

# 多軸応力下の土の変形・強度特性

松岡 元・中井 照夫

## DEFORMATION AND STRENGTH CHARACTERISTICS OF SOIL UNDER THREE DIFFERENT PRINCIPAL STRESSES

By Hajime MATSUOKA and Teruo NAKAI

### Synopsis

A new stress plane in three-dimensional stress space has been proposed as the composed stress plane of *three mobilized planes* of soil particles among three principal stress axes. The new stress plane is named "*spatial mobilized plane* (SMP)". It has been verified by data of various kinds of shear tests that stress-strain behaviours of soil under three principal stresses can be uniquely expressed on this *spatial mobilized plane*. Principal stress-strain relationships of soil under three different principal stresses have been derived from the unique stress-strain relationship on the SMP. These stress-strain relationships have been verified by triaxial compression tests, triaxial extension tests, plane strain tests and true triaxial tests on sands. A new yield condition (failure criterion) of soil has been also proposed on condition that soil yields when shear-normal stress ratio on the SMP reaches a certain value. Furthermore, an analysis of stress ratio constant tests has been presented on condition that strains due to dilatancy are controlled by the shear-normal stress ratio on the SMP and strains due to consolidation are controlled by the resultant stress of the shear stress and the normal stress on the SMP.

### 1. 概 説

土の変形がモービライズド面（土粒子の滑動面）上のせん断・垂直応力比によって支配されるという考え方を、せん断時の土粒子の挙動の微視的解析にもとづいてすでに述べている<sup>1),2)</sup>。これは土が広い意味での摩擦則に従う材料であるという思想につながるものである。ここでは、すでに提案している3主応力軸間のモービライズド面（複合モービライズド面）の概念<sup>2)</sup>を拡張して、3次元応力空間内に新たに空間モービライズド面なる応力面を提案し、この面上で整理すれば相異なる3主応力下の土の応力-ひずみ関係を統一的に表現できることを各種実験データによって検証する。またその面上のせん断・垂直応力比がある一定値に達したとき土が降伏するものとして、新たな土の降伏条件（破壊規準）を提案する。さらに、ダイレイタンスーによるひずみが上述の空間モービライズド面上のせん断・垂直応力比によって支配され、圧密によるひずみがせん断応力と垂直応力の合応力によって支配されるものとして、いままでその挙動の説明が困難であった応力比一定試験の解析を試みている。

### 2. 空間モービライズド面

従来より、せん断応力と垂直応力の比が最大の面、すなわち最小主応力方向と $(45^\circ + \phi_{mo13}/2)$ （ここに $\phi_{mo13} = \sin^{-1}\{(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3)\}$ ）をなす面 AC（Fig. 1 参照）をモービライズド面と呼び、土粒子が最も滑動する面であると考えられている。しかし3主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ をうけている個々の粒子が滑動する方向は必ずしも中間主応力軸に平行ではなく、中間主応力 $\sigma_2$ の影響も受けるものと思われる。そこで導入したのが、他の2主応力軸間にも AB, BC なるモービライズド面を考慮して土粒子の3次元的な挙動を説明しようとする複合モービライズド面<sup>2)</sup>の概念である。ここでは、さらにこの3個のモービライズド面 AB, BC, CA の合成面とし

て応力面 ABC に着目し、これを空間モービライズド面 (spatial mobilized plane; 略称 SMP) と仮称する。したがって、SMP は 3 主応力空間において平均的に土粒子が最も滑動する合成応力面と考えられる。なお、SMP が 3 主応力軸を切る点は、

$$\tan\left(45^\circ + \frac{\phi_{motj}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin\phi_{motj}}{1-\sin\phi_{motj}}} = \sqrt{\frac{\sigma_i}{\sigma_j}} \quad (i, j=1, 2, 3, i < j) \dots\dots\dots(1)$$

より、Fig. 1 に示すように各主応力のルートの割合になる。したがってこの面は応力の変化とともに動くものである。また SMP の法線方向余弦  $(a_1, a_2, a_3)$  は次のように表現される。

$$a_1 = \sqrt{\frac{J_3}{\sigma_1 J_2}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{J_3}{\sigma_2 J_2}}, \quad a_3 = \sqrt{\frac{J_3}{\sigma_3 J_2}} \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $J_1, J_2, J_3$  は応力の 1 次、2 次、3 次の不変量であって次式で表わされる。

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \quad J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \dots\dots\dots(3)$$

なお、本文では応力は全て有効応力を表わすものとする。ここでは、この空間モービライズド面 (SMP) なる応力面に着目して各種実験データの解析を試みる。

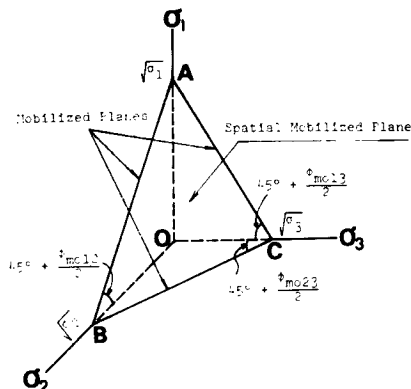


Fig. 1 Spatial mobilized plane and three mobilized planes in three principal stress space.

### 3. 空間モービライズド面に着目した応力-ひずみ関係式

空間モービライズド面 (SMP) 上の垂直応力  $\sigma_N$  とせん断応力  $\tau$  は次のように表わされる。

$$\sigma_N = \sigma_1 \cdot a_1^2 + \sigma_2 \cdot a_2^2 + \sigma_3 \cdot a_3^2 = \frac{3J_3}{J_2} \dots\dots\dots(4)$$

$$\tau = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cdot a_1^2 \cdot a_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \cdot a_3^2 \cdot a_1^2} = \frac{\sqrt{J_1 J_2 J_3 - 9J_3^2}}{J_2} \dots\dots\dots(5)$$

したがって、SMP 上のせん断・垂直応力比  $(\tau/\sigma_N)$  は、

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \sqrt{\frac{J_1 J_2 - 9J_3}{9J_3}} \dots\dots\dots(6)$$

となる。一方、主応力と主ひずみ増分の方向が一致すると仮定すると、SMP 上の垂直ひずみ増分  $d\epsilon_N$  およびせん断ひずみ増分  $d\gamma$  は次式で与えられる。

$$d\epsilon_N = d\epsilon_1 \cdot a_1^2 + d\epsilon_2 \cdot a_2^2 + d\epsilon_3 \cdot a_3^2 = \frac{J_3}{J_2} \cdot \left( \frac{d\epsilon_1}{\sigma_1} + \frac{d\epsilon_2}{\sigma_2} + \frac{d\epsilon_3}{\sigma_3} \right) \dots\dots\dots(7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{2} &= \sqrt{(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 \cdot a_1^2 \cdot a_2^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2 \cdot a_3^2 \cdot a_1^2} \\ &= \frac{J_3}{J_2} \cdot \sqrt{\frac{(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2}{\sigma_2 \sigma_3} + \frac{(d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2}{\sigma_3 \sigma_1}} \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

特別な場合として、三軸圧縮および三軸伸張条件では  $\tau/\sigma_N$  と  $d\epsilon_N/d\gamma$  はそれぞれ次式で与えられる。

三軸圧縮条件 ( $\sigma_2 = \sigma_3, d\epsilon_2 = d\epsilon_3$ ):

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{\sqrt{2}}{3} (\sqrt{\sigma_1/\sigma_3} - \sqrt{\sigma_3/\sigma_1}) \dots\dots\dots(9)$$

$$\frac{d\epsilon_N}{d\gamma} = \frac{\sqrt{\sigma_1/\sigma_3} \cdot d\epsilon_3 + \sqrt{\sigma_3/\sigma_1} \cdot (d\epsilon_1/2)}{\sqrt{2} (d\epsilon_1 - d\epsilon_3)} \dots\dots\dots(10)$$

三軸伸張条件 ( $\sigma_1 = \sigma_2, d\epsilon_1 = d\epsilon_2$ ):

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sqrt{\sigma_1/\sigma_3} - \sqrt{\sigma_3/\sigma_1}) \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\frac{d\epsilon_N}{d\gamma} = \frac{\sqrt{\sigma_1/\sigma_3} \cdot (d\epsilon_3/2) + \sqrt{\sigma_3/\sigma_1} \cdot d\epsilon_1}{\sqrt{2} (d\epsilon_1 - d\epsilon_3)} \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここで、モービライズド面上の応力—ひずみ間の基本関係式<sup>1)</sup>を再録すれば次の通りである。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \lambda \cdot \left( -\frac{d\epsilon_N}{d\gamma} \right) + \mu \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \lambda \cdot \left( -\frac{\epsilon_N}{\gamma} \right) + \mu' \quad (\mu' = \lambda \cdot \bar{\theta}_0 + \mu) \quad \dots\dots\dots(14)$$

(13), (14)式をあわせて微分方程式を解けば次式を得る。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = (\mu' - \mu) \cdot \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} + \mu \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\epsilon_N = \frac{\mu - \mu'}{\lambda} \cdot \gamma \cdot \left\{ \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} - 1 \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここに、 $\lambda, \mu, \mu', \gamma_0$  は土のせん断時の応力—ひずみ関係を規定する係数であり、このうち  $\mu$  は土粒子間の摩擦係数 ( $= \tan \phi_p$ ) に相当し、 $\lambda$  は  $\mu$  の値によってきまるほぼ1.1~1.5の値であって、これらの係数は試料が決まれば一定値となる。また  $\mu'$  は初期の粒子構造と粒子間摩擦にかかわる係数であるが、通常の粒子構造のもとではあまり変化しないようである。なお  $\gamma_0$  はモービライズド面上の垂直ひずみ  $\epsilon_N$  の最大圧縮点での  $\gamma$  であるが、土の粒子構造を表現するパラメーターと考えられ、初期間けき比  $e_i$  や平均主応力  $\sigma_m$  の大きさその他によって変化する性質をもっている。

次に、SMP 上のひずみ増分  $d\epsilon_N, d\gamma$  の方向余弦をそれぞれ  $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$  とすれば、SMP 上のひずみ増分  $(d\epsilon_N, d\gamma)$  の主ひずみ増分  $d\epsilon_1, d\epsilon_2, d\epsilon_3$  への変換は次式で与えられる。

$$d\epsilon_i = d\epsilon_N + \frac{b_i}{a_i} \cdot \frac{d\gamma}{2} \quad (i=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots(17)$$

ここで、 $a_i$  は主応力と主ひずみ増分の方が一致するという条件より (2) 式で与えられ、また方向余弦の性質より  $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$ 、直交条件より  $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$  なる関係式が成立する。未知数が  $b_1, b_2, b_3$  の3個で条件式が2個あるのでもう1つ条件が必要である。三軸圧縮条件では  $b_2 = b_3$  なる条件より次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_1 &= d\epsilon_N + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sigma_1/\sigma_3} \cdot \frac{d\gamma}{2} \\ d\epsilon_3 &= d\epsilon_N - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sigma_3/\sigma_1} \cdot \frac{d\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(18)$$

(13), (15)式より  $X \equiv \tau/\sigma_N$  とすれば、

$$\begin{aligned} d\gamma &= \frac{\gamma_0}{\mu' - \mu} \cdot \exp\left(\frac{X - \mu}{\mu' - \mu}\right) \cdot dX \\ d\epsilon_N &= \frac{\mu - X}{\lambda} \cdot d\gamma \end{aligned}$$

となるから、(18)式は積分可能であって主応力—主ひずみ関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \int_{X=0}^{X=X} d\epsilon_1 = \gamma_0 \cdot [F_1(X)|_{T.C.} - F_1(0)|_{T.C.}] \\ \epsilon_3 &= \int_{X=0}^{X=X} d\epsilon_3 = \gamma_0 \cdot [F_3(X)|_{T.C.} - F_3(0)|_{T.C.}] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(19)$$

ここに、 $X \equiv \tau/\sigma_N = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sqrt{\sigma_1/\sigma_3} - \sqrt{\sigma_3/\sigma_1})$  として、

$$\begin{aligned} F_1(X)|_{T.C.} &= \exp\left(\frac{X - \mu}{\mu' - \mu}\right) \cdot \left\{ \frac{9}{16\sqrt{2}} \cdot X^2 + \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{\lambda} - \frac{9(\mu' - \mu)}{8\sqrt{2}} \right) \cdot X \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mu'}{\lambda} - \frac{3(\mu' - \mu)}{4} + \frac{9(\mu' - \mu)^2}{8\sqrt{2}} \right\} \end{aligned}$$

$$F_3(X)|_{T.C.} = \exp\left(\frac{X-\mu}{\mu'-\mu}\right) \cdot \left\{ -\frac{9}{32\sqrt{2}} \cdot X^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{\lambda} + \frac{9(\mu'-\mu)}{16\sqrt{2}}\right) \cdot X \right. \\ \left. - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\mu'}{\lambda} - \frac{3(\mu'-\mu)}{8} - \frac{9(\mu'-\mu)^2}{16\sqrt{2}} \right\}$$

なお、この積分の計算過程で近似計算を行なっている。三軸伸張条件では  $b_1=b_2$  なる条件より次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_1 &= d\epsilon_N + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sigma_1/\sigma_3} \cdot \frac{d\gamma}{2} \\ d\epsilon_3 &= d\epsilon_N - \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sigma_3/\sigma_1} \cdot \frac{d\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

三軸圧縮条件の場合と同様にして(20)式を積分すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \int_{X=0}^{X=X} d\epsilon_1 = \gamma_0 [F_1(X)|_{T.E.} - F_1(0)|_{T.E.}] \\ \epsilon_3 &= \int_{X=0}^{X=X} d\epsilon_3 = \gamma_0 [F_3(X)|_{T.E.} - F_3(0)|_{T.E.}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

ここに、 $X \equiv \tau/\sigma_N = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot (\sqrt{\sigma_1/\sigma_3} - \sqrt{\sigma_3/\sigma_1})$  として、

$$F_1(X)|_{T.E.} = \exp\left(\frac{X-\mu}{\mu'-\mu}\right) \cdot \left\{ -\frac{9}{32\sqrt{2}} \cdot X^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{\lambda} + \frac{9(\mu'-\mu)}{16\sqrt{2}}\right) \cdot X \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\mu'}{\lambda} - \frac{3(\mu'-\mu)}{8} + \frac{9(\mu'-\mu)^2}{16\sqrt{2}} \right\}$$

$$F_3(X)|_{T.E.} = \exp\left(\frac{X-\mu}{\mu'-\mu}\right) \cdot \left\{ -\frac{9}{16\sqrt{2}} \cdot X^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\lambda} + \frac{9(\mu'-\mu)}{8\sqrt{2}}\right) \cdot X \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mu'}{\lambda} - \frac{3(\mu'-\mu)}{4} - \frac{9(\mu'-\mu)^2}{8\sqrt{2}} \right\}$$

なお、この場合も積分の計算過程で近似計算を行なっている。また(19); (21)式より、体積ひずみ  $\epsilon_v$  は三軸圧縮、三軸伸張条件とも同一の式で表わされるのがわかる。次に平面ひずみ条件では  $d\epsilon_2=0$  なる条件より次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_1 &= \frac{a_1^2 \cdot d\epsilon_N + \sqrt{a_1^2 \cdot a_3^2 \cdot (1-a_2^2)} \cdot (d\gamma/2)^2 - a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 \cdot (d\epsilon_N)^2}{a_1^2 \cdot (a_1^2 + a_3^2)} \\ d\epsilon_3 &= \frac{a_3^2 \cdot d\epsilon_N - \sqrt{a_1^2 \cdot a_3^2 \cdot (1-a_2^2)} \cdot (d\gamma/2)^2 - a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 \cdot (d\epsilon_N)^2}{a_3^2 \cdot (a_1^2 + a_3^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

また相異なる3主応力が作用する場合には、SMP上の $\tau$ の方向と $d\gamma$ の方向が一致すると仮定すれば、各主ひずみ増分  $d\epsilon_1, d\epsilon_2, d\epsilon_3$  は次式で与えられる。なお、このSMPの概念から計算された主ひずみは前に提案した複合モービライズド面の概念にもとづいて計算されたものとよく一致する。

$$d\epsilon_i = d\epsilon_N + \frac{\sigma_i f_2 - 3f_3}{\sqrt{f_1 f_2 f_3} - 9f_3^2} \cdot \frac{d\gamma}{2} = d\epsilon_N + \frac{\sigma_i - \sigma_N}{\tau} \cdot \frac{d\gamma}{2} \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots (23)$$

したがって、各主ひずみ  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  は応力状態が与えられればこれらの主ひずみ増分を応力径路に沿って積分することによって求めることができる。

ここで比較のため正八面体面 (octahedral plane) について検討する。正八面体面の法線方向余弦は  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  であるから、この面上のせん断・垂直応力比  $(\tau/\sigma_N)_{oct}$  および垂直・せん断ひずみ増分比  $(d\epsilon_N/d\gamma)_{oct}$  は次式で与えられる。

$$\left(\frac{\tau}{\sigma_N}\right)_{oct} = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} = \frac{\tau_{oct}}{\sigma_m} \dots\dots\dots (24)$$

$$\left(\frac{d\epsilon_N}{d\gamma}\right)_{oct} = \frac{d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3}{2\sqrt{(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2}} = \frac{d\epsilon_v}{3 \cdot d\gamma_{oct}} \dots\dots\dots (25)$$

ここに、

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$d\epsilon_v = d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3$$

$$d\gamma_{oct} = \frac{2}{3} \sqrt{(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2}$$

三軸圧縮および三軸伸張条件では(24), (28)式はともに次式のようになる。

$$\left( \frac{\tau}{\sigma_N} \right)_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_m} \dots\dots\dots (26)$$

$$\left( \frac{d\epsilon_N}{d\gamma} \right)_{oct} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{d\epsilon_v}{(d\epsilon_1 - d\epsilon_3)} \dots\dots\dots (27)$$

ここで, (26)式中の  $(\sigma_1 - \sigma_3)/\sigma_m$  および(27)式中の  $d\epsilon_v/(d\epsilon_1 - d\epsilon_3)$  なる変数は Cambridge 学派などによって土の力学特性を支配するパラメーターとしてよく用いられているものである<sup>3), 4)</sup>。このような正八面体面上のパラメーターと空間モービライズド (SMP) 上のパラメーターのどちらがより土の特性を適確に表現できるかという問題については, 次節において実験データにもとづいて検討する。

#### 4. 提案式の実験データによる検証

##### 4.1 空間モービライズド面上のせん断・垂直応力比 $(\tau/\sigma_N)$ — 垂直・せん断ひずみ増分比 $(d\epsilon_N/d\gamma)$ 関係の検証

ここでは前節で述べた空間モービライズド面上の応力—ひずみ間の基本関係式および主応力—主ひずみ関係式を各種の実験データによって検証する。まず, 空間モービライズド面上の  $\tau/\sigma_N - d\epsilon_N/d\gamma$  関係を示す(13)式について検討する。Fig. 2 は豊浦砂の三軸圧縮試験 (○印:  $\sigma_m = 1.0 \text{ kg/cm}^2$ , 初期間げき比  $e_t = 0.889$ ), 三軸伸張試験 (●印:  $\sigma_m = 3.0 \text{ kg/cm}^2$ ,  $e_t = 0.641$ ) および平面ひずみ試験 (△印:  $\sigma_3 = 2.0 \text{ kg/cm}^2$ ,  $e_t = 0.663$ , 市原・松沢のデータ<sup>5)</sup>による) の結果を空間モービライズド面 (SMP) 上の  $\tau/\sigma_N - d\epsilon_N/d\gamma$  関係で整理したものである。この図より上記3種の実験条件に対するプロットがほぼ同一の直線上に整理されるのがみられるが, これは極めて興味ある事実であって空間モービライズド面 (SMP) のもつ物理的意義の重要性を示唆していると思われる

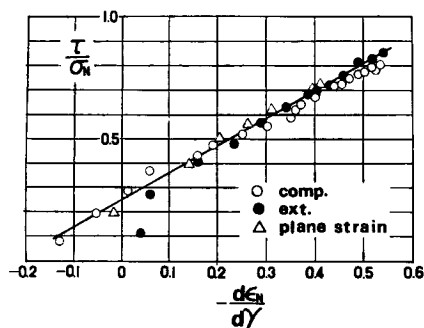


Fig. 2 Relationship between  $\tau/\sigma_N$  and  $d\epsilon_N/d\gamma$  on spatial mobilized plane in triaxial compression, triaxial extension and plane strain tests on Toyoura sand.

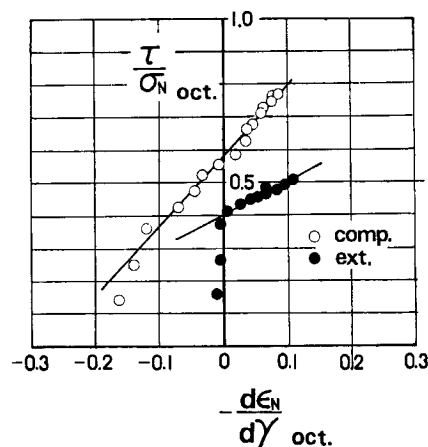


Fig. 3 Relationship between  $\tau/\sigma_N$  and  $d\epsilon_N/d\gamma$  on octahedral plane in triaxial compression and triaxial extension tests on Toyoura sand.

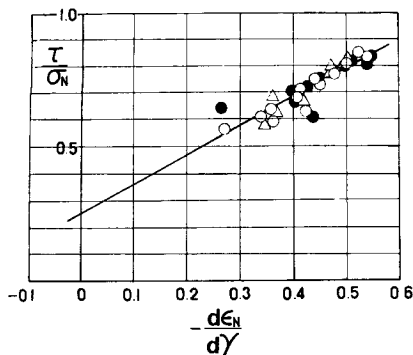


Fig. 4 Relationship between  $\tau/\sigma_N$  and  $d\epsilon_N/d\gamma$  on spatial mobilized plane in plane strain and true triaxial tests after  $K_0$ -compression on Toyoura sand.

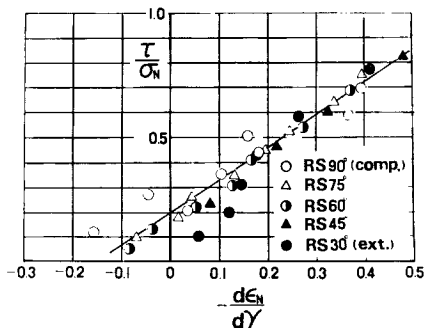


Fig. 5 Relationship between  $\tau/\sigma_N$  and  $d\epsilon_N/d\gamma$  on spatial mobilized plane in true triaxial tests on Ottawa sand (after Ko and Scott's data).

る。ここで比較のため、(26)、(27)式にしたがって正八面体面 (octahedral plane) 上の  $\tau/\sigma_N - d\epsilon_N/d\gamma$  関係で Fig. 2 と同じ豊浦砂の三軸圧縮と三軸伸張試験結果を整理したのが Fig. 3 である。この図からみられるように、正八面体面では三軸圧縮試験と三軸伸張試験の結果すらユニークに規定できないようである。また Fig. 4 は 6 面とも剛な板で載荷する方式の箱型多軸試験機<sup>6)</sup> による  $K_0$  圧縮後の乾燥豊浦砂の平面 ひずみ試験結果 (○印:  $\sigma_1 \cong 1 \text{ kg/cm}^2$ ,  $e_i = 0.70$ ) と多軸試験結果 (●, △印: 共に  $\sigma_1 \cong 1 \text{ kg/cm}^2$ ,  $e_i = 0.71$ ) を SMP 上の  $\tau/\sigma_N - d\epsilon_N/d\gamma$  関係でプロットしたものである。Fig. 2 と Fig. 4 より、試料が豊浦砂であればほぼ同一の直線上に整理されるのがみられる。次に Ko と Scott<sup>7), 8)</sup> による Ottawa 砂の実験データによって検討する。Ko らは  $\sigma_m = 1.4 \text{ kg/cm}^2$  の正八面体面上を半径方向に直線的に応力径路 (RS (radial shear の略称) 何度と表現する) を制御した多軸試験を行なった。RS90° は三軸圧縮条件を、RS30° は三軸伸張条件を表わし、これらの間の角度は相異なる 3 主応力が作用していることを表わしている。Fig. 5 は比較的ゆる詰め Ottawa 砂について SMP 上の  $\tau/\sigma_N - d\epsilon_N/d\gamma$  関係の整理を示したものである。この図より、プロットに少々バラツキはあるが三軸圧縮より三軸伸張に至るまでの応力条件下で大略同一の直線上に整理されるのがみられる。

以上の実験事実から、空間モービライズド面というのは相異なる 3 主応力下の応力・ダイレイタンス特性をユニークに規定できる興味深い応力面であることがわかる。また (13) 式より、Figs. 2, 4, 5 の整理の縦軸切片が粒子間摩擦係数  $\mu$ 、直線勾配が  $\lambda$  となるが、これらの図の直線勾配の値 (1.1~1.3) はこの  $\mu$  の値 (0.20~0.25) に対して算定される  $\lambda$  として適当な値である<sup>9)</sup>。

#### 4.2 空間モービライズド面上のせん断・垂直応力比 ( $\tau/\sigma_N$ ) — 垂直・せん断ひずみ比 ( $\epsilon_N/\gamma$ ) 関係の検証

次に、モービライズド面上のもう 1 つの基本関係式である (14) 式について検討する。Fig. 6 は Fig. 2 と同じ豊浦砂の三軸圧縮試験 (○印)、三軸伸張試験 (●印) および平面ひずみ試験 (△印: 市原・松沢のデータ<sup>5)</sup> による) の結果を SMP 上の  $\tau/\sigma_N - \epsilon_N/\gamma$  関係でプロットしたものである。また、Fig. 7 は Fig. 5 と同じ Ottawa 砂の 5 種類の試験結果を SMP 上の  $\tau/\sigma_N - \epsilon_N/\gamma$  関係で整理したものである。これらの図より、プロットは少々下の方から上ってくる傾向があるが、実験条件のいかんにかかわらず試料が同じであれば大略一本の直線上に近づくようである。(14) 式より、この直線の縦軸切片が  $\mu'$ 、直線勾配が  $\lambda$  である。Figs. 2, 4, 6 より豊浦砂の係数値は  $\lambda = 1.1$ ,  $\mu = 0.25$ ,  $\mu' = 0.44$  となるが、これは複合モービライズド面の場合の豊浦砂の  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\mu'$  の値とほぼ一致する<sup>2)</sup>。このことは空間モービライズド面と複合モービライズド面が合成面と成分面の関係であることによるものと考えられる。また Figs. 5, 7 より Ottawa 砂の係数値は  $\lambda = 1.3$ ,  $\mu = 0.20$ ,  $\mu' = 0.39$  となる。

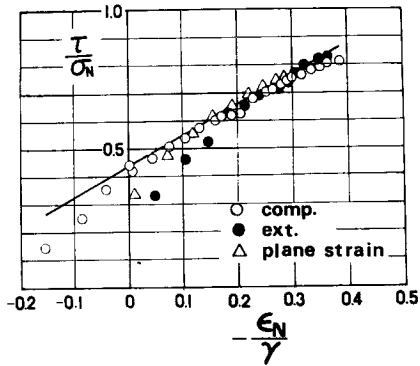


Fig. 6 Relationship between  $\tau/\sigma_N$  and  $\epsilon_N/\gamma$  on spatial mobilized plane in triaxial compression, triaxial extension and plane strain tests on Toyoura sand.

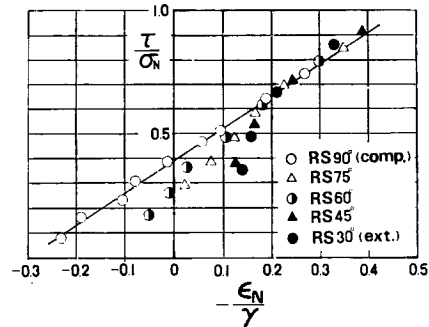


Fig. 7 Relationship between  $\tau/\sigma_N$  and  $\epsilon_N/\gamma$  on spatial mobilized plane in true triaxial tests on Ottawa sand (after Ko and Scott's data).

#### 4.3 空間モービライズド面上のせん断・垂直応力比( $\tau/\sigma_N$ )—せん断ひずみ( $\gamma$ )—垂直ひずみ( $\epsilon_N$ )関係の検証

次に(15), (16)式に対する実測データのプロットを Figs. 8~15 に示す。Figs. 8, 9, 10 はそれぞれ豊浦砂の三軸圧縮試験 ( $\sigma_m=1.0\text{kg/cm}^2$ ,  $e_t=0.889$ ), 三軸伸張試験( $\sigma_m=3.0\text{kg/cm}^2$ ,  $e_t=0.641$ ) および平面ひずみ試験

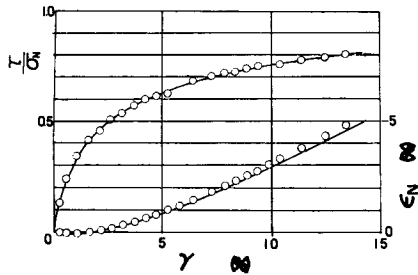


Fig. 8 Relationship among  $\tau/\sigma_N$ ,  $\gamma$  and  $\epsilon_N$  on spatial mobilized plane in triaxial compression test on Toyoura sand.

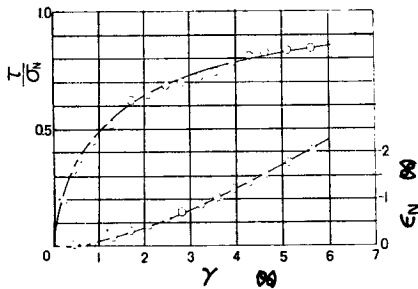


Fig. 9 Relationship among  $\tau/\sigma_N$ ,  $\gamma$  and  $\epsilon_N$  on spatial mobilized plane in triaxial extension test on Toyoura sand.

( $\sigma_3=2.0\text{kg/cm}^2$ ,  $e_t=0.663$ ; 市原・松沢のデータ<sup>5)</sup>) による) のデータを SMP 上の  $\tau/\sigma_N$ — $\gamma$ — $\epsilon_N$  関係で整理した結果と(15), (16)式による計算曲線を示している。なお, 計算には豊浦砂の係数値  $\lambda=1.1$ ,  $\mu=0.25$ ,  $\mu'=0.44$  と,  $\gamma_0$  については初期の間げき比, 拘束圧が異なるのでその定義より  $\gamma_0=0.70\%$  (Fig. 8),  $\gamma_0=0.25\%$  (Fig. 9),  $\gamma_0=0.45\%$  (Fig. 10) を用いた。また Figs. 11~15 は Ottawa 砂の三軸圧縮から三軸伸張応力条件までの5種類の実験データを SMP 上の  $\tau/\sigma_N$ — $\gamma$ — $\epsilon_N$  関係で整理した結果と(15), (16)式による計算曲線を示している。計算には Ottawa 砂の係数

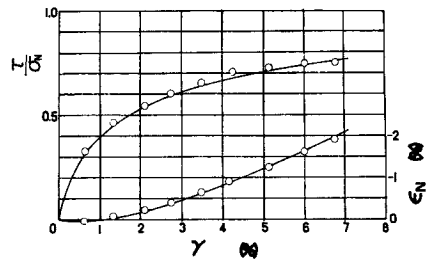


Fig. 10 Relationship among  $\tau/\sigma_N$ ,  $\gamma$  and  $\epsilon_N$  on spatial mobilized plane in plane strain test on Toyoura sand (after Ichihara and Matsuzawa's data).

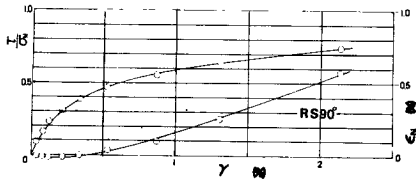


Fig. 11 Relationship among  $\tau/\sigma_N$ ,  $\gamma$  and  $\epsilon_N$  on spatial mobilized plane in triaxial compression test (RS 90°) on loose Ottawa sand (after Ko and Scott's data).

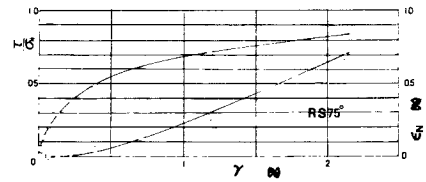


Fig. 12 Relationship among  $\tau/\sigma_N$ ,  $\gamma$  and  $\epsilon_N$  on spatial mobilized plane in true triaxial test (RS75°) on loose Ottawa sand (after Ko and Scott's data).

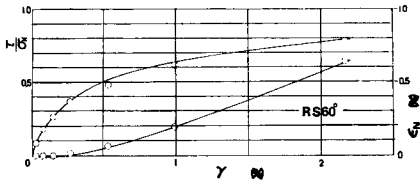


Fig. 13 Relationship among  $\tau/\sigma_N$ ,  $\gamma$  and  $\epsilon_N$  on spatial mobilized plane in true triaxial test (RS60°) on loose Ottawa sand (after Ko and Scott's data).

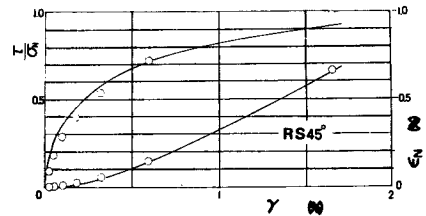


Fig. 14 Relationship among  $\tau/\sigma_N$ ,  $\gamma$  and  $\epsilon_N$  on spatial mobilized plane in true triaxial test (RS45°) on loose Ottawa sand (after Ko and Scott's data).

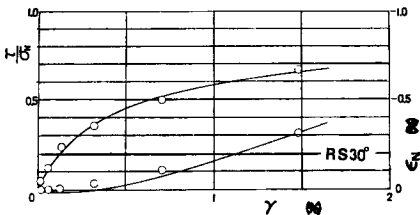


Fig. 15 Relationship among  $\tau/\sigma_N$ ,  $\gamma$  and  $\epsilon_N$  on spatial mobilized plane in triaxial extension test (RS 30°) on loose Ottawa sand (after Ko and Scott's data).

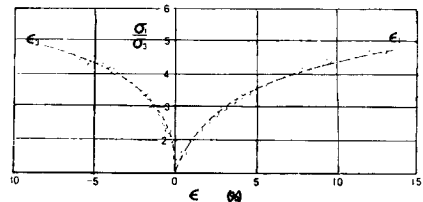


Fig. 16 Relationship among  $\sigma_1/\sigma_3$ ,  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_3$  in triaxial compression test on Toyoura sand.

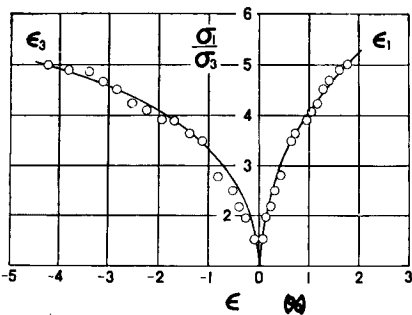


Fig. 17 Relationship among  $\sigma_1/\sigma_3$ ,  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_3$  in triaxial extension test on Toyoura sand.

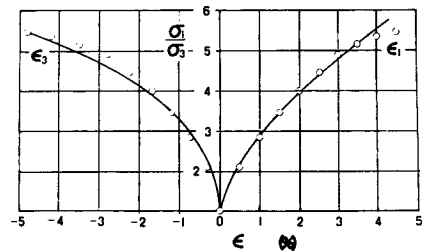


Fig. 18 Relationship among  $\sigma_1/\sigma_3$ ,  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_3$  in plane strain test on Toyoura sand (after Ichihara and Matsuzawa's data).

値  $\lambda=1.3$ ,  $\mu=0.20$ ,  $\mu'=0.39$  と,  $\gamma_0$  についてはその定義にしたがって決定した  $\gamma_0=0.13\%$  (Fig. 11),  $\gamma_0=0.08\%$  (Fig. 12),  $\gamma_0=0.10\%$  (Fig. 13),  $\gamma_0=0.04\%$  (Fig. 14) および  $\gamma_0=0.13\%$  (Fig. 15) を用いた。ここで注目したいのは, 空間モービライズド面 (SMP) 上の  $\tau/\sigma_N - \gamma - \epsilon_N$  関係で整理すれば, 初期の粒子構造が同じ場合には相異なる 3 主応力下の応力一ひずみ特性がユニークに表現できることである。このことは  $\gamma_0$  の値がほぼ等しい Figs. 11, 12, 13, 15 の比較からうかがえる (なお Fig. 14 は他の 4 ケースと比べて少々密な構造になっているようである)。

#### 4.4 主応力比一主ひずみ関係の検証

ここでは, 空間モービライズド面上の応力一ひずみ関係を仲介として導かれた相異なる 3 主応力下の主応力比一主ひずみ関係式を検討する。まず Figs. 16, 17, 18 はそれぞれ豊浦砂の三軸圧縮試験 ( $\sigma_m=1.0\text{kg/cm}^2$ ,  $e_t=0.889$ ), 三軸伸張試験 ( $\sigma_m=3.0\text{kg/cm}^2$ ,  $e_t=0.641$ ), 平面ひずみ試験 ( $\sigma_3=2.0\text{kg/cm}^2$ ,  $e_t=0.663$ ; 市原・松沢のデータ<sup>5)</sup>による) のデータを主応力比 ( $\sigma_1/\sigma_3$ )—主ひずみ ( $\epsilon_1, \epsilon_3$ ) 関係で整理した結果と (19), (21), (22) 式による計算曲線を示している。計算には 4.3 と同じ豊浦砂の係数値  $\lambda=1.1$ ,  $\mu=0.25$ ,  $\mu'=0.44$  と  $\gamma_0=0.70\%$  (Fig. 16)  $\gamma_0=0.25\%$  (Fig. 17)  $\gamma_0=0.45\%$  (Fig. 18) を用いた。Figs. 19, 20 は箱型多軸試験機<sup>6)</sup>による  $K_0$  圧縮後の乾燥豊浦砂のそれぞれ平面ひずみ試験結果 ( $\sigma_1 \leq 1\text{kg/cm}^2$ ,  $e_t=0.70$ ) と多軸試験結果 ( $\sigma_1 \leq 1\text{kg/cm}^2$ ,  $e_t=0.71$ ) を示している。図中の実線はそれぞれ (22), (23) 式による計算曲線である。ただし, この試験機の場合には通常  $K_0$  圧縮状態からせん断が始まるので, この図に示すように計算曲線を平行移動させて実測値と対比させている。これは  $K_0$  圧縮によって初期の主応力比に対応する分だけすでにせん断を受けているという考え方にもとづくものである。なお 計算には豊浦砂の係数値  $\lambda=1.2$ ,  $\mu=0.25$ ,  $\mu'=0.44$  と  $\gamma_0=0.23\%$  (Fig. 19),  $\gamma_0=0.18\%$  (Fig. 20) を用いた。次に, Figs. 21~25 は 4.3 と同じ Ottawa 砂の三軸圧縮から三軸伸張応力条件までの 5 種類の実験データを主応力比 ( $\sigma_1/\sigma_3$ )—主ひずみ ( $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ) 関係で整理した結果と (23) 式による計算曲線を示している。計算には 4.3 と同じ Ottawa 砂の係数値  $\lambda=1.3$ ,  $\mu=0.20$ ,  $\mu'=0.39$  と  $\gamma_0=0.13\%$  (Fig. 21),  $\gamma_0=0.08\%$  (Fig. 22),  $\gamma_0=0.10\%$  (Fig. 23),  $\gamma_0=0.04\%$  (Fig. 24),  $\gamma_0=0.13\%$  (Fig. 25) を用いた。

以上より, ここで新たに提案した空間モービライズド面 (SMP) は相異なる 3 主応力下の土のせん断現象を支配する応力面のようにあり, この SMP 上のユニークな応力一ひずみ関係を介して多軸応力下の応力一ひずみ関係式を求めることは土の本質を把えているように思われる。なお, 上で取り扱ったひずみは基本関係式の誘導過程の概念からせん断 (ダイレイタンス) によるひずみと考えられるので, 厳密には  $\sigma_m$  一定試験によ

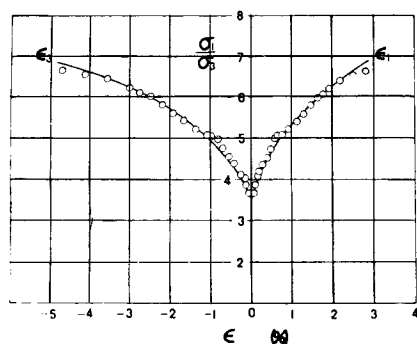


Fig. 19 Relationship among  $\sigma_1/\sigma_3$ ,  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_3$  in plane strain test after  $K_0$ -compression on Toyoura sand.

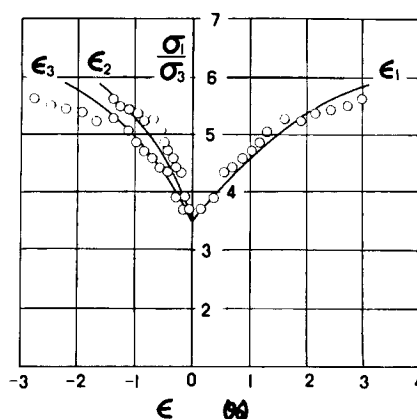


Fig. 20 Relationship among  $\sigma_1/\sigma_3$ ,  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_3$  in true triaxial test after  $K_0$ -compression on Toyoura sand.

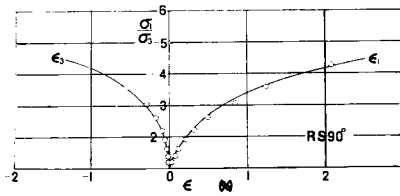


Fig. 21 Relationship among  $\sigma_1/\sigma_3$ ,  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_3$  in triaxial compression test (RS 90°) on loose Ottawa sand (after Ko and Scott's data).

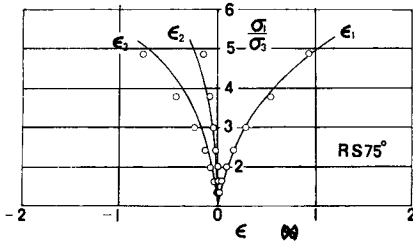


Fig. 22 Relationship among  $\sigma_1/\sigma_3$ ,  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_3$  in true triaxial test (RS 75°) on loose Ottawa sand (after Ko and Scott's data).

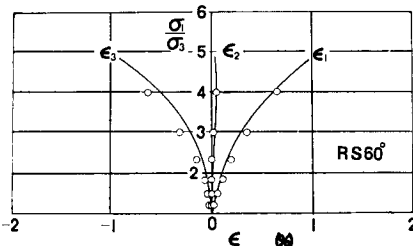


Fig. 23 Relationship among  $\sigma_1/\sigma_3$ ,  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_3$  in true triaxial test (RS 60°) on loose Ottawa sand (after Ko and Scott's data).

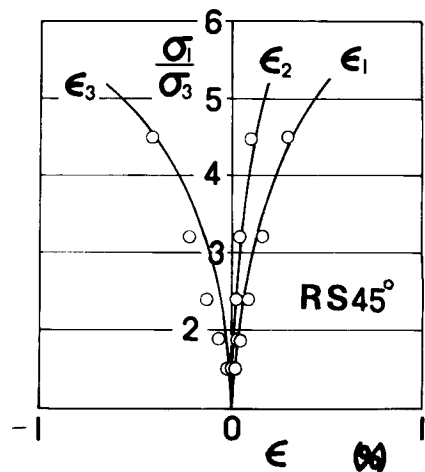


Fig. 24 Relationship among  $\sigma_1/\sigma_3$ ,  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_3$  in true triaxial test (RS 45°) on loose Ottawa sand (after Ko and Scott's data).

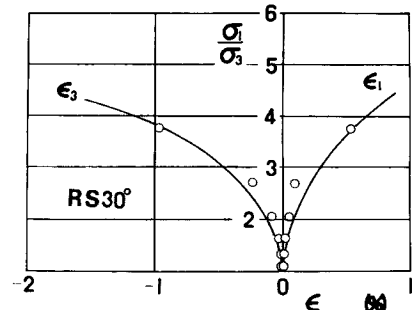


Fig. 25 Relationship among  $\sigma_1/\sigma_3$ ,  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_3$  in triaxial extension test (RS 30°) on loose Ottawa sand (after Ko and Scott's data).

って検証すべきである。ここでは  $\sigma_3$  一定試験,  $\sigma_1$  一定試験とも比較しているが, 砂の圧縮性, 膨張性は比較的小さいので, 上で述べたようにほぼ良好な対応を示している。

## 5. 新たな降伏条件の提案

空間モービリズド面 (SMP) 上の  $\tau/\sigma_N$  は(6)式より次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\sigma_N} &= \sqrt{\frac{f_1/2 - 9f_3}{9f_3}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{4\sigma_2\sigma_3} + \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)^2}{4\sigma_3\sigma_1}} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\tan^2\phi_{12} + \tan^2\phi_{23} + \tan^2\phi_{31}} = K \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

この SMP 上の  $\tau/\sigma_N$  がある一定値に達したとき土は降伏するものとする, 次の降伏条件式 (破壊規準) が得られる。

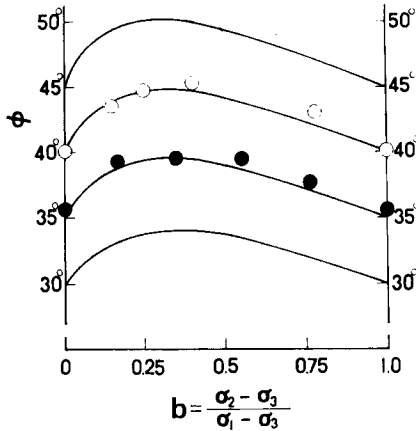


Fig. 26 Proposed yield condition (failure criterion) and measured angles of internal friction of a sand under three different principal stresses(after Sutherland et al.).

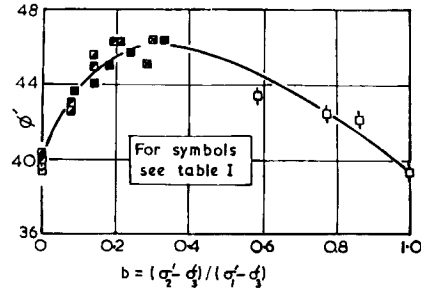


Fig. 27 Measured angles of internal friction of a sand under three different principal stresses (after Ramamurthy et al.).

$$\tan^2\phi_{12} + \tan^2\phi_{23} + \tan^2\phi_{31} = \left(\frac{3}{2}K\right)^2 = \text{一定} \dots\dots\dots(29)$$

**Fig. 26** 中の実線は内部摩擦角  $\phi = \phi_{13} = \sin^{-1} \{(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3)\}$  と中間主応力  $\sigma_2$  の大きさを表わすパラメーター  $b = (\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)$  の関係で提案式(29)式を図示したものである。この図より、 $\phi$  は  $b=0$  (三軸圧縮条件)と  $b=1$  (三軸伸張条件)において等しく、 $b=0.5$  に対して、非対称となるのがみられる。なお、図中のプロットは Sutherland 他<sup>10)</sup> によるある砂の実験結果を示している。また **Fig. 27** は Ramamurthy 他<sup>11)</sup> が行なったある砂の実験結果を引用したものであるが、提案式(29)と極めてよく類似しているのがみられる。

佐武<sup>12)</sup> は応力空間における距離の概念を導入して、 $n=2$  の場合、

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 + \sigma_3}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_3 + \sigma_1}\right)^2 = \sin^2\phi_{12} + \sin^2\phi_{23} + \sin^2\phi_{31} = 2k^2 \dots\dots\dots(30)$$

という降伏条件を提案している。(29)式と(30)式は  $\tan\phi$  と  $\sin\phi$  が入れ替っているだけで非常によく似た形をしている。計算してみると(29)式の方が少しだけ大きい  $\phi$  の値を与えるが、 $0^\circ \leq \phi \leq 45^\circ$  に対しては最大  $1^\circ$  以内の差しかないようである。したがって、どちらがより本質的な降伏条件であるかを実測値より判定することは困難である。このような場合には論理の一貫性が問われるであろう。

また Bishop<sup>13)</sup> は次のような修正式、

$$\sin\phi = \frac{K_1}{1 - K_2\sqrt{b(1-b)}}$$

を提案している。これは  $\sin\phi$  が  $b=0.5$  に対して対称となり、上記の(29)、(30)式とはかなり傾向が異なっている。なお、 $K_1$ 、 $K_2$  は実験によって決めねばならない係数である。

## 6. 応力比一定試験の解析

現在のところ、土質力学では圧密・せん断両現象を含む一般的な応力を受けた場合に生じるひずみは、便宜上圧密によるひずみとせん断(ダイレイタンシー)によるひずみの重ね合わせとして評価されている。3次元応力空間において土粒子が最もモービライズされる応力面として空間モービライズ面(SMP)なる概念を新たに提案したが、圧密によるひずみがSMP上の合応力  $p$  の絶対値(**Fig. 28** 参照)に支配され、ダイレイタ

ンシーによるひずみが合応力  $p$  と SMP の垂線のなす角度の大きさ、すなわちせん断・垂直応力比 ( $\tau/\sigma_N$ ) の値によって支配されるものと考えてみた。ここでは、この考え方にもとづいて一般的な応力条件下の応力-ひずみ関係式を表現するとともに、特にいままでその挙動の説明が困難であった応力比一定試験についての数値計算結果を示す。

Fig. 28 における合応力  $p$  の成分および絶対値は次のように表現される。

$$\begin{aligned}\vec{p} &= (\sigma_1 a_1, \sigma_2 a_2, \sigma_3 a_3) \\ &= \left( \sqrt{\frac{\sigma_1}{J_2}}, \sqrt{\frac{\sigma_2}{J_2}}, \sqrt{\frac{\sigma_3}{J_2}} \right) \dots\dots\dots(32)\end{aligned}$$

$$p = \sqrt{\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2} = \sqrt{\frac{J_1 J_3}{J_2}} \dots\dots\dots(33)$$

上で述べたように圧密によるひずみが  $p$  の値によって支配されるものとし、応力比のあまり大きくない範囲では  $p \cong \sigma_m (\cong J_1/3)$  を考慮して従来通りの関数形を用いれば、圧密による体積ひずみ  $(\epsilon_v)_c$  は次式のように表わされる。

$$(\epsilon_v)_c = \frac{C_c}{1+e_i} \cdot \log_{10} \frac{\sigma_m}{\sigma_{mi}} \cong \frac{C_c}{1+e_i} \cdot \log_{10} \frac{p}{p_i} \dots\dots\dots(34)$$

ここに、 $C_c$  は圧縮指数、 $e_i$  は初期間げき比、 $\sigma_{mi}$  は初期の平均有効主応力、 $p_i$  は初期の合応力  $p$  である。さて、等方圧縮状態 ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ) においては  $(\epsilon_v)_c$  の各軸ひずみ  $(\epsilon_1)_c$ ,  $(\epsilon_2)_c$ ,  $(\epsilon_3)_c$  への配分は等しいが、3主応力が異なる場合には  $(\epsilon_v)_c$  の  $(\epsilon_1)_c$ ,  $(\epsilon_2)_c$ ,  $(\epsilon_3)_c$  への配分比は一般に異なると考えられる。その配分比  $(a_1, a_2, a_3)$  を合応力  $p$  の各主応力軸への成分の大きさの割合と考えれば、(32), (34)式より次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}(\epsilon_1)_v &= \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} \cdot (\epsilon_v)_c = \frac{\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3}} \cdot \frac{C_c}{1+e_i} \cdot \log_{10} \frac{p}{p_i} \\ (\epsilon_2)_c &= \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3} \cdot (\epsilon_v)_c = \frac{\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3}} \cdot \frac{C_c}{1+e_i} \cdot \log_{10} \frac{p}{p_i} \\ (\epsilon_3)_c &= \frac{a_3}{a_1 + a_2 + a_3} \cdot (\epsilon_v)_c = \frac{\sqrt{\sigma_3}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3}} \cdot \frac{C_c}{1+e_i} \cdot \log_{10} \frac{p}{p_i}\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

一方、ダイレイタンシーによるひずみ  $(\epsilon_1)_d$ ,  $(\epsilon_2)_d$ ,  $(\epsilon_3)_d$  は、(19), (21) 式などを参考にすれば次のような形で表わされることがわかる。

$$\left. \begin{aligned}(\epsilon_1)_d &= \gamma_0 \cdot f_1(\tau/\sigma_N) \\ (\epsilon_2)_d &= \gamma_0 \cdot f_2(\tau/\sigma_N) \\ (\epsilon_3)_d &= \gamma_0 \cdot f_3(\tau/\sigma_N)\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

ここで、粒子構造を評価するパラメーター  $\gamma_0$  は  $\sigma_m$  の増加に対して増加することが実験よりわかっているが、その関数形を (35), (36) 式を重ね合わせた主ひずみが  $K_0$  圧密状態を満足するという条件から次式で表現してみる。

$$\gamma_0 = \gamma_{0i} + C_a \cdot \log_{10} \frac{\sigma_m}{\sigma_{mi}} \cong \gamma_{0i} + C_a \cdot \log_{10} \frac{p}{p_i} \dots\dots\dots(37)$$

ここに、 $\gamma_{0i}$  は初期状態 ( $\sigma_{mi}$ ) における  $\gamma_0$ ,  $C_a$  は試料とその構造によってきまる係数である。以上の (35), (36), (37)式より一般的な応力条件下の主ひずみは、圧密によるひずみとダイレイタンシーによるひずみの重ね合わせと認めれば次式で表わされる。

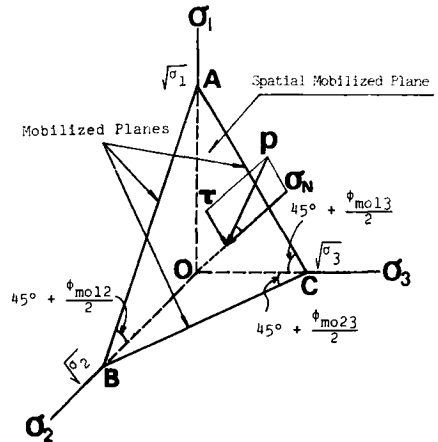


Fig. 28 Shear stress, normal stress and resultant stress on spatial mobilized plane.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3}} \cdot \frac{C_c}{1 + e_i} \cdot \log_{10} \frac{p}{p_i} + \left( \gamma_{0i} + C_d \cdot \log_{10} \frac{p}{p_i} \right) \cdot f_1(\tau/\sigma_N) \\ \epsilon_2 &= \frac{\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3}} \cdot \frac{C_c}{1 + e_i} \cdot \log_{10} \frac{p}{p_i} + \left( \gamma_{0i} + C_d \cdot \log_{10} \frac{p}{p_i} \right) \cdot f_2(\tau/\sigma_N) \\ \epsilon_3 &= \frac{\sqrt{\sigma_3}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3}} \cdot \frac{C_c}{1 + e_i} \cdot \log_{10} \frac{p}{p_i} + \left( \gamma_{0i} + C_d \cdot \log_{10} \frac{p}{p_i} \right) \cdot f_3(\tau/\sigma_N) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

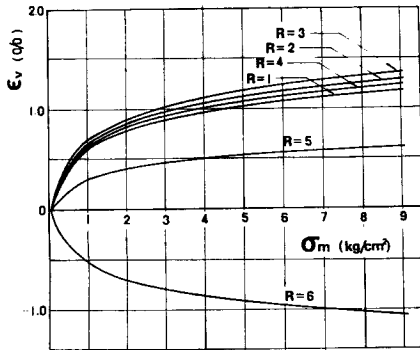


Fig. 29 Calculated relationship between volumetric strain  $\epsilon_v$  and mean effective principal stress  $\sigma_m$  in principal stress ratio  $R$ -constant test.

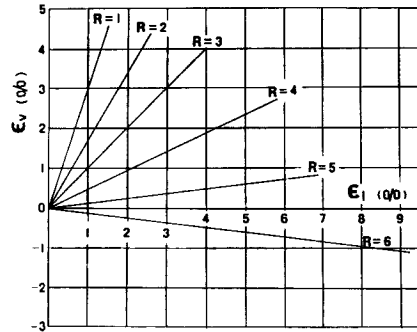


Fig. 30 Calculated relationship between volumetric strain  $\epsilon_v$  and major principal strain  $\epsilon_1$  in principal stress ratio  $R$ -constant test.

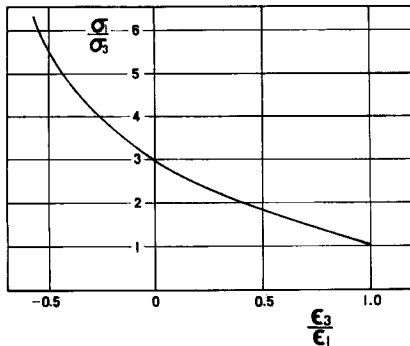


Fig. 31 Calculated relationship between principal stress ratio  $\sigma_1/\sigma_3$  and principal strain ratio  $\epsilon_3/\epsilon_1$  in principal stress ratio  $R$ -constant test.

(38)式にもとづいて、三軸圧縮条件 ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$ ) における主応力比 ( $\sigma_1/\sigma_3 \equiv R$ ) 一定試験の応力-ひずみ関係を計算した一例を Figs. 29, 30, 31 に示す。Fig. 29 は主応力比  $R$  をパラメーターとした  $\epsilon_v - \sigma_m$  関係、Fig. 30 は  $R$  をパラメーターとした  $\epsilon_v - \epsilon_1$  関係、Fig. 31 は  $\sigma_1/\sigma_3 - \epsilon_3/\epsilon_1$  関係の計算結果を示したものである。計算に用いた係数値は  $C_c = 0.01$ ,  $e_i = 0.660$ ,  $\sigma_{mi} = 0.1 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\gamma_{0i} = 0.01\%$ ,  $C_d = 0.1\%$ ,  $\lambda = 1.1$ ,  $\mu = 0.25$ ,  $\mu' = 0.44$  である。なお Figs. 29, 30, 31 の計算結果は El-Shoby<sup>14)</sup> の行なった応力比一定試験の傾向とよく類似しているのがみられる。このことより、応力比一定試験は上述したような圧密とせん断両現象の重ね合わせにもとづいて基本的には説明できるものと考えられる。

## 7. 結 語

本論文では、まずすでに提案している3主応力軸間のモービライズド面の合成応力面として、3次元応力空間内に新たに空間モービライズド面 (spatial mobilized plane) なる応力面を提案した。そしてこの面上で整理すれば相異なる3主応力下の土の応力-ひずみ関係をユニークに表現できることを見出し、このユニークな応力-ひずみ関係にもとづいて主応力-主ひずみ関係式を求め、各種の実測データによって検証した。またこの面上のせん断・垂直応力比がある一定値に達したとき土が降伏するものとして、新たな土の降伏条件 (破壊規準) を提案するとともに、これが実測データをよく説明するものであることを示した。さらにダイレイタン

シーによるひずみが空間モービライズド面上のせん断・垂直応力比によって支配され、圧密によるひずみがせん断応力と垂直応力の合応力の絶対値によって支配されるものとして応力比一定試験の解析を試みた。

さて本論文で最も主張したいことは、ここで提案した空間モービライズド面が相異なる3主応力下における土の応力-ひずみ特性から降伏条件(破壊規準)までを統一的に規定できる応力面であることである。このような土の変形・強度問題にとって極めて興味ある性質は、現在よく用いられている正八面体面(octahedral plane)には4.で少しふれたように期待できないようである。このことは土粒子の滑動面というモービライズド面のもつ物理的意味と、基本的には摩擦則に従う材料であるという土の本性に立脚するものと思われる。今後は、この空間モービライズド面上のユニークな応力-ひずみ特性を仲介として、一般的な応力-ひずみ関係式をテンソル表示することを目指したい。

ここで空間モービライズド面と観察される供試体のスベリ面との関係について著者の見解を述べる。土粒子はミクロにみれば、各粒子接点の接平面上の合せん断応力と垂直応力の比がある一定値に達したとき、その合せん断応力の方向に滑動すると考えられる。したがって、必ずしも中間主応力軸に平行にだけすべる必要はないものと思われる。ピーク強度までの小さな変形を対象とする場合には、この空間モービライズド面が平均的に土粒子が最も滑動する面であると考えている。ただし、ひずみが大きくなって残留状態まで変形が進み、マクロなスベリ面が表われるところには、土粒子は主応力比の値にしたがってせん断方向に配向されるので、中間主応力軸に平行な滑動成分が多くなり、それがスベリ面として観察されることも考えられる。今のところ決定的な実験事実はもっていないが、現在新しく購入した多軸試験機によってスベリ面の観察を行なっている。なお、この点については金属材料の観察されるスベリ面が必ずしも正八面体面と一致しないのにもかかわらず、von Misesの破壊規準が金属材料にとって有効であるということとも関係するのではないかと考えている。

最後に、本研究に対し暖かい御指導御援助を賜った京都大学村山朔郎教授に深謝の意を表します。また空間モービライズド面について有益な助言をいただいた東北大学佐武正雄教授、元・京都大学助手(現・大阪土質試験所)橋本正氏、応力比一定試験について議論していただいた神戸大学軽部大蔵助教授、京都大学大槌正紀助手に感謝の意を表します。なお、本論文は昭和48年度文部省科学研究費(一般研究D)によるものの一部であることを付記する。

## 参 考 文 献

- 1) 松岡 元: せん断時の土の応力-ひずみ関係について, 京都大学防災研究所年報, 第15号 B, 1972, pp. 449-511.
- 2) 松岡 元: 3主応力下の土の応力-ひずみ関係について, 京都大学防災研究所年報, 第16号 B, 1973, pp. 711-733.
- 3) Roscoe, K. H., A. N. Schofield and A. Thurlairajah: Yielding of Clays in States wetter then Critical, *Géotechnique*, Vol. 13, 1963, pp. 211-240.
- 4) Schofield, A. N. and C. P. Wroth: *Critical State Soil Mechanics*, McGraw-Hill, London, 1968.
- 5) 市原松平・松沢 宏: 平面ひずみ状態と軸対称ひずみ状態における乾燥砂のせん断特性, 土木学会論文報告集, No. 173, 1970, pp. 47-59.
- 6) 松岡 元・橋本 正: 多軸試験機の試作とその測定結果の解析について, 第8回土質工学研究発表会, 1973, pp. 231-234.
- 7) Ko, H. Y. and R. F. Scott: Deformation of Sand in Shear, *Proc. ASCE*, Vol. 93, No. SM5, 1967, pp. 283-310.
- 8) Ko, H. Y. and R. F. Scott: Deformation of Sand at Failure, *Proc. ASCE*, Vol. 94, No. SM4, 1968, pp. 883-898.
- 9) Matsuoka, H.: *Deformation Characteristics of Soil*, Doctor Thesis, Kyoto Univ., 1973.
- 10) Sutherland, H. B. and M. S. Mesdary: The Influence of the Intermediate Principal Stress on the Strength of Sand, *Proc. 7th ICSMFE*, Vol. 1, 1969, pp. 391-399.

- 11) Ramamurthy, T. and P. C. Rawat: Shear Strength of Sand under General Stress System, Proc. 8th ICSMFE, Vol. 1.2, 1973, pp. 339-342.
- 12) 佐武正雄：粒状体の降伏条件に関する一提案，土木学会第28回年次学術講演会，第3部，1973，pp. 91-92.
- 13) Bishop, A. W.: The Strength of Soils as Engineering Materials, Géotechnique, Vol. 16, 1966, pp. 91-130.
- 14) El-Shoby, M. A.: Deformation of Sands under Constant Stress Ratios, Proc. 7th ICSMFE, Vol. 1, 1969, pp. 111-119.