

Unfoldings and Determinacy of Analytic Foliation Singularities

北大理(教養) 諏訪 立雄 (T. SUWA)

我々の目的は, Mather 達によつて得られた関数芽の特異点に関する結果を余次元 1 の葉層構造芽の場合に拡張することである. 関数芽の場合は, Malgrange 準備定理, 中山の補題等を用いて, $\mathbb{C}^\infty$ の場合も同様に扱えるが, 葉層構造の場合は今だに困難が大きく, 複素解析的な場合のみを扱う. ここでは有限既定性問題を考えるが, これは開折理論とも深く関するもので, 開折理論にもふれなくては, この問題はより詳しく, あるいは微分方程式の線型化, 標準化の問題として Poincaré, Siegel 等の人々により古くから研究されてゐるものである.

1. $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ は n 変数収束円環数環とし, $m \in \mathbb{N}$ とある極大 ideal とする. $\mathcal{L}_n$ は双正則写像芽:
 $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ のなす群とする. 芽 $f \in \mathcal{O}_n$ から k -既定であるとは, $j^k g = j^k f$ なる $\mathcal{O}_n$ の任意の芽 g に対して,

$g = \varphi^* f$ となる L_n の元 φ が存在することである. $J(f)$ は $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ で生成された $\mathcal{O}_n$ の ideal とし, 次の条件を考へる:

$$(1.1) \quad m^k \subset m J(f),$$

$$(1.2) \quad f \text{ は } k\text{-既定},$$

$$(1.3) \quad m^{k+1} \subset m J(f),$$

$$(1.4) \quad j^* f_t = j^k f, \quad f_0 = f, \quad \text{なる任意の族 (変形, 開折)} \{f_t\} \text{ に対し, } L_n \text{ の元 } \varphi_t \text{ が存在し, } f = \varphi_t^* f_t \text{ が } 0 \text{ に十分近いか } t \text{ に対して成り立つ.}$$

そうすると, 次の implications

$$(1.1) \Rightarrow (1.2) \Rightarrow (1.3) \Rightarrow (1.4)$$

は周知である (例へば [3], [11]). 条件 (1.3) は次のように幾何学的に解釈できる. 可成り, $m J(f)$ は f の L_n -軌道 $L_n f$ の f における接空間, m^{k+1} は $\{g \in \mathcal{O}_n \mid j^k g = j^k f\}$ の f における接空間であるので, (1.3) は infinitesimal な k -既定性ということができる. 以下 implication $(1.3) \Rightarrow (1.4)$ を 葉層構造芽の場合に拡張する.

2. $\mathcal{O}_n, L_n$ は前節と同様とし, Ω_n, Θ_n をさしおき, $\mathcal{O}_n$ の 0 に属する正則 1 形式芽および正則ベクトル場芽のな

す $\mathcal{O}_n$ -加群とす。また $U_n \in \mathcal{O}_n$ の units のなす群とす。群 L_n は U_n に引きもどしにより自然に作用して、
 したがって、半直積 $G_n = U_n \ltimes L_n$ が構成できた。 G_n は
 次に Ω_n に自然に作用する：

$$G_n \times \Omega_n \rightarrow \Omega_n, \quad ((u, \varphi), \omega) \mapsto u \varphi^* \omega.$$

Ω_n の芽 ω と $\mathcal{O}_n$ の ideal I に対し、

$$L_I(\omega) = \{ L_X \omega \mid X \in I \cdot \mathcal{O}_n \}$$

とかくと次を得る。

(2.1) 補題. 正則 1 形式芽 ω の G_n -軌道 $G_n \omega$ の ω に
 おける接空間 $= L_n(\omega) + \mathcal{O}_n \omega$.

3. $F = (\omega) \in \mathbb{C}^n$ の 0 における余次元 1 の葉層構造とす。
 すなわち、 F は Ω_n の rank 1 の自由部分 $\mathcal{O}_n$ -加群で、
 積分可能 $d\omega \wedge \omega = 0$ を生成元 ω としてもつものがある ([4],
 [5], [6])。 $S(F) = \{x \mid \omega(x) = 0\}$ は F の特異点集合
 とし、以下 $\text{codim } S(F) \geq 2$ とする。 $F = (\omega)$ の開折と
 は、 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m = \{(x, t)\}$ の 0 における余次元 1 の葉層構造
 $\tilde{F} = (\tilde{\omega})$ で、 $t^* \tilde{\omega} = \omega$ を生成元 $\tilde{\omega}$ としてもつものがある。
 これは L は $L(x) = (x, 0)$ と与えられる $\mathbb{C}^n$ の
 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ への埋込みである。 $\mathbb{C}^m$ は $\tilde{F}$ の 105x7 空間とよぶ。

(3.1) 定義 $\mathcal{F} = (\tilde{\omega})$, $\mathcal{F}' = (\tilde{\omega}')$ $\in \Sigma \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ $\mathbb{C}^m = \{t\}$,
 $\mathbb{C}^l = \{s\}$ $\in$ 105x9 空間とする. Γ の開弁とする.

(I) $\mathcal{F}'$ から $\mathcal{F}$ への R -morphism は次で示す
 (Φ, φ, u) から成る:

(a) Φ, φ は次の図式で可換にする写像

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^l, 0) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{C}^l, 0) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{C}^m, 0) \end{array}$$

従ってある写像 $\psi: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ に対し,
 $\Phi(x, s) = (\psi(x, s), \varphi(s))$ とかける. u は
 $\mathcal{O}_{n+l}$ の unit.

(b) $\psi(x, 0) = x$, $u(x, 0) = 1$

(c) $u \tilde{\omega}' = \Phi^* \tilde{\omega}$.

(II) $\mathcal{F}'$ から $\mathcal{F}$ への RL -morphism は次で示す

$(\Phi, \varphi, u, \alpha)$ から成る: Φ, φ, u は (I) と同じ
 γ , (a), (b) を満たす. α は $\mathcal{O}_{n+l}^l$ の元

$$(c)' \quad u \tilde{\omega}' = \Phi^* \tilde{\omega} + \sum_{k=1}^l \alpha_k ds_k$$

を満たす.

R-morphism は関数場 a 場合の (strict) right-morphism a , RL-morphism は right-left-morphism の拡張である。

$\tilde{F} = (\tilde{\omega}) \in F = (\omega)$ の開折とし, 簡単のため $1 \leq p \leq n$ 空間は一変えとする. $\tilde{\omega}$ を t の級数に展開し

$$(3.2) \quad \tilde{\omega} = \sum_{p \geq 0} \omega^{(p)} t^p + \sum_{p \geq 1} p \ell^{(p)} t^{p-1} dt, \quad \omega^{(0)} = \omega$$

と表わす. $\omega^{(p)}$ は Ω_n の元で, $\ell^{(p)}$ は $\mathcal{O}_n$ の元である. 積分可能条件 $d\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0$ より

$$(3.3) \quad \ell^{(1)} d\omega + (\omega^{(1)} - d\ell^{(1)}) \wedge \omega = 0$$

を得るが, 逆に (3.3) から $d\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} \equiv 0 \pmod{t^2, t dt}$ が示される. 従って

$$I(\omega) = \{ \ell \in \mathcal{O}_n \mid \ell d\omega = \eta \wedge \omega, \quad \exists \eta \in \Omega_n \}$$

と表わし, $I(\omega)$ は F の 1 次開折のなる集合と解釈する. さらに

$$J(\omega) = \{ \langle X, \omega \rangle \mid X \in \mathcal{O}_n \} \quad (\text{Jacobian ideal})$$

$$K(\omega) = \{ g \in \mathcal{O}_n \mid g d\omega = dg \wedge \omega \} \quad (\text{積分因子})$$

$$\Omega(\omega) = \{ \theta \in \Omega_n \mid \exists \ell \in \mathcal{O}_n, \theta \wedge \omega = d\ell \wedge \omega - \ell d\omega \}$$

と表わす.

積分可能条件 $d\omega \wedge \omega = 0$ より次を得る.

(3.4) 補題. $\mathcal{O}_n$ の任意の元 X に対し,

$$\langle X, \omega \rangle d\omega + (L_X \omega - d\langle X, \omega \rangle) \wedge \omega = 0.$$

(3.5) 系. $J(\omega) \subset I(\omega).$

(3.6) 系. $\forall \omega \in \mathcal{O}_n$ に対し, $L_X \omega \in \Omega(\omega)$ 従って
2 特には

$$L_m(\omega) + \mathcal{O}_n \omega \subset \Omega(\omega).$$

(3.7) 補題. $\mathcal{O}_n$ の任意の ideal I に対し

$$I(\omega)/I \cdot J(\omega) + K(\omega) \cong \Omega(\omega)/L_I(\omega) + \mathcal{O}_n \omega.$$

商 $I(\omega)/J(\omega)$, $I(\omega)/J(\omega) + K(\omega)$ は $\mathcal{O}_n$ 上の,
 R -morphisms, RL -morphisms に関する F の一次
開折の同値類に一致する. また $\mathcal{O}_n$ の場合には, 普遍性定
理が有りたつ ([4], [10]). すなわち, $F = (\omega)$ から, $\mathbb{C}^m$
 $= \{ (t_1, \dots, t_m) \}$ を 105×4 空間とする $F = (\omega)$ の開折 γ ,
 $h_k (\in \mathcal{O}_n)$, $k = 1, \dots, m$, $\sum dt_k$ の係数としたとき,
 $h_1, \dots, h_m$ の類が $I(\omega)/J(\omega)$ 又は $I(\omega)/J(\omega) + K(\omega)$
を生成するとは, $\mathcal{O}_n$ 上の R -morphism 又は RL -morphism
に関し 普遍である. 以下 2, 3 の特別な場合を考える.

(I) $\omega = dt$, $t \in \mathcal{O}_n$, のとき. $\exists a \in \mathcal{O}_n$ 又は, $I(\omega) = \mathcal{O}_n$,

$J(\omega) = J(f)$, $K(\omega) = f^* \mathcal{O}_1$ であり, $F = (\omega)$ の開折理論は f の開折理論と同値である。

(II) $\omega = gdf - fag$, $f, g \in \mathcal{O}_n$ のとき. このとき $I(\omega) = (f, g)$ であり, $F = (\omega)$ の開折理論は有理型関数 f/g の開折理論と同値であることが示された ([7]).

(III) $\omega = f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$, $f_i \in \mathcal{O}_n$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ のとき.

このときは, $I(\omega) = (f_1 \cdots f_p)$ ($f_i \rightarrow \hat{f}_i$ のとき) であり, 一般の f_i, λ_i に対しては, $F = (\omega)$ の開折理論は多価関数 $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ の開折理論と同値であることが示された ([8]).

4. 一般に, Ω_n の元 $\theta = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ に対して $j^k \theta \in$, $j^k \theta = \sum_{i=1}^n j^{k-1} f_i \cdot dx_i$ により定め, $J^k \Omega_n \subset \Omega_n$ の k -jet のなす空間とし, 写像 $\pi_k : \Omega_n \rightarrow J^k \Omega_n$ を $\pi_k(\theta) = j^k \theta$ により定める。

$(\mathbb{C}, 0) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 空間とする $F = (\omega)$ の開折 $\tilde{F} = (\tilde{\omega})$ を考え, $L_t \in L_t(x) = (x, t)$ で定義される $\mathbb{C}^n$ の $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ への埋込みとし, $\omega_t = L_t^* \tilde{\omega}$ とする. $\tilde{\omega} \in (3.2)$ のように表わしておく. このとき, $j^k \omega_t = j^k \omega$ かつ, 任意の $(0 \in \mathbb{C})$ に対して成り立つと仮定すると

$$\omega^{(p)} \in \pi_k^{-1}(0), \quad p \geq 1$$

である。特に一次の項 ω^1 は $\pi_k^{-1}(0) \cap \Omega(\omega)$ の元である。従って我々の場合, infinitesimal k -既定性の条件は

$$(4.1) \quad \pi_k^{-1}(0) \cap \Omega(\omega) \subset L_m(\omega) + \mathcal{O}_n \omega$$

と表わせる。さらに

$$I^{(k+1)}(\omega) = \{ h \in \mathcal{O}_n \mid \exists \theta \in \pi_k^{-1}(0), \theta_1 \omega = dh_1 \omega - h d\omega \}$$

とすると (4.1) は

$$(4.2) \quad I^{(k+1)}(\omega) \subset m J(\omega) + K(\omega)$$

と同値である。これはまた

$$(4.3) \quad m^{k+1} I(\omega) \subset m J(\omega) + K(\omega)$$

と同値であることは確かと考へられる。

(4.4) 定理. $F=(\omega) \in \mathbb{C}^n$ の 0 における余次元 1 の葉層構造とする。もし F が infinitesimally に k -既定, すなわち (4.1) が成り立つならば, F の unfolding $F_+=(\omega_+)$ で $j^k \omega_+ = j^k \omega$ の任意の t について成り立つものは F の自明な開折に RL-isomorphic である。従って特に, t が 0 に近くなる t に対し $F_+=(\omega_+)$ と $F=(\omega)$ とは葉層構造として同型である。

証明に 12 次を用いた $(\mathfrak{D}, u, \alpha)$ を構成する。

(a) Φ は次の図式を可換にする写像芽:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\text{id}} & (\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

従、2 点の写像芽 $\varphi: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ に対し、
 $\Phi(x, t) = (\varphi(x, t), t)$ とかける。 u, α は $\mathcal{O}_{n+1}$ の元
 u は unit.

(b) $\varphi(x, 0) = x$, $u(x, 0) = 1$, $\varphi(0, t) = 0$.

(c) $\omega = u \Phi^*(\tilde{\omega} + \alpha dt)$.

$\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^n f_i(x, t) dx_i + h(x, t) dt$ と書くとき、各 t に
 対し、 $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$, $u_t(x) = u(x, t)$, $\alpha_t(x) = \alpha(x, t)$
 $h_t(x) = h(x, t)$ とする。 (c) は次の 2 つの方程式と
 同値である。

$$(c-1) \quad u_t \varphi_t^* \omega_t = \omega,$$

$$(c-2) \quad \sum_{i=1}^n f_i(\varphi(x, t), t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \varphi_t^* \alpha_t + \varphi_t^* h_t = 0.$$

さらに条件 (b) の下で (c-1) は

$$(c-1)' \quad \frac{\partial u_t}{\partial t} \cdot \varphi_t^* \omega_t + u_t \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_t^* \omega_t) = 0$$

と同値である。従、2 微分方程式 (c-1)', (c-2) を解けば

良いわけであるが, まず次のように λ 方程式に線型化する:

(4.5) 補題. 写像 $\xi: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0 \times \mathbb{C}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ と

関数 $g \in \mathcal{O}_{n+1}$ を

$$(C-3) \quad g_t \omega_t + L_{X_t} \omega_t + \frac{\partial}{\partial t} \omega_t = 0,$$

$$(C-4) \quad \langle X_t, \omega_t \rangle + \alpha_t + h_t = 0$$

を満たすものがあつたならば, (a), (b), (c) を満たす ω, u, α が存在する. ところで $X_t = \sum_{i=1}^n \xi_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

実際上のような ξ, g があつたならば,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi(\varphi(x, t), t), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g(\varphi(x, t), t)$$

を初期条件 $\varphi(x, 0) = x, v(x, 0) = 0$ の下で解き, $u = e^v$ とすればよい.

以上より, 微分 λ 方程式 (C-3) および λ 方程式 (C-4) を満たす ξ, g, α を求めればよい. 我々は中級数の λ 法により求める. まず, ξ, g, α の形式的中級数としての解の存在を示し, 次は収束解の存在を示す. 収束解の存在には, 小平-Spencer の優級数に modify したものと比較によらず,

評価には Malgrange の特異点係定理 ([2]) を用い, 次のように行う. 可なり, θ が Ω_n の元で a が $\mathcal{O}_n$ のとき,

$$(4.6) \quad g\omega + L_X \omega + \theta = 0,$$

$$(4.7) \quad \langle X, \omega \rangle + \alpha + a = 0$$

をみたし、うまく評価のとき X, α を求めたい。
あるか、まず (4.7) から X, α を求め次に (4.6) から g を求める。

(4.4) 定理の条件にさらに $K(\omega) \subset mJ(\omega)$ を加
えると、 F は F の自明な開折に $\mathbb{R}$ -isomorphic になる。
また、3 節で論じた場合 (I), (II), (III) の場合には、条件 (4.1)
(又は (4.2)) と $m^{k+1} \cdot I(\omega) \subset J(\omega)$ をあまかえたと
各種関数に対する (局所) 有限安定性が得られる。この場合には
[1] にも同様の結果がある。

References

- [1] D. Cerveau et J.-F. Mattei, Formes intégrables holomorphes singulières, Astérisque 97, Soc. Math. France, 1982.
- [2] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, I. Codim. un, Publ. Math. I.H.E.S. 46, 163-173 (1976).
- [3] J. Mather, Unpublished notes on right equivalence.
- [4] T. Suwa, A theorem of versality for unfoldings of complex analytic foliation singularities, Invent. math. 65, 29-48 (1981).
- [5] T. Suwa, Singularities of complex analytic foliations, Proc. Symposia in Pure Math. AMS 40, 551-559 (1983).
- [6] T. Suwa, Unfoldings of complex analytic foliations with singularities, Japan. J. Math. 9, 181-206 (1983).
- [7] T. Suwa, Unfoldings of meromorphic functions, Math. Ann. 262, 215-224 (1983).
- [8] T. Suwa, Unfoldings of foliations with multi-form first integrals, Ann. Inst. Fourier (to appear).

appear).

[9] T. Suwa, Determinacy of analytic foliation germs, in preparation.

[10] T. Suwa, The versality theorem for RL-morphisms of foliation unfoldings, in preparation.

[11] G. Wassermann, Stability of unfoldings, Lecture notes in Math. 393, Springer 1974.