chi\|(E) = \sup_E \left\{ \left\| \sum_E \alpha_i \chi(E_i) \right\| \mid |\alpha_i| \leq 1, E \supset E_i \text{ disjoint} \right\}$$

このとき, $\lambda_n(E) \rightarrow \lambda(E)$ (χ の norm 位相で) が云えるので

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu \text{ と表わし, } f \text{ の } x(\cdot) \text{ による積分という.}$$

定理2 $f \in M_p, x(\cdot) \in W_{p'}$ のとき, f は $x(\cdot)$ integrable.

証明 g が simple function のとき, つぎの不等式が成立する。

$$(A) \quad \left\| \int_E g dx \right\| \leq P(g \chi_E) W_{p'}(x(\cdot))$$

$$(B) \quad \left\| \int_E g dx \right\| \leq \|x\|(E) \cdot \|g\|_\infty$$

$$(C) \quad \|x\|(E) \leq W_{p'}(x(\cdot)) P(\chi_E)$$

$0 \leq f \in M_p$ のとき $\exists f_n$ simple function $0 \leq f_n \uparrow f, P(f-f_n) \rightarrow 0$.

$T_n^\alpha = \{\omega \mid f(\omega) - f_n(\omega) \geq \alpha\} \quad (\alpha > 0)$ とおくと,

$\|x\|(T_n^\alpha) \downarrow$ であり, 不等式 (C) より

$$\|x\|(T_n^\alpha) \leq W_{p'}(x(\cdot)) P(\chi_{T_n^\alpha}) \leq W_{p'}(x(\cdot)) P(\chi_{T_n^\alpha}) < +\infty$$

から $\|x\|(T_n^\alpha)$ は有限値に収束する。これが 0 に収束すれば

$f_n \rightarrow f$ in $x(\cdot)$ measure である。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|(T_n^\alpha) = S_\alpha > 0$ と

仮定すると, $P''(f-f_n) = \sup \left\{ \int |h| |f-f_n| d\mu \mid P'(h) \leq 1 \right\}$

$$\geq \int |f_n - f| \cdot \left| \sum [\alpha_i x^* x(E_i) / \mu(E_i)] \chi_{E_i} / W_{p'}(x(\cdot)) \right| d\mu$$

ここに $|\alpha_i| \leq 1$, E_i は T_n^α の partition で $S_\alpha + \varepsilon \geq \left\| \sum \alpha_i x(E_i) \right\| \geq S_\alpha$

$$\geq (\alpha / W_{p'}(x(\cdot))) \int \left| \sum (\alpha_i x^* x(E_i) / \mu(E_i)) \chi_{E_i} \right| d\mu \quad \|x^*\| \leq 1$$

$$= (\alpha / W_{p'}(x(\cdot))) \sum |\alpha_i x^* x(E_i)| \geq (\alpha / W_{p'}(x(\cdot))) |x^*(\sum \alpha_i x(E_i))|$$

$\exists x^*, \|x^*\| = 1 \quad |x^*(\sum \alpha_i x(E_i))| = \left\| \sum \alpha_i x(E_i) \right\|_X \quad (\text{Hahn-Banach})$

故に n を十分大とすると上の不等式から

$$P''(f-f_n) \geq \alpha S_\alpha / W_{p'}(x(\cdot))$$

一方 $P(f-f_n) = P''(f-f_n) \rightarrow 0$ から矛盾し, $S_\alpha = 0$ すなわち

$f_n \rightarrow f$ in $x(\cdot)$ measure が云える。

f_n に属する $\lambda_n(E)$ が uniformly absolutely continuous になる

ことは、前に述べた不等式 (A), (B) から見易い。

つぎに $\lambda_n(E)$ が equi-continuous になることを見るには $n \geq N$ のとき $P(f - f_n) < \varepsilon / W_{p'}(x(\cdot))$ が成立する N について $f_1, f_2, \dots, f_N$ の support の各々の union を E_ε とおくと、不等式 (A) をもちいて

$$\|\lambda_n(E_\varepsilon)\| \leq P(f_n \chi_{E_\varepsilon}) W_{p'}(x(\cdot)) < +\infty$$

であり、 $G \in \Sigma_0$, $G \subseteq \Omega - E_\varepsilon$ ならば

$$\|\lambda_n(G)\| \leq P(f_n \chi_G) W_{p'}(x(\cdot))$$

より、

$$\|\lambda_n(G)\| \leq P((f - f_n) \chi_G) W_{p'}(x(\cdot)) < \varepsilon \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を得る。したがってこのとき、任意の M_p の要素 f は $x(\cdot)$ に関する積分が定義できる。

定理3 p が (L) をもてば $B(M_p, X)$ と $\overline{W}_{p'}$ とは対応

$$Tf = \int f dx$$

で isomorph になる。また $\|T\| = W_{p'}(x(\cdot))$

証明 $x(\cdot) \in \overline{W}_{p'}$ のとき、 $Tf = \int f dx$ とおけば T は linear operator になることは明白である。 f が simple function のとき、

$$\|\int f dx\| \leq P(f) W_{p'}(x(\cdot)).$$

$$\|T\| = \sup \{ \|Th\| \mid P(h) \leq 1, h \text{ simple function} \}$$

$$= \sup \{ \|\int h dx\| \mid P(h) \leq 1, h \text{ simple function} \} \leq W_{p'}(x(\cdot))$$

逆に $T \in B(M_p, X)$ のとき $x(\cdot) : \Sigma_0 \rightarrow X$ をつぎのように定める。

$$x(E) = T(\chi_E)$$

E を分割とし, $x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1$ のとき, $h = \sum_j \beta_j \chi_{F_j}$ (simple) としたとき,

$$\begin{aligned} \int |h| \sum_E (|x^* x(E_i)| / \mu(E_i)) \chi_{E_i} d\mu &= \sum_i \alpha_i \left[\sum_j (\beta_j |\mu(E_i \cap F_j)| / \mu(E_i)) x^* x(E_i) \right] \\ &= x^* \left(\sum_i \alpha_i \left[\sum_j \beta_j |\mu(E_i \cap F_j)| / \mu(E_i) x(E_i) \right] \right) \leq \left\| \int g dx \right\|_X \end{aligned}$$

ただし, $g = \sum_i \alpha_i \left(\int_{E_i} |h| d\mu / \mu(E_i) \right) \chi_{E_i}$, α_i は $|\alpha_i| = 1$, $\alpha_i x^* x(E_i) = |x^* x(E_i)|$ とする。また $P(g) \leq P(h)$ である。

$$\begin{aligned} P' \left(\sum_E (|x^* x(E_i)| / \mu(E_i)) \chi_{E_i} \right) &= \sup \left\{ \int |h| \sum_E (|x^* x(E_i)| / \mu(E_i)) \chi_{E_i} d\mu \mid P(h) \leq 1, h \text{ simple function} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left\| \int g dx \right\|_X \mid P(g) \leq 1, g \text{ simple} \right\} \\ &= \|T\| \end{aligned}$$

故に, $W_{p'}(x(\cdot)) \leq \|T\|$

§4 L_p^* の表現

$$\tilde{L}_p = \{ f \mid f = \sum_{i=1}^n f_i, f_i \geq 0, P(f_i) \leq 1 \text{ for some } n \}$$

とおき, $N_p = L_p / M_p$ とおき, canonical map を $\lambda : L_p \rightarrow N_p$ として, つぎの条件を考えよう。

(I) $\lambda(\tilde{L}_p)$ は N_p の closed unit ball に等しい。

P が条件(I) をみたしているとき, N_p^* は abstract L-space になり, このとき $z^* \in N_p^*, z^* \geq 0$ に対する norm は

$$\|z^*\| = \sup \{ |z^*(\lambda(f))| \mid f \in \tilde{L}_p \}$$

で与えられる。

N_p^* の表現を考える。 $B(\Omega, \Sigma, \mu)$ を bounded additive set function on Σ (μ -null set で0になる)の全体を表わす。 $\nu \in B(\Omega, \Sigma, \mu)$ に対して $\|\nu\| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\nu(E_i)| \mid \{E_i\} \subset \Sigma, \text{互に disjoint} \right\}$

で norm を定義する。また $0 \leq \psi \leq |\nu|$ で ψ が countably additive なら $\psi = 0$ となる ν の全体を $PB(\Omega, \Sigma, \mu)$ で表わす。実は N_p^* が $PB(\Omega, \Sigma, \mu)$ の closed linear subspace になる。 $Z^* \in N_p^*$ とし

$$Z^* \geq 0 \text{ のとき } \nu(E) = \|Z_E^*\|, \quad Z_E^*(\lambda(f)) = Z^*(\lambda(f) \cdot \chi_E)$$

とあると $\nu \in PB(\Omega, \Sigma, \mu)$ が分る。 $0 \leq \nu \in PB(\Omega, \Sigma, \mu)$ と

$0 \leq f \in L_p$ に対して

$$I_\nu(f) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|\lambda(f \chi_{E_i})\| \nu(E_i) \mid \{E_i\} \text{ は } \Omega \text{ の partition} \right\}$$

と定義すると

$$I_\nu(\alpha f) = \alpha I_\nu(f)$$

$$0 \leq f \leq g \Rightarrow I_\nu(f) \leq I_\nu(g)$$

$$0 \leq I_\nu(f) \leq \|\lambda(f)\| \nu(\Omega)$$

$$I_\nu(f+g) = I_\nu(f) + I_\nu(g)$$

$$I_{a\nu+b\varphi}(f) = a I_\nu(f) + b I_\varphi(f)$$

が成立する。このとき $\nu \in PB(\Omega, \Sigma, \mu)$ に対して $Z^*(\lambda(f)) = I_\nu(f)$ とすれば $Z^* \in N_p^*$ となる。positive でない $Z^* \in N_p^*$ のとき,

$$\nu(E) = \|(Z_E^*)^+\| - \|(Z_E^*)^-\|$$

とおけば $\nu \in PB(\Omega, \Sigma, \mu)$ であつて, このような ν の全体を

P_p で表わすと, 今のべた議論から N_p^* と P_p とは isomorphic

になる。

定理4 ρ が (L) と (I) とをみたすとき

$$L_p^* \cong \mathcal{W}_{p'} \times P_{p'} \quad (\mathcal{W}_{p'} \text{ を定義する } \times \text{ を scalar とする。})$$

ここで norm は $\|(G, \nu)\| = \mathcal{W}_{p'}(G) + |\nu|(\Omega)$ で定義する。

つぎに M_p^* について考えよう。

ν を set function として

$$\|\nu\| = \sup \left\{ \left| \int f d\nu \right| / \rho(f) \mid f \text{ simple } \in M_p \right\}$$

としたとき,

$$\mathcal{V} = \left\{ \nu \mid \nu \text{ additive set function on } \Sigma_0, \mu\text{-null set で } 0, \right. \\ \left. \|\nu\| < +\infty \right\}$$

とおく。 $x^* \in M_p^*$ のとき Σ_0 上の additive set function が存在して $x^*f = \int_{\Omega} f d\nu$ (Dunford-Schwartz の積分) が定義できる。そして $\mathcal{V} \cong M_p^*$ となる。

$\mathcal{V} \times P_{p'}$ 上の norm を

$$\|(v, \varphi)\| = \|v\| + |\varphi|(\Omega)$$

とあらは

定理5 ρ が条件 (I) をみたすとき $L_p^* \cong \mathcal{V} \times P_{p'}$

ここで $x^* \in L_p^*$ ならば

$$x^*f = \int f d\nu + I_{\varphi}(f)$$

と書くことができる。

一般的に云えば $L_p^* \cong M_p^\perp \oplus M_p^\perp$ の orthogonal complement で $M_p^\perp$ の orthogonal complement $\cong M_p^*$ である。

また countably additive set function の全体を C とすれば $C \cong L_p$ であるが、 C と $\mathcal{V}$ とは一般には異なる。

§5 Szegő の定理

ここで Ω は compact Hausdorff space とし、 L_p が Orlicz 空間である場合を考える。 Φ, Ψ を complementary Young 関数として、 μ は regular Borel measure で $\mu(X) = 1$ とする。

$$M_\Phi(f) = \int \Phi(|f|) d\mu$$

$$\text{とし、 } \|f\|_p = \inf_{c>0} \frac{1 + M_\Phi(cf)}{c}, \quad \|f\|_{(p)} = \inf_{c>0, M_\Phi(cf) \leq 1} \frac{1}{c}$$

と function norm ($\|\cdot\|_p$ と $\|\cdot\|_{(p)}$ とは equivalent) を定める。

Ω 上の有界 Borel function の集まり B が log-set とは

$$(1) \quad cf \in B \quad \text{for } c \geq 0, f \in B$$

(2) uniform closure $\{\log |f| \mid f \in B\}$ は real-valued continuous function on Ω を含む。

今 Φ の derivative φ が連続であると仮定する。 $u\varphi(u)$ ($u \geq 0$) の逆関数を M で表わすと

$$u\varphi(u) = \Phi(u) + \Psi(\varphi(u))$$

から μ -integrable $h \geq 0$ に対して

$$(*) \quad \int_\Omega h d\mu = M_\Phi(M(h)) + M_\Psi(\varphi(M(h)))$$

が成立する。このとき $M(h) \in L_p$ であり $\varphi(M(h)) \in L_{p'}$ である。

さて測度 m が μ に属して absolutely continuous のとき,

$$M_{\pm}(\varphi(M(\alpha_m \frac{dm}{d\mu}))) = 1$$

$$M_{\pm}(M(\beta_m \frac{dm}{d\mu})) = 1$$

となる positive numbers α_m, β_m が (*) から存在する。

任意の log-set B に対してつぎの定理が成立する。

定理 6 m が μ に属して absolutely continuous のとき

$$\inf \{ \|f\|_p \mid f \in B \cap D_m^+ \} = \alpha_m \exp \left(- \int_{\Omega} \log M(\alpha_m \frac{dm}{d\mu}) dm \right)$$

$$\inf \{ \|f\|_{(p)} \mid f \in B \cap D_m^+ \} = \exp \left(- \int_{\Omega} \log M(\beta_m \frac{dm}{d\mu}) dm \right)$$

となり, m が μ に属して singular のときはそれぞれ 0 となる。

ここで $D_m^+ = \{ f \mid \text{bounded Borel function, } \int_{\Omega} \log |f| dm \geq 0 \}$ である。

定理が成立する理由の一つは m が μ に属して absolutely continuous のとき, すべての $c \geq 0$ に対して $\int_{\Omega} \log M(c \frac{dm}{d\mu}) dm > -\infty$ が示されるからである。

A を uniformly closed subalgebra of $C(\Omega)$ とする。

$A \ni 1$ と $\{ \log |f|, f \text{ invertible in } A \}$ が real-valued continuous function の集合の中で dense とする。(uniform converge の位相で) m を regular Borel measure on Ω と multiplicative とする。

すなわち $\int_{\Omega} fg dm = \int_{\Omega} f dm \cdot \int_{\Omega} g dm$ for $f, g \in A$.

このような A を logmodular algebra というが, logmodular

algebra は log-set である。 $A_0 = \{f \mid f \in A, \int_{\Omega} f d\mu = 0\}$ とおく。

定理 7 A を log-modular algebra で μ を multiplicative measure on A とする。 μ が μ に 関して absolutely continuous ならば

$$\inf \{ \|1 + f\|_p \mid f \in A_0 \} = a_\mu \exp \left(- \int_{\Omega} \log M \left(a_\mu \frac{d\mu}{d\mu} \right) d\mu \right)$$

$$\inf \{ \|1 + f\|_{(p)} \mid f \in A_0 \} = \exp \left(- \int_{\Omega} \log M \left(\beta_\mu \frac{d\mu}{d\mu} \right) d\mu \right)$$

μ が μ に 関して singular ならば, それぞれとも 1 に 0 になる。

以上は Szegő の定理を L_p (Orlicz ではあるが) で考えたものである。

references

- 1 T. Ando Linear functionals on Orlicz spaces Nieuw. Arch. Wisk
1-16 8 (1960)
- 2 R.G. Bartle A general bilinear vector integral
Studia Math. 15 (1956)
- 3 N. Dunford - J.T. Schwartz Linear operators I
- 4 H.W. Ellis - I. Halperin Function spaces determined by
a levelling length function. Can. J. Math 5 (1953)
- 5 N.E. Gretsky Representation theorems on Banach function
spaces. Mem. Amer. Math. Soc. 84
- 6 K. Hoffman Banach spaces of analytic functions 1962.

- 7 S. Koshi On semi-continuity of functionals I
Proc. Japan Acad. 34 (1958)
- 8 G.G. Lorentz - D.G. Wertheim Representation of linear
functionals on Köthe spaces
Can. J. Math. 5 (1953)
- 9 W.A.J. Luxemburg Banach function spaces Deft. 1955
- 10 K. Urbanik Szegő's theorem for Orlicz spaces
Bull. Acad. Pol. Sci 14 (1966)