

情報伝送についての関数解析的考察

東理大 理工 渡辺 昇 (Noboru Watanabe)

Introduction

Hilbert 空間上の Gauss 測度の研究と、それを通信理論に適用する試みは Rao-Varadarajan (6), Baker (1, 2), Ihara (4), Yanagi (8) 等によってなされており、特に Baker (2) は Skorohod (7) や Rao-Varadarajan らの計算を通し、Gelfand-Yaglom (3) の仕事をもとに、入力を Gauss 測度とし、通信路の雑音を Gauss 測度とする通信路 (Gauss 型通信路) において、相互情報量を定義した。ここでは、この相互情報量が、通常の通信工学的に用いられている微分エントロピーの計算と相いれないことを簡単に述べる。

§1 Hilbert 空間上の Gauss 測度の定義

$\mathcal{H}$ を実可分な Hilbert 空間とし、 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{H}$ の Borel σ -field とする。 μ を、次を満たす $\mathcal{H}$ 上の Borel 確率測度とする。
任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して、

$$\int_{\mathcal{H}} \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$$

次に, $\mathcal{H}$ の平均ベクトル m_μ と, $\mathcal{H}$ 上の共分散作用素 R_μ を定義する。任意

の $\Phi_1, \Phi_2, \Psi \in \mathcal{H}$ に対して,

$$\langle \Phi_1, m_\mu \rangle = \int_{\mathcal{H}} \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \mu(d\Phi_2)$$

$$\langle \Phi_1, R_\mu \Phi_2 \rangle = \int_{\mathcal{H}} \langle \Phi_1, \Psi - m_\mu \rangle \langle \Phi_2, \Psi - m_\mu \rangle \mu(d\Psi)$$

μ の特性関数 $\hat{\mu}$ は, 任意の $\Phi \in \mathcal{H}$ に対して,

$$\hat{\mu}(\Phi) = \int_{\mathcal{H}} e^{i\langle \Phi, \Psi \rangle} \mu(d\Psi), \Psi \in \mathcal{H}$$

と与えられる。 μ が $\mathcal{H}$ 上の Gauss 測度であるとは, 次の条件を満たす $\mathcal{H}$ 上の Borel 測度である。各々 $\Phi \in \mathcal{H}$ に対して, 次の式を満たす実数 m_Φ ,

θ_Φ が存在する。

$$\mu\{\Psi \in \mathcal{H}; \langle \Psi, \Phi \rangle \leq a\} = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_\Phi}} e^{-\frac{(t-m_\Phi)^2}{2\theta_\Phi}} dt$$

このとき, (5) の結果から, 平均ベクトルが 0 の Gauss 測度 μ と

μ の共分散作用素は, 1対1に対応していることがわかる。以下, 平均ベクトルが

m , 共分散作用素が R の Gauss 測度 ν を, $\nu = (m, R)$ と書くこと

にする。 $\mu_1 = (0, \sigma_1)$, $\mu_2 = (0, \sigma_2)$ を2つの Gauss 測度とすると,

$\mu_1 \sim \mu_2$ 又は $\mu_1 \perp \mu_2$ となっている。また, $\mu_2 \ll \mu_1$ ならば,

$$I(\mu_1 | \mu_2)$$

$$= \int_{\mathcal{H}} \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\Phi) \log \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\Phi) d\mu_1(\Phi)$$

$\mu_2 \ll \mu_1$ ならば, $I(\mu_1 | \mu_2) = \infty$ である。

§2 Gauss 型通信路

$(\mathcal{H}_1, \mathcal{B}_1)$ を入力空間, $(\mathcal{H}_2, \mathcal{B}_2)$ を出力空間とする。ここで変換 λ :

$\mathcal{H}_1 \times \mathcal{B}_2 \rightarrow (0, 1)$ が Gauss 型通信路であるとは

(1) 任意の $x \in \mathcal{H}_1$ に対して, $\lambda(x, \cdot)$ は $\mathcal{H}_2$ 上の Gauss 確率測度;

(2) 任意の $Q \in \mathcal{B}_2$ に対して, $\lambda(\cdot, Q)$ は $(\mathcal{H}_1, \mathcal{B}_1)$ 上の可測関数。

μ_1 を入力の Gauss 確率測度とし, μ_0 を通信路の雑音を表わす Gauss 測度とすると, 出力の Gauss 確率測度 μ_2 は, 通信路 λ を用いて次のよ

うに表わせる。任意の $Q \in \mathcal{B}_2$ に対して,

$$\mu_2(Q) = \int_{\mathcal{H}_1} \lambda(x, Q) \mu_1(dx)$$

ここで, $\lambda(x, Q) \equiv \mu_0(Q^x)$ であり,

$$Q^x = \{y \in \mathcal{H}_2; Ax + y \in Q\}$$

である。 μ_1 と μ_2 の合成測度 μ_{12} は, 任意の $Q_1 \in \mathcal{B}_1$, 任意の $Q_2 \in \mathcal{B}_2$ に

対して,

$$\mu_{12}(Q_1 \times Q_2) = \int_{Q_1} \lambda(x, Q_2) \mu(dx)$$

と書ける。

<考察1> 簡単のために $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{R}^2$ とする。 μ_1 と μ_0 を次のように定める。 任意の $x \in \mathcal{H}_1$ に対して,

$$\begin{aligned} & \mu_1 \{x_i \in \mathcal{H}_1; \langle x_i, x \rangle \leq a\} \\ &= \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_{1ii}}} e^{-\frac{t^2}{2\theta_{1ii}}} dt \end{aligned}$$

任意の $y \in \mathcal{H}_2$ に対して,

$$\begin{aligned} & \mu_0 \{y_j \in \mathcal{H}_2; \langle y_j, y \rangle \leq b\} \\ &= \int_{-\infty}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_{2jj}}} e^{-\frac{\tau^2}{2\theta_{2jj}}} d\tau \end{aligned}$$

ここで, $\theta_{1ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, $\theta_{2ij} = \beta_j \delta_{ij}$ とする。 μ_1 の共分散作用素 ρ_1 と μ_0 の共分散作用素 ρ_0 は,

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

となる。 更に, $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への線形変換 A を次のように定める。

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi e \beta_1}{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\pi e \beta_2}{\lambda_2}} \end{pmatrix}$$

これらの仮定より, 出力測度 μ_2 の共分散作用素 ρ_2 は,

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} (\pi e + 1) \beta_1 & 0 \\ 0 & (\pi e + 1) \beta_2 \end{pmatrix}$$

となる。 (1) の定理 2 (B) より $R_{12} = \rho_1^{1/2} V \rho_2^{1/2}$ と置くと,

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi e}{\pi e + 1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\pi e}{\pi e + 1}} \end{pmatrix}$$

を得る。更に、(2)の命題2より、

$$I(\mu_{12} | \mu_1 \otimes \mu_2) = \log(\pi e + 1)$$

となる。ところで、Gauss 型入力の情報量として、通常の通信工学において、

よく用いられている微分エントロピー (10) を用いてみると、

$$\begin{aligned} S(\mu_1) &= - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mu_1}{dm} \log \frac{d\mu_1}{dm} dm \\ &= \log(2\pi e) \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \\ &\leq \log(\pi e) \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

ここで、 m は $\mathbb{R}^2$ 上の Lebesgue 測度である。従って、伝送容量 C は、

$$\begin{aligned} C &= \sup_{\mu_{12}} \{ I(\mu_{12} | \mu_1 \otimes \mu_2) ; \mu_{12} \sim \mu_1 \otimes \mu_2 \} \\ &\geq I(\mu_{12} | \mu_1 \otimes \mu_2) = \log(\pi e + 1) \\ &> \log(\pi e) \geq S(\mu_1) \end{aligned}$$

となり、この $S(\mu_1)$ は Shannon の通信理論 (9) を考えた場合に、

Baker 流の伝送容量の定義と矛盾する。Gauss 型入力の情報量

$S(\mu_1)$ を

$$S(\mu_1) = \sup_{\tilde{A}} \{ - \sum_{A \in \tilde{A}} \nu_1(A) \log \nu_1(A) ; \tilde{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_2) \}$$

とする。ここで $\mathcal{P}(\mathcal{B}_2)$ は、 $\mathcal{B}_2$ -分割の全体を表わす。このように定めると、

$S(\mu_1)$ は発散してしまうことがわかる。故に、伝送容量は、 $S(\mu_1)$ より小さ

くなるが，通信工学的な情報伝送を考える場合において，入力の情報量が無限大というのは意味をもたない。

<考察2> $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ を上記と同じとする。入力の Gauss 測度 μ_1 の共分散作用素 ρ_1 と通信路の雑音 μ_0 の共分散作用素 ρ_0 を次のように定める。

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \rho_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

ここで， $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ とする。また， $\rightarrow$ への線形変換 A を，

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2\beta_1}{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2\beta_2}{\lambda_2}} \end{pmatrix}$$

と取る。すると，出力の Gauss 測度 μ の共分散作用素 ρ は，

$$\rho = \begin{pmatrix} 3\beta_1 & 0 \\ 0 & 3\beta_2 \end{pmatrix}$$

となり，更に V は，

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

となる。従って， $I(\mu_{12} | \mu_1 \otimes \mu_2) = \log 3$ を得る。ところで， ρ_1 は， $\mathcal{H}_1$ の力学系の状態とみることができるので，入力の情報量として，状態 ρ_1 の持つ von Neumann エントロピー (11) $S(\rho_1)$ を採用する。この値は，

$$\begin{aligned} S(\rho_1) &= -\text{tr}(\rho_1 \log \rho_1) \\ &= -\sum_{n=1}^2 \lambda_n \log \lambda_n \\ &\leq \log 2 \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

この通信路の伝送容量 C は,

$$\begin{aligned} C &= \sup_{\mu} \{ I(\mu | \mu_{\Delta}) ; \mu \text{ が合成 Gauss 測度で } \mu \sim \mu_{\Delta} \} \\ &\geq I(\mu_{12} | \mu_1 \times \mu_2) = \log 3 \\ &> \log 2 \geq S(\rho_1) \end{aligned}$$

となり, Shannon の通信理論の伝送容量の定義と矛盾する。

これらの考察より, 共分散作用素を Gauss 測度で近似してやる方法は良い近似ではないことがわかり, また, Gauss 測度から Kullback - Leibler の方法で伝送容量を計算するという方法は, 工学的な通信を考えた場合に妥当でないこともわかった。 詳しい考察は後の論文に書く予定である。

参 考 文 献

1. C.R. Baker, Joint measures and cross-covariance operators, Trans. Amer. Math. Soc. 186 (1973), 273-289.
2. _____, Capacity of the Gaussian channel without feedback, Infor. and Control 37 (1978), 70-89.
3. I.M. Gelfand and A.M. Yaglom, Calculation of the amount of information about a random function contained in another such function, Uspehi Mat. Nauk 12 (1957), 3-52.
4. S. Ihara, On the capacity of the discrete time Gaussian channel with feedback, Trans. Prague Conf. Vol. C, Czechoslovak Academy Sci. (1979), 175-186.
5. H.H. Kuo, Gaussian Measures in Banach Spaces, Springer, Berlin (1975).
6. C.R. Rao and V.S. Varadarajan, Discrimination of Gaussian processes, Sankhyā, Ser. A, 25 (1963), 303-330.
7. A.V. Skorohod, Integration in Hilbert Space, Springer-Verlag Berlin, New York, (1974).

8. K. Yanagi, On some properties of Gaussian channels, J. Math. Anal. Appl. 88 (1982), 364-377.
9. 国沢清典, 情報理論I, 共立出版(情報科学講座), (1983).
10. 梅垣寿春・大矢雅則, 確率論的エントロピー, 共立出版(情報科学講座), (1983).
11. 梅垣寿春・大矢雅則, 量子論的エントロピー, 共立出版(情報科学講座), (1984).