

(続紙 1)

京都大学	博士（ 情報学）	氏名	脊戸 和寿
論文題目	On the Complexity of the Hajos Calculus for Planar Graphs （平面グラフに対するHajos計算論法の複雑さについて）		
(論文内容の要旨)			
Hajos計算論法とは、4頂点の完全グラフを基に、3種類のルールをグラフに適用していくことにより、全ての3彩色不能なグラフを構成する非決定性手続きであり、証明複雑さの分野において現在知られている最強の証明系であるExtended Fregeと多項式等価であることが1995年にPitassiによって示された。 よって、計算量理論における重要な未解決問題であるExtended Fregeの超多項式下界の証明は、Hajosに対する超多項式下界の証明に還元された。しかし依然としてそれは困難な問題で、その様な超多項式下界を持つグラフ族がどのような性質をもつのか等々、ほとんど何も分かっていない。 本研究では生成されるグラフを制限し、より限定された操作のみを許した新たな計算論法として、平面Hajos計算論法を提案している。平面グラフに限定することで、グラフの構造をより簡単かつ制限の強いものにして、問題解決の糸口を得たいという動機に基づいている。 1章では、上記の様な研究の動機、関連研究や既存結果、更には研究の歴史が述べられており、2章では以後の議論に必要な定義や基礎的事項が与えられている。 3章ではHajos計算論法によって導出されるグラフを平面グラフに限定したPHC という計算論法が提案されている。これは導出途中のグラフに対しても平面グラフでなければいけないという非常に強い制約を課している。このPHCが、全ての3彩色不能な平面グラフを生成可能であることを示し、かつ、もしHajos計算論法が全ての3彩色不能なグラフを多項式ステップで生成可能であれば、そのときに限り、PHCは全ての3彩色不能な平面グラフを多項式ステップで生成できることが示されている。これにより、問題の解決には新たな計算論法であるPHCにおいて多項式下界をもつグラフ族を考えれば十分であることが結論づけられている。 4章では3章で導入されたPHCにさらに制限を加えたPHC(d)という計算論法が提案されている。これは導出過程に現れるグラフが全て平面グラフかつグラフの最大次数がdを超えないという制約をもつ計算論法である。まず、PHC(4)では構成できないグラフの存在を示し、その後PHCとの計算量の関係を以下のように示している。PHCが全ての3彩色不能な最大次数が4である平面グラフを多項式ステップで導出できるのであれば、そのとき、全ての3彩色不能な平面グラフは多項式ステップのPHCの導出法をもち、もし、PHCが全ての3彩色不能な平面グラフを多項式ステップで導出できるなら、そのとき、PHC(d+2)は全ての3彩色不能な最大次数がdの平面グラフを多項式ステップで導出できることを示している。 5章ではHajos計算論法において多項式下界をもつグラフ族を発見するためのツールの1つとして列挙アルゴリズムが与えられている。まずPHCのルールの一部を用いたPHC'という計算論法を導入し、それが全ての3彩色不能な平面グラフを導出できることを示し、これを基に列挙アルゴリズムを構築している。このアルゴリズムではグラフを出力するときに、頂点の昇順に出力し、かつ同型なグラフを出力しないことを達成している。また提案されたアルゴリズムを実装し、計算機実験を行っている。最後に6章において、以上の結果がまとめられ、今後の方針が与えられている。			

(論文審査の結果の要旨)

理論計算機科学分野において、P対NP問題にも匹敵する基本的未解決問題としてN P対coNP問題がある．証明系の複雑さはこの問題に対するアプローチとして主要なものの一つであり，あらゆる証明系に対して多項式下界をもつ恒真式を与えることが問題解決に至ることが既存研究により示されている．そこで，現在知られている最強の証明系であるExtended Fregeに対する多項式下界をもつ恒真式を与えることがこの分野の主要なターゲットになっているが，未だ解決には至っていない．

しかし，3彩色不能なグラフを構成する非決定性手続きであるHajos計算論法の計算量がExtended Frege Systemと多項式等価であることが示されたことにより，論理式から，より構造があり様々な性質が既に知られているグラフに研究の対象を変えることが可能になった．

本研究は，さらに明確な構造をもったグラフ族にその対象を絞ること，すなわち，平面グラフや次数制限付き平面グラフを対象とした，より構造的で制限の強い計算論法を考案したいという自然な動機に基づいており，そのような計算論法として平面Hajos計算論法（PHC）を提案し，その有効性を示している．

本論文の結果について特筆すべき点は以下の通りである．

1. 導出過程のグラフを平面グラフに限定したHajos計算論法であるPHCを提案し，それが全ての3彩色不能な平面グラフを導出できることを示した．また，PHCの計算量がHajos計算論法の計算量と多項式等価であることを示している．これらの結果により，PHCを考えることが問題の解決に結びつくことを結論づけている．
2. 1で挙げたPHCにさらに導出過程を制限したPHC(d)を提案している．これは全ての導出過程に現れるグラフが平面グラフかつ最大次数がdであるという制約をもつものであり，この計算論法に対し，PHC(4)では構成できないグラフ族を示した．また，PHCとの計算量の関係も明確にし，PHC(d)の能力について十分な考察を与えている．
3. PHCに対し，超多項式下界をもつグラフ族の性質を調べるツールとして，列挙アルゴリズムを提案した．列挙アルゴリズムはPHCのサブセットを利用しており，これにより頂点数が単調増加する方向にグラフを列挙できることを保障している．さらに実際に計算機による実装と実験を行い小さな頂点数の3彩色不能な平面グラフを列挙している．

以上，本研究はHajos計算論法に関する研究を行い，新たな計算論法を提唱し，また，それらの計算複雑さに関して学術上意義深い結果を与えている．よって，本論文は博士（情報学）の学位論文として価値あるものと認める．

また，平成22年2月15日実施した論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた．