

Affine line の k -form

について.

Northern Illinois Univ. } 上林達治
京大 数研

阪大 理

宮西正直

§ 1. 序

Affine line A^1 は代数幾何学で扱われる variety のうち, 最も簡単なものであるが, 体の descent でどのように振舞うか, よく判っていない. 特に純非分離拡大について判っていない.

本講演では, この問題について幾つかの注意と考察とを与えることを目的とする. 我々の問題は次のように述べられる:

k を標数 $p > 0$ の任意の体, K を k 上の一変数代数函数体とする. K は singular place を持たないかも知れないが, 持ては唯一つであると仮定し, 更に k の代数的閉包 $\bar{k}$ との合成体 $K(\bar{k})$ が $\bar{k}$ -rational になると仮定する. このとき, K の標準形を与えよ.

C を K の k -normal complete model, singular place があれば, それを P_∞ で表わす. singular place がないときは, P_∞ で k の純非分離拡大体上 rational な点と表わす. このとき

$C - P_\infty$ は affine line A^1 の k -form である。 k' で k における k の完全閉包を表わせば, $C \otimes_k k' - P_\infty \cong A^1_{k'}$ (cf. Additive & Multiplicative Theorem 90 of Hilbert). 従って, 我々の問題は次のようにもいい表わせる:

X を k 上で定義された smooth affine curve で, $X_{k'} \cong A^1_{k'}$ となるものとするれば, X はどのような標準型に分類されるか?

§2. 環論的考察.

次の定理を証明する.

Theorem. k を標数 $p > 0$ の体, k' を k の純非分離代数拡大体, A を有限生成 k -algebra, $A' = k' \otimes_k A$ として, 次の条件を仮定しよう: k' は exponent 1 の拡大体, i.e., $k'^p \subseteq k$ で, A' は k' 上一変数多項式環に同型. このとき, A が k 上一変数多項式環に同型になる必要十分条件は A が素元分解環で, $\text{Spec}(A)$ が k -rational point を持つことである.

証明の概要. (1) $[k':k] = p^n$ とすれば, k' が k の exponent 1 の拡大体だから, k' の元 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が存在して, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \notin k$, $k' = k(\lambda_1) \otimes_k \dots \otimes_k k(\lambda_n)$. 従って k' の中に k -derivations $d_1, \dots, d_n$ が存在して; $d_i \neq 0$, $d_i^p = 0$, $d_i d_j = d_j d_i$, $d_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker's delta), $\forall i, j = 1, \dots, n$.

$d_i \in A'$ の中の A -derivations $D_1, \dots, D_n$ に, $D_i = d_i \otimes \text{id}$. と

において拡張する。やはり関係式: $D_i \neq 0$, $D_i^p = 0$, $D_i D_j = D_j D_i$,
 $D_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$ ($\forall i, j = 1, \dots, n$), $A = \{a' \in A' \mid D_i(a') = 0, \forall i\}$
 が成立する。

(2) まわりくどいが次の準備が必要である。 A' を標数 $p > 0$
 の Krull domain, K' を A' の商体, $(D_1, \dots, D_n)$ を K' の中の
 derivations の組で次の条件を満たすものとする: $D_i \neq 0$,
 $D_i^p = 0$, $D_i(A') \subseteq A'$, $D_i D_j = D_j D_i$, $\forall i, j = 1, \dots, n$. $K =$
 $\{x' \in K' \mid D_i(x') = 0, \forall i\}$, $A = K \cap A'$ とおけば, A は
 Krull domain で $A'^p \subseteq A$. 従って, $\overset{A'}{\text{ht}} = 1$ の任意の素 ideal $\mathfrak{f}'$
 の A 上の分岐指数 $e_{\mathfrak{f}'}$ は 1 か又は p である. $C(A)$ 及び $C(A')$
 で, それぞれ A 及び A' の divisor class groups を表わせば, 群
 の準同型 $j: C(A) \rightarrow C(A')$ が, $\sum n_{\mathfrak{f}} \mathfrak{f} \mapsto \sum n_{\mathfrak{f}} e_{\mathfrak{f}'} \mathfrak{f}'$
 ($\mathfrak{f}'$ は $\mathfrak{f}$ の上にある A' の素 ideal) において定義できる. L で
 次のような形の logarithmic derivatives の組のなす p -ヘル群
 を表わそう: $(D_1(z)/z, \dots, D_n(z)/z)$, $z \in K'^* = K' - (0)$, s.t.
 $D_i(z)/z \in A'$, $\forall i$. L の加法は座標毎に行なわれる. $L_0 =$
 $\{(D_1(u')/u', \dots, D_n(u')/u') \mid u' \in A'^* = A' \text{ の可逆元全体}\}$ とすれ
 ば, L_0 は L の部分群. このとき, 次の結果は容易に証明でき
 る, (cf. [4]).

Lemma. 上記の記号と条件を仮定して, 更に A'^* の元,
 $u'_1, \dots, u'_n$ が存在して, $D_i(u'_j) = \delta_{ij}$, $\forall i, j = 1, \dots, n$ と充

たすとしてすれば、次の abel 群の完全列が存在する:

$$0 \longrightarrow L/L_0 \xrightarrow{i} C(A) \xrightarrow{j} C(A').$$

但し $i: L/L_0 \rightarrow C(A)$ は $(D_1(\mathbb{Z})/\mathbb{Z}, \dots, D_n(\mathbb{Z})/\mathbb{Z}) \mapsto \sum_{\mathfrak{p}'} (v_{\mathfrak{p}'}(\mathbb{Z})/e_{\mathfrak{p}'}) (\mathfrak{p}' \cap A)$ ($v_{\mathfrak{p}'}$ は $\mathfrak{p}'$ で定まる K' の normalized valuation) で定義される。又、 j が surjective になる必要十分条件は、 A' の任意の ht=1 prime ideal $\mathfrak{p}'$ について、 $e_{\mathfrak{p}'} = 1$ となることである。

(3) A が k 上一変数多項式環に同型なれば、 A が素元分解環で、 $\text{Spec}(A)$ が k -rational point を持つことは明らかであるから、逆を証明しよう。上記(2)の Lemma と (1) の状況に応用しよう。従ってより $C(A) = (0)$ であるから、 $L = L_0$ 。一方 A には極大 ideal $\mathfrak{m}$ が存在して、 $A/\mathfrak{m} = k$ 。 A' は A 上整だから、 A' の極大 ideal $\mathfrak{m}'$ が存在して、 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap A$ 、 $A'/\mathfrak{m}' = k'$ 。さて、 $A' = k'[t]$ とすれば、 A' は rank p^n の自由 A -加群でもあり、rank p^{n+1} の自由 $k[t']$ -加群でもある。故に $A \cong k[t']$ 。 $A - k[t']$ の元 f を t に関する次数 (A' の中で考えて) が最小になるようにとる。 $f = \alpha'_0 + \alpha'_1 t + \dots + \alpha'_n t^n$, $\alpha'_i \in k'$ と書ける。必要ならば t を $t - (t \bmod \mathfrak{m}')$ で置きかえて、 $t \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}'}$ と仮定してもよい。このとき、 $f \equiv \alpha'_0 \pmod{\mathfrak{m}'}$ $\in k$ 。従って f を $f - \alpha'_0$ で置き換えて、 $f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$ としよよい。故に $f = t^\delta g$, $g = \alpha'_\delta + \dots + \alpha'_n t^{n-\delta}$, $\alpha'_\delta \neq 0$, $\delta \geq 1$

D_i を f に作用させて, $0 = D_i(f) = t^{\Delta} D_i(g) + \Delta t^{\Delta-1} g D_i(t)$.
 よって, $t D_i(g) = -\Delta g D_i(t)$. もし $p \mid \Delta$ ならば, $D_i(g) = 0$
 $\forall i$. 故に $g \in A$. $\deg_t g < \deg_t f$ 故に, $g \in k[t^p]$.
 $\therefore f = (t^{p/p})^p g \in k[t^p]$. これは矛盾であるから, $p \nmid \Delta$.
 故に $t \mid D_i(t)$, i.e. $(D_1(t)/t, \dots, D_n(t)/t) \in L$. $L = L_0$ 故に
 $\exists \beta \in A'^* = k'^*$, s.t. $D_i(t/\beta) = 0, \forall i$. $u = t/\beta$ とおけば;
 $A' = k'[u]$ で, 容易に $A = k[u]$ がわかる. 証終.

定理の2つの条件のうち, どの一つを省略しても定理は成立しないことを注意しておく.

§3. 幾何学的考察.

X が affine line A^1 の k -form のとき, X の k -normal completion を C , $P_{\infty} = C - X$ とおく. P_{∞} は one-place point で, singular point があれば P_{∞} である.

Lemma 1. P_{∞} は k の純非分離代数環大体上 rational である.

C は k 上 proper 故に, その Picard scheme $\underline{\text{Pic}}_{C/k}$ は存在し, 単位元を含む連結成分 $\underline{\text{Pic}}_{C/k}^{\circ}$ は k 上有限生成な group scheme である. $\underline{\text{Pic}}$ の性質のうち, 我々の使う性質は次の通りである.

Lemma 2. k 上 proper scheme X が条件: $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$,

X が k -rational point, を充たすならば, 次の事柄が成立する。

$$(1) \quad \forall S \in (\text{Sch}/k) \text{ について, } \text{Pic}(X_S) \cong \underline{\text{Pic}}_{X/k}(S) \times \text{Pic}(S).$$

$$\text{但し } \text{Pic}(X_S) = H^1(X_S, \mathcal{O}_{X_S}^*) \text{ etc.}$$

$$(1)' \quad k \text{ の任意の拡大体 } k' \text{ に対して, } \text{Pic}(X_{k'}) = \underline{\text{Pic}}_{X/k}(k').$$

$$(2) \quad k \text{ の任意の拡大体 } k' \text{ について, } \underline{\text{Pic}}_{X_{k'}/k'} \cong \underline{\text{Pic}}_{X/k} \otimes k'.$$

Lemma 1 の前の記号法に戻って, 次の二つの結果を得る。

Lemma 3. $\underline{\text{Pic}}_{C/k}^\circ$ は smooth affine k -group scheme である。更に $X = C - P_\infty$ が k -rational point P_∞ をもてば, k -schemes の morphism $i: C - \{P_\infty\} \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{C/k}^\circ$ が存在して, k の任意の拡大体 k' と $\forall Q \in C(k') - P_\infty$ について, $i(Q) = Q - P_\infty$ 。

Lemma 4. C を smooth complete k -curve として, 次の条件を仮定する: k の純非分離代数拡大体 k' が存在して, $C \otimes_k k'$ は k' -rational. 標数 $p=2$ ならば, C は k -rational point をもつと仮定する。このとき C は k -rational である。

$p=2$ の場合, C に k -rational point が存在することを仮定しなければ, Lemma 4 は成立しない。反例. $k = \mathbb{F}_2(t, u)$, t, u は変数. C を方程式 $Y^2 = tZ^2 + XZ + uX^2$ で定義される plane curve とすれば, C は k -rational ではない。

Lemmas 1 ~ 4 を併せれば, 次の結果を得る.

Theorem 5. X, C, P_0, P_∞ を Lemma 3 のように取れば, 次の条件は互いに同値である:

(1) $i: C - \{P_\infty\} \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{C/k}^\circ$ は closed immersion で $\underline{\text{Pic}}_{C/k}^\circ$ は group scheme として, i の image によって生成される.

(2) $\dim \underline{\text{Pic}}_{C/k}^\circ > 0$, i.e., C の arithmetic genus > 0 .

(3) C は k -rational ではない.

(4) $C - \{P_\infty\}$ は smooth complete k -curve に embed することができない.

実際, $\underline{\text{Pic}}_{C/k}^\circ \otimes_{\bar{k}} \bar{k}$ は $C \otimes_{\bar{k}} \bar{k}$ の generalized Jacobian variety になる. ($\bar{k}$ は k の代数的閉包). generalized Jacobian variety の性質より次の結果を得る.

Theorem 6. $\underline{\text{Pic}}_{C/k}^\circ$ は unipotent k -group である. より精密には, $\underline{\text{Pic}}_{C/k}^\circ$ は 有限次元 Witt vector groups の直積の k -form である. $\underline{\text{Pic}}_{C/k}^\circ \neq 0$ ならば, $\underline{\text{Pic}}_{C/k}^\circ$ は k -wound group (i.e., k -morphism $A^1 \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{C/k}^\circ$ が存在すれば, それは constant morphism) である.

Theorem 6 の後半を証明するのには, 次の結果を使う.

Lemma 7. V を k -regular proper integral scheme, U を smooth k -scheme として, 次の条件が満たされると仮定

しよ) : V は k -rational point をもつが, k 上 generically separable である. そのとき, 任意の rational map $f: V \rightarrow \text{Pic}_{V/k}$ は V のすべての点で正則である.

A^1 の k -forms を完全に分類することは, 今のところできていないが, arithmetic genus が 0 または 1 ならば可能である.

Genus 0 の場合. a を $k-k^p$ の元, n を自然数として, (a, n) に対して, $\mathbb{P}^1$ の embedding $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^{p^n}$ を $t \mapsto (1, t, \dots, t^{p^n-1}, t^{p^n}-a)$ で与える. 但し t は $\mathbb{P}^1$ の non-homogeneous 座標である. $\mathbb{P}^1$ の $t^{p^n}=a$ で定まる点を P_∞ として, $X_{a,n} = \varphi(\mathbb{P}^1 - \{P_\infty\})$ とおく.

Theorem 8. (1) A^1 の k -rational k -form は A^1 または $X_{a,n}$ に k -同型である.

(2) $X_{a,n}$ は A^1 に同型でない, A^1 の k -rational k -form である.

(3) $X_{a,n} \cong X_{b,m} \iff$ (i) $m=n$

(ii) $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in k^{p^n}$ s.t.
 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad \alpha a + \beta / \gamma a + \delta = b.$

標数 $p \geq 3$ ならば, arithmetic genus が 0 である A^1 の k -form は必ず k -rational である.

Genus 1 の場合. 次の定理にまとめられる.

Theorem 9. A^1 の k -form が k -rational point をもち, arithmetic genus が 1 ならば, 次の Russel 型 k -groups のどれかに同型である:

$$(1) \quad p=3, \quad y^3 = x - \gamma x^3, \quad \gamma \in k - k^3$$

$$(2) \quad p=2, \quad y^4 = x + \beta x^2 + \gamma^2 x^4, \quad \beta \text{ または } \gamma \in k - k^2 \\ (\beta, \gamma \in k).$$

arithmetic genus が 1 の A^1 の k -form が k -rational point を持たなければ, それは上記の Russel 型 k -group の principal homogeneous space である, (cf. [2]).

Remark. $G_a \times G_a$ の中で, 方程式

$$y^{p^n} = x + a_1 x^p + \cdots + a_n x^{p^n}, \quad a_1, \dots, a_n \in k$$

$$a_1, \dots, a_n \text{ のどれかは } \notin k^p$$

で与えられる, $\dim = 1$ の k -group を Russel 型 k -group といい, (cf. [2]). Russel 型 k -group は A^1 の k -form である. A^1 の k -form がいつ Russel 型 k -group になるかという問題に対する答えは次の定理で与えられる.

Theorem 10. X, C, P_0, P_∞ を Lemma 3 と同じように取れば, 次の条件は同値である:

(1) X は P_0 を単位元にするような k -group scheme の構造をもつ.

(2) X は Russel 型 k -group に k -同型である。

(3) k_s を k の分離代数閉包とすると, $\#(\text{Aut}_{C/k}(k_s)) = \infty$

もし X の arithmetic genus $\neq 0$ ならば, 上の条件は次の条件に同値である;

(4) 1次元 unipotent k -group H と surjective homom.

$\rho: \text{Pic}_{C/k}^\circ \longrightarrow H$ が存在して, $\rho \cdot i = X$ から H への k -同型,
 $\rho \cdot i(P_0) = H$ の単位元。

Conjecture. A^1 の k -form X は, X の arithmetic genus ≥ 2 ならば, ある Russel 型 k -group の principal homogeneous space である。

定理 7 を考慮すれば, 次の結果を得る。

Theorem 11. G が Russel 型 k -group, $K = k(G)$ が k 上の G の函数体ならば, K が k -rational になる必要十分条件は, $p=2$ で G の定義方程式: $y^2 = x + ax^2$, $a \in k - k^2$ となることである。

Theorem 12. G は Russel 型 k -group, C は G の k -normal completion, $P_\infty = C - G$ とおけば, 次の二つの完全列を得る:

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \text{Pic}(C) \longrightarrow \text{Pic}(G) \longrightarrow 0$$

$$(2) \quad 0 \longrightarrow \text{Pic}_{C/k}^\circ(k) \longrightarrow \text{Pic}(G) \longrightarrow \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

ここで p^r は, $\bar{k}$ を k の代数閉包とすると, $\bar{k}(G)$ の P_∞ 上の唯一つの place が $k(G)$ 上持つ分岐指数である。もし G が

定義式 $y^{p^n} = x + a_1 x^p + \dots + a_m x^{p^m}$ とするに注意して,
 $p^r \leq p^n$.

文 献

- [1] P. Samuel; On unique factorization domains, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1964.
- [2] P. Russell; Forms of the affine line and its additive group, Pacif. J. Math., 32 (1970), 527-539.