

アトラクターの特異な局所構造と  $q$ -相転移

森 肇

九州大学理学部物理学教室

散逸力学系の軌道は位相空間においてアトラクターを描き出す。カオスをするためには、そのアトラクターの構造が定性的に変化する分岐現象を解明しなければならない。カオスのアトラクターは諸々の不安定な不変集合（固定点、周期点、カントール集合等）を含み、その分岐は、ある不変集合がアトラクター上に出現したり、アトラクターから消失することによって起こる。そのため、分岐点の直前直後では、アトラクターに特異な局所構造が形成される。カオスの発生点は、カオス側からみれば、このような分岐点のあるカスケードの極限である。このようなカオスの分岐点、発生点及びそれらの近傍は、統計力学的にどの様に捉えることができるか、非線形力学の新しいパラダイムはどんなものであろうかを考察した。

§ 1. カオスをどう捉えるか

カオスとは、一言でいえば、決定論的に時間変化するにも拘らず、その変動が不安定なため、ブラウン運動のようにランダムで予測不可能である運動をいう。

まず、良く知られた周期外力下の振子を考えよう。振子の角度  $\phi$  に対する運動方程式は、

$$\ddot{\phi} + \gamma \dot{\phi} + \sin \phi = a \cos \omega t \quad (1.1)$$

とかける。ここで  $\gamma$  は摩擦係数、右辺は振動数  $\omega$ 、強さ  $a$  の外力である。図 1 は、 $\gamma = 0.22$ 、 $\omega = 1$ 、 $a = 2.7$  に対する解  $\phi(t)$  を示したもので、初期値として  $\phi = -1.5$ 、 $\dot{\phi} = 1.3$  をとり、(1.1) 式の数値積分により時間  $2\pi$  毎に  $\phi$ 、 $\dot{\phi}$  の値を求め、初期の 100 点を過渡的なものとして捨てて、その後の値を記入した。図 1 (a) は時刻  $t_i = 2\pi i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) における  $\dot{\phi}(t_i)$  の値を、図 1 (b) は  $X_i \equiv \{\phi(t_i), \dot{\phi}(t_i)\}$  の値 5 万点を示す。図 1 (a) の時系列  $\dot{\phi}(t_i)$  の変動は、ブラウン運動のようにランダムである。しかし図 1 (b) は、ランダムでない端正な姿を描き出している。しかも多重紐構造をもち、その一部を拡大していけば、図 1 (b) の挿入図のように自己相似な入れ子構造、つまり、フラクタル構造になっている。どんな初期値をとっても、殆どすべての場合、軌道  $\{X_i\}$  は、図 1 (b) の有界な集合に引き付けられ、十分な時間経過後にはその上にのる。このような集合をアトラクターという。フラクタル構造を持つアトラクターを特に奇妙なアトラクターという。

系の位相空間は、 $\phi$ 、 $\dot{\phi}$  と外力の位相  $\theta = \omega t = t$  とを直交座標とする 3 次元空間である。<sup>1)</sup> ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$  とし、 $\theta$  が  $2\pi$  を越えると  $2\pi$  を差し引いて 0 にもどす。したがって、この位相空間における軌道は、時刻  $t_i$  ごとに  $\theta = 0$  の面を横断する。その交点が図 1 (b) の  $X_i \equiv \{\phi(t_i), \dot{\phi}(t_i)\}$  に他ならない。 $X_{i+1}$  は  $X_i$  から一義的にきまり、

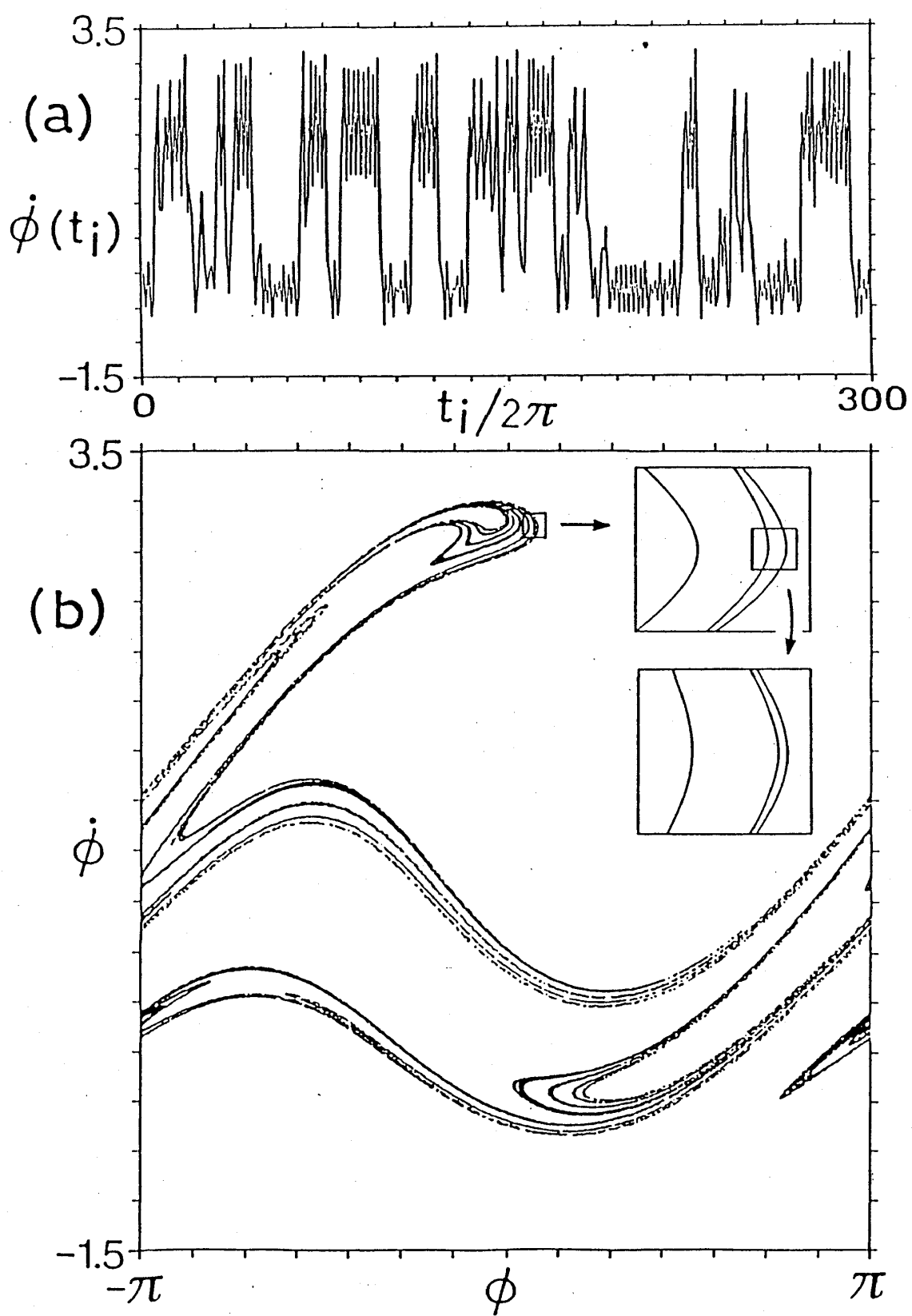


図1 振り子、(a) 時系列、(b) 奇妙なアトラクター

$$X_{i+1} = F(X_i), \quad (i=0, 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

とかける。これをポアンカレ写像という。

カオスでは、図1のように、一般に、時系列の変動はランダムだが、アトラクターの幾何学的構造は端正な姿をもっている。したがって、カオスの研究は、Poincaréが前世紀末に提唱したように、位相空間 $X$ における諸種の軌道群の幾何学とトポロジーを研究することから始まる。特に、カオスのアトラクターの性質は、どんな不安定不変集合を含んでいるかによってきまるので、アトラクター上の不変集合の幾何学とトポロジーをしることから始まるといえよう。

カオスでは、殆どすべての初期値 $X_0$ に対して軌道 $\{X_i\}$ は非周期軌道となる。そのような非周期軌道に対して時間的に定常な物理量をつくるため、統計力学では、任意の力学量 $G(X_i)$ に対して長時間平均

$$\langle G \rangle \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{i=0}^{n-1} G(X_i) \quad (1.3)$$

を導入する。アトラクター上の点 $X$ の周りの微小領域 $dX$ の特性関数

$$E_{dX}(X_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } X_i \in dX, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.4)$$

を考え、 $dm(X) \equiv \langle E_{dX} \rangle$ を自然な不変測度という。これは、長時間後に $X_i$ が微小領域 $dX$ に見い出される確率を与える。この $dm(X)$ を使えば、長時間平均(1.3)は

$$\langle G \rangle = \int G(X) dm(X) \quad (1.5)$$

とかける。以下、殆どすべての初期値 $X_0$ に対して、 $dm(X)$ は $X_0$ に依存せず、一義的な確率と長時間平均が存在するとしよう(エルゴード仮説)。長さ $n$ にわたる時間平均がこの長時間平均にどのように収束するかは

$$(1/n) \sum_{i=0}^{n-1} G(X_i) = \langle G \rangle + \{z_n(X_0)/n^\nu\} \quad (1.6)$$

と表せ、指数 $\nu$ は $1 \geq \nu > 0$ で、興味深い数を与える。ただし $\langle z_n \rangle = 0$ ,  $\langle z_n^m \rangle = C_m$ , ( $m > 0$ )とする。ここで $C_m$ は $n$ に依らない定数である。事実指数 $\nu$ は、時間平均(1.6)が $X_0$ に依存してその値が長時間平均の周りにどのように散らばるかをきめるのである。

統計力学のもう一つの重要な概念は粗視化である。つまり、系の些細な構造に依らない普遍的な性質を取り出すには、時間または位相空間における粗視化を導入するということである。最近の言葉で言えば、時間的または空間的なスケーリング指数を考えることに他ならない。現在、そのような粗視的量として、アトラクターの次元、リアプノフ数、エントロピーなどを拡張して自然な不変測度の特異点指数 $\alpha$ 、そのスペクトル $f(\alpha)$ 、<sup>2)</sup>粗視化された軌道拡大率 $\Lambda$ 、<sup>3)</sup>そのスペクトル $\psi(\Lambda)$ などが使われている。

以上をまとめると、カオスへのアプローチは

- (A) 位相空間の幾何学（アトラクターとその上の不変集合）<sup>1)</sup>
- (B) エルゴード理論（時間平均の収束形と揺動）
- (C) アトラクターの局所構造のスケーリング理論（ $f(\alpha)$ 、 $\psi(\Lambda)$ 等）

の3つのステップからなるといえよう。(A)は、次節で議論するように、カオスの素過程をアトラクターの局所構造の動きによって定義・特定するための枠組みを与える。

これは、Poincaré(1892)以来特に1960年代以降数学者によって作られてきた位相空間の幾何学に立脚して、カオスの統計力学を作るということであろう。Kepler(1618)による惑星運動の幾何学からNewton(1685)の運動論への基本思想は、朝永によれば「変化の相で運動をとらえる」（物理学とは何だろうか、1979）ということであり、それに倣って、例えば奇妙なアトラクター図1(b)の構造、特にその湾曲部を動的に捉えるということであろう。これは、熱平衡系のエルゴード理論が長い間果たし得なかった夢をもかなえることになるとと思われる。ここで、少数自由度系のカオスの研究はいくつかの有利な点を持つことを想起すべきである。すなわち、自由度が少ないため、

- (1) 決定論に内在する偶然性を鮮明に取り出せる、
  - (2) 必要とする挙動・構造・応答を数値的に取り出せる
- ということである。

## §2. アトラクターの局所構造の動的構造関数

奇妙なアトラクター図1(b)の性質はその湾曲部の挙動によってきまる。その様子を見るため、湾曲部に対する簡単なモデルとしてHénon写像

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = F(X_i) = \begin{bmatrix} 1 - ax_i^2 + by_i \\ x_i \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

を考えよう。その軌道  $X_i = \{x_i, y_i\}$  は、 $a=1.4$ 、 $b=0.3$  のとき、図2(a)のアトラクターを描き出す。 $X^*$  は固定点  $F(X^*) = X^*$  の一つで、アトラクターはこの固定点  $X^*$  の不安定多様体の閉包の上にある。 $b=0.3$  を固定して  $a$  を変えると、アトラクターは図2(b), (c), (d) のように変化する。<sup>4), 5)</sup>  $a > a_d \doteq 1.427$  では、軌道  $X_i$  は殆どすべての初期値に対して  $x = -\infty$  へ逃げてしまい、アトラクターが崩壊する。 $a < a_0 \doteq 1.154$  では、図2(d)のようにアトラクターが2つのバンドに分裂する。これらは分岐の典型であり、その幾何学的機構は次のようである。

図2(a), (b)には、もう一つの固定点  $S$  の安定多様体の一部が記入されている。図2(b)では、この安定多様体にアトラクターの最外殻が接している。その接点  $X_{\pm 1}$  は、 $X_0$  から写像  $F^{\pm 1}(X)$  によって順次に  $X_{\pm 1}$ 、 $X_{\pm 2}$ 、 $\dots$  と生成される。各接点の近傍は、図3(a), (b)のように写像される。<sup>6)</sup> つまり、写像  $F(X)$  によって、不安定多様体は引き伸ばされ、安定

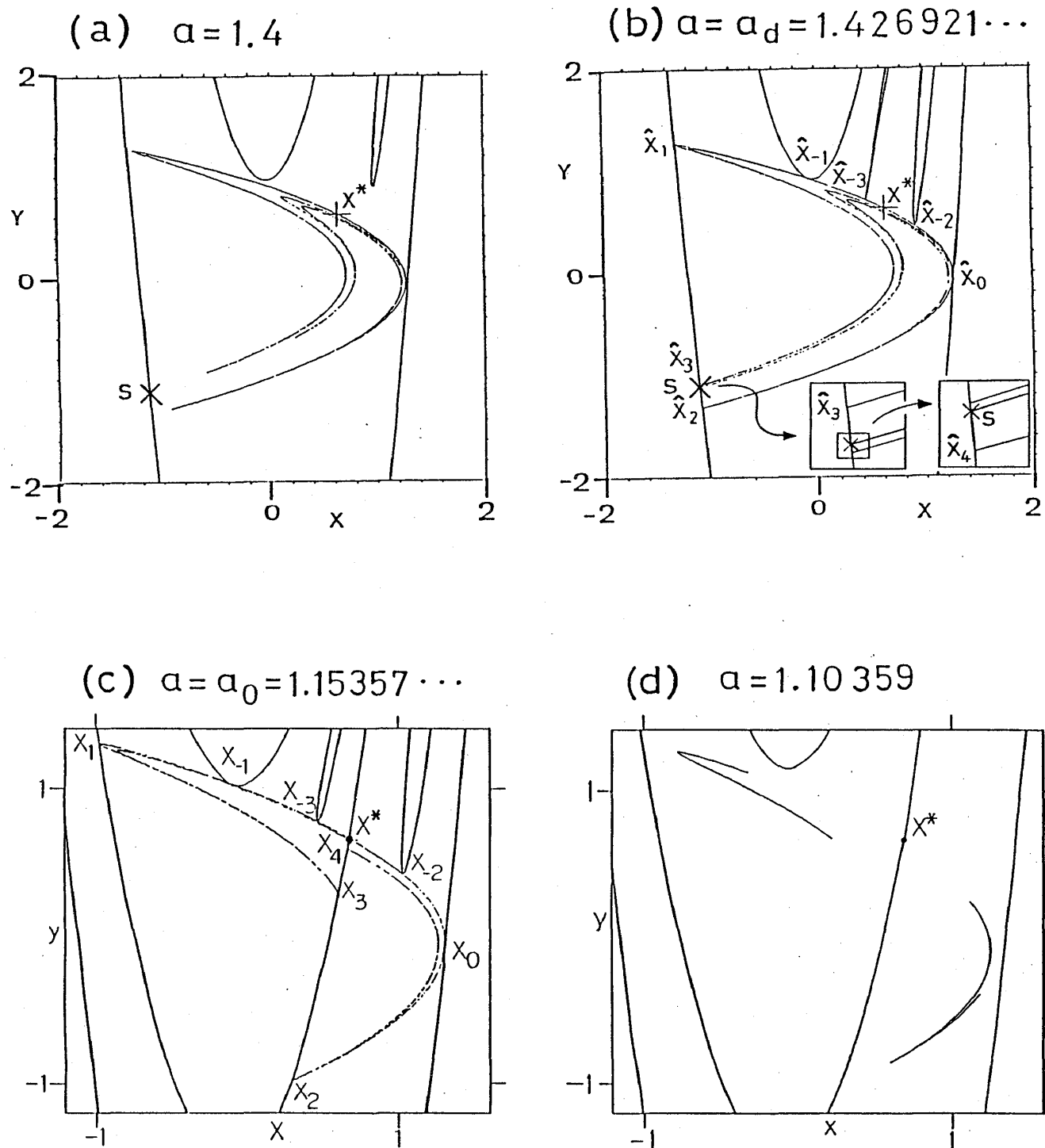


図2 奇妙なアトラクターの分岐、(b) 崩壊点、(c) バンド分裂点

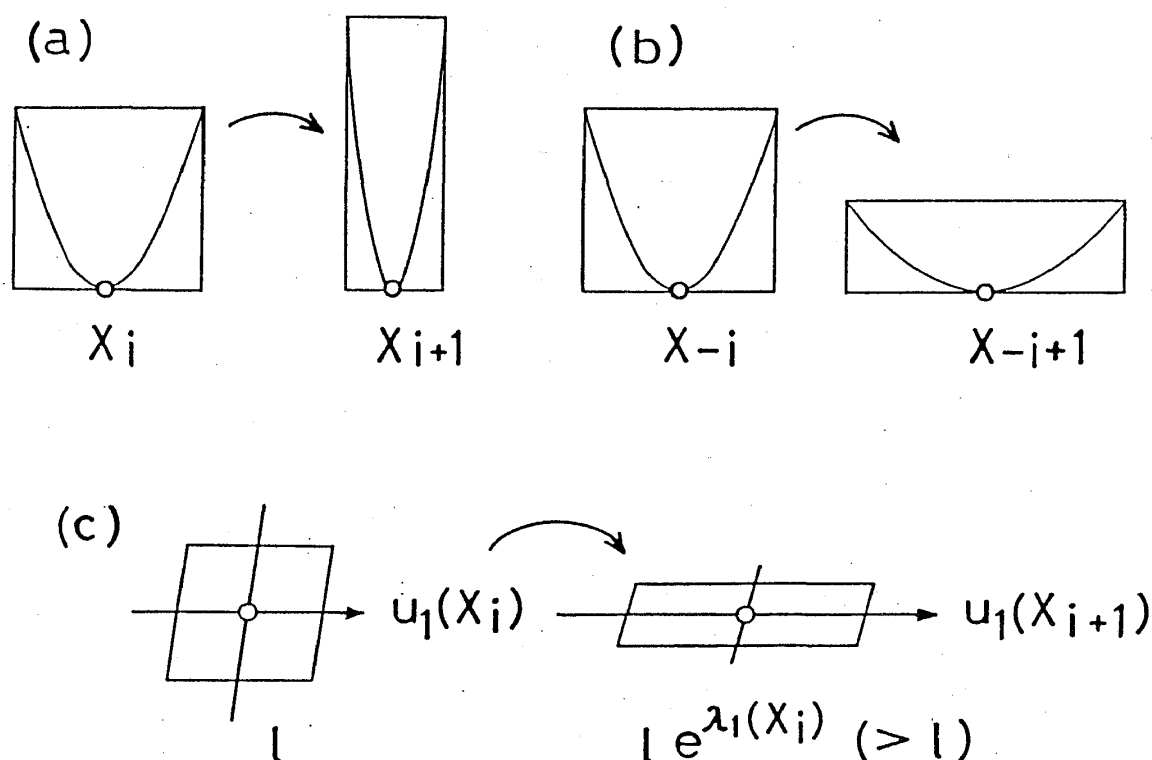


図3 局所構造と微小なセルの伸長（カオスの素過程）、  
 (a), (b) 接点構造の動き、(c) 双曲点構造の動き

多様体は縮む。逆写像  $F^{-1}(X)$  では逆になる。したがって、アトラクターの湾曲部は、図2(b)の  $X_0, X_1, X_2, \dots$  のように狭くなっていく。 $i=3$  までしか記入していないが、 $i \rightarrow \infty$  のとき、 $X_{+i}$  は  $S$  に集積し、 $X_{-i}$  は  $X^*$  に集積する。この集積は、図2(b)の挿入図のように、自己相似な入れ子構造になっている。このように、 $+i$  と  $-i$  では集積先が異なる接点  $\{X_{\pm i}\}$  をヘテロクリニック接点という。図2(c), (d) では、 $X^*$  の安定多様体の一部が記入されている。図2(c)では、この安定多様体にアトラクターの最外殻が接している。その接点  $X_{\pm i}$  は、 $i \rightarrow \infty$  のとき、いずれも  $X^*$  に集積する。このとき  $\{X_{\pm i}\}$  をホモクリニック接点という。奇妙なアトラクターの崩壊点  $a = a_d$  やバンド分裂点  $a = a_0$  では、このように、アトラクターがそれぞれ固定点  $S$  や  $X^*$  の安定多様体に接し、それらの分岐点はこの接点の集積（動き）によって特徴づけられることになる。<sup>5), 6)</sup> 図3(c)のように、 $X_i$  の不安定多様体と安定多様体が横断的に交わるとき、 $X_i$  を双曲点という。図2の  $S$  や  $X^*$  は双曲点である。双曲点の近傍は図3(c)のように写像される。

アトラクターは一般に図3のような接点構造と双曲点構造をもち、それら局所構造の動きがアトラクターの統計力学的性質をきめる。そこで、局所構造をその動きにおいて捉えるため、図3のセルの伸長を運動法則から定式化しよう。図3(c)のように、点  $X_i$  の近傍に対して、その不安定多様体方向の拡大率  $\lambda_1(X_i) = \ln |DF(X_i) \cdot u_1(X_i)|$  を考えよう。<sup>7)</sup> ここで  $DF(X)$

は  $F(X)$  のヤコービ行列、 $u_1(X_i)$  は不安定多様体方向の単位ベクトルである。図3(c)の双曲点では  $\lambda_1(X_i) > 0$  であるが、図3(a)の接点では  $\lambda_1(X_i) < 0$  となり、 $\lambda_1(X_i)$  は軌道にそって時間的に揺らぐ。いまアトラクター上で、長さ  $n$  にわたる和

$$S_n(X_0) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_1(X_i) \quad (2.2)$$

を定義しよう。特に、非周期軌道に対して、(1.6)に倣い、

$$\Lambda_n(X_0) \equiv S_n(X_0)/n = \Lambda^\infty + \{z_n(X_0)/n^{\nu_\pm}\} \quad (2.3)$$

とおく。ここで  $\Lambda^\infty \equiv \langle \lambda_1 \rangle$  は正のリアプノフ数であり、 $\nu_\pm$  はそれぞれ  $\Lambda_n(X_0) \gtrless \Lambda^\infty$  に対する指数である。 $n$  が有限のとき、(2.3)は初期値  $X_0$  に依存し、その値はある区間  $[\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max}]$  に散らばる。特に図3(a)の様な接点が存在するとき、 $\lambda_1(X_i)$  がそこで負となり  $\Lambda_{\min} < 0$  となる。したがって、有限な  $n$  に対してこの  $\Lambda_n(X_0)$  の揺動を取り出せば、局所構造をその動きにおいて捉えることができることになる。最近、この揺動は熱平衡系の示量変数の熱揺動と同じ形式で取り出せることがわかってきた。<sup>3) ~ 13)</sup> 表1の右側に、 $N$ 個のスピンからなる強磁性体の、スピン1個当りの磁化  $m_N(X)$  の熱揺動に対する統計熱力学形式をまとめた。

そこで、磁化  $m_N(X)$  に粗視的拡大率  $\Lambda_n(X_0)$  を対応させ、ランダウの自由エネルギー  $g(m)$  に対応する量  $\psi(\Lambda)$  を導入しよう。即ち、 $\Lambda_n(X_0)$  が区間  $(\Lambda, \Lambda + d\Lambda)$  の値をとる確率を  $P(\Lambda; n) d\Lambda$  とし、表1の  $P(m; N)$  に対応して、 $n \rightarrow \infty$  のとき

$$P(\Lambda; n) = \exp\{-n\psi(\Lambda)\} P(\Lambda^\infty; n) \quad (2.4)$$

としよう。ここで  $\psi(\Lambda) \geq \psi(\Lambda^\infty) = 0$  である。 $\psi(\Lambda)$  の関数形は、(2.3)の指数  $\nu_\pm$  を使って

$$\psi(\Lambda) = C_\pm |\Lambda - \Lambda^\infty|^{1/\nu_\pm} \quad (2.5)$$

とかける。ここで  $C_\pm$  はある定数である。これは、確率変数を  $\Lambda_n$  から  $z_n$  に変えると分布が  $n$  に依らなくなるからである。和(2.2)に対して中心極限定理が成り立つとき(2.4)はガウス分布となり  $\nu_\pm = 1/2$  であるが、次節で見るように、分岐点では、 $\lambda_1(X_i)$  の揺らぎの時間相関の長さが  $\infty$  となり  $\nu_\pm = 1$  となる。

$\psi(\Lambda)$  は一般に下に凸な関数であり、その勾配  $s \equiv 1 - q \equiv \psi'(\Lambda)$  を独立変数にとるため、

$$\Phi_n(q) \equiv -(1/n) \ln [\int d\Lambda P(\Lambda; n) \exp\{-n(q-1)\Lambda\}], \quad (2.6)$$

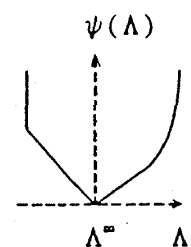
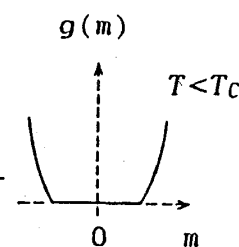
$$\Lambda_n(q) \equiv d\Phi_n(q)/dq, \quad \sigma_n(q) \equiv -d\Lambda_n(q)/dq \quad (2.7)$$

を導入する。(2.4)を(2.6)の積分に入れれば、変分原理

$$\Phi_{\infty}(q) = \min_{\Lambda} \{ \psi(\Lambda) + (q-1)\Lambda \} \quad (2.8)$$

が得られる。これらの関数は、アトラクターの局所構造を粗視的拡大率 $\Lambda_n(X_0)$ の揺動によって動的に捉える動的構造関数であり、カオスの統計力学的粗視量を与える。

表 1 カオスの動的構造関数と統計熱力学関数の比較。

|            | カオス (2次元写像)                                                                                                                                                             | 統計熱力学 (強磁性) <sup>a)</sup>                                                                                                                      |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 運動法則       | $X_{i+1} = F(X_i)$                                                                                                                                                      | $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(X) - HN m_N(X)$                                                                                                   |
| 粗視化        | 時間について粗視化:<br>$\Lambda_n(X_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_1(X_i)$                                                                                            | 空間について粗視化:<br>$m_N(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(X)$                                                                                       |
| 粗視化<br>の極限 | $n \rightarrow \infty :$<br>$P(\Lambda; n) \sim \exp[-n\psi(\Lambda)]$                                                                                                  | $N \rightarrow \infty :$<br>$P(m; N) \sim \exp[-Ng(m)]$                                                                                        |
|            | $\psi(\Lambda) =$ 拡大率スペクトル                                                                                                                                              | $g(m) =$ ランダウの自由エネルギー                                                                                                                          |
|            | $\psi'(\Lambda) = s = 1 - q$<br>$\psi''(\Lambda) = \frac{1}{\sigma_{\infty}(q)}$<br> | $g'(m) = \beta H$<br>$g''(m) = \frac{\beta}{\chi(H)}$<br> |
| 変分原理       | $\psi(\Lambda) + (q-1)\Lambda = \min.$                                                                                                                                  | $g(m) - \beta H m = \min.$                                                                                                                     |
| 相転移        | $\lambda_1(X_i)$ の長時間相関による                                                                                                                                              | $m_i$ の長距離相関による                                                                                                                                |
|            | $\psi(\Lambda)$ の線形スロープ : $s_t$                                                                                                                                         | $g(m)$ の線形スロープ : $\beta H = 0$                                                                                                                 |
|            | $q$ -相転移点 : $q_t = 1 - s_t$                                                                                                                                             | 強磁性転移点 : $H = 0$                                                                                                                               |

a)  $\mathcal{H}_0(X)$  は磁場  $H$  がないときのハミルトニアン,  $X$  は位相空間の座標,  $P(m; N)$  は  $H = 0$  において  $m_N(X)$  が値  $m$  をとる確率密度,  $\beta$  は逆温度,  $\chi(H)$  は帯磁率である。

### § 3. カオスの分岐点、発生点及びそれらの近傍

図4は、図2(c)のバンド分裂点における動的構造関数を示したもので、 $n=40$ をとってHenon写像(2.1)から数値的に求めた。<sup>4)</sup>  $\Lambda_n(q)$ に対するクロスは、変分原理(2.8)による $\psi'(\Lambda) = 1 - q$ から求めた最大項近似を表す。分散 $\sigma_n(q)$ は $q = q_\alpha \sim 2.0$ ,  $q = q_\beta \sim -0.8$ で鋭いピークを示す。これらのピークは $n \rightarrow \infty$ のとき発散し、 $\Lambda_n(q)$ が $q = q_\alpha$ ,  $q_\beta$ で不連続な変化、即ち、1次の相転移を起こすことを保証する。これを $q$ -相転移という。その相 $q > q_\alpha$ は負の $\Lambda$ を与える特異な接点構造を表し、相 $q_\alpha > q > q_\beta$ は $\Lambda \sim \Lambda^\infty \sim 0.315$ である正常な双曲点構造を、相 $q < q_\beta$ は

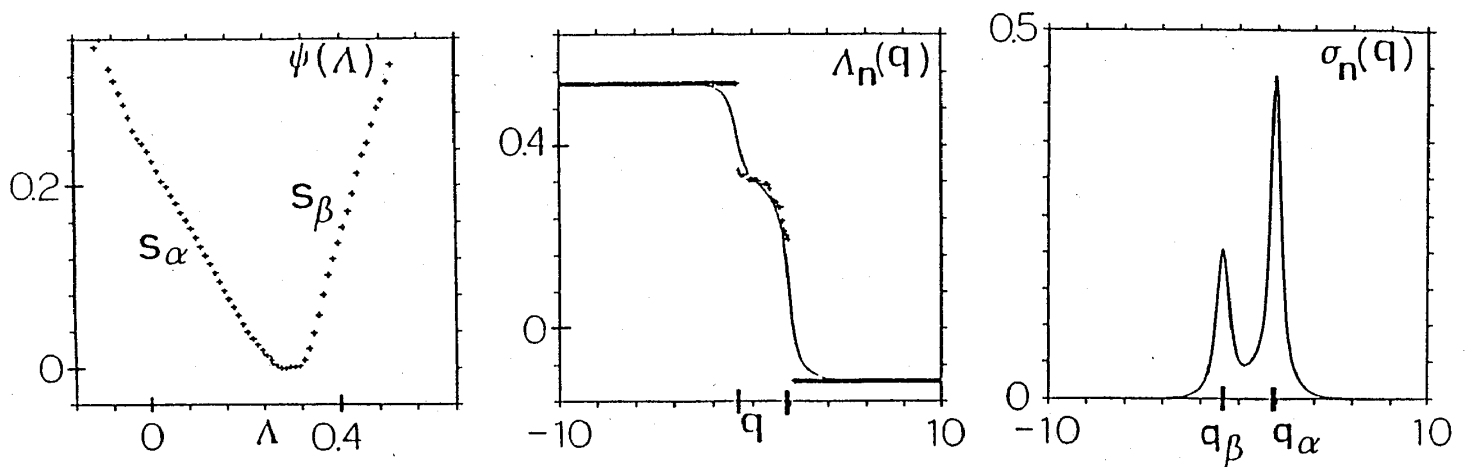


図4 バンド分裂点における線形スロープと $q$ -相転移、  
 $s_\alpha \approx -1.0$ ,  $s_\beta \approx 1.8$ ,  $q_\alpha \approx 2.0$ ,  $q_\beta \approx -0.8$

$\lambda_1(X^*) = \Lambda_{\max} \sim 0.550$ を持つ特異な双曲点 $X^*$ の近傍を表す。このように、 $q$ -相転移の各相は、それぞれ、互いに定性的に異なる局所構造を表す。したがって $q$ -相転移は、アトラクターの特異な局所構造を端的に取り出すものとして有用である。 $\psi(\Lambda)$ は2つの線形スロープ $s_\alpha = 1 - q_\alpha \sim -1.0$ ,  $s_\beta = 1 - q_\beta \sim 1.8$ を持つ。これらの線形スロープが $q$ -相転移をもたらしたのである。

これらの事は、幸い理論的に厳密に解析できる分岐現象があって、厳密に示することができる。また、線形スロープ $s_\alpha$ ,  $s_\beta$ は一般的に理論的に求めることができ、上記の数値実験と良い一致が得られる。<sup>5), 6)</sup>  $\psi(\Lambda)$ の線形スロープは、(2.5)により、 $\nu_\pm = 1$ を意味する。従って、一般に

$$(1) \text{ カオスの分岐点では } \Lambda^\infty > 0, \nu_\pm = 1, \quad (3.1)$$

$$(2) \text{ カオスの発生点では } \Lambda^\infty = 0, \nu_\pm = 1 \quad (3.2)$$

がえられる。ここでカオスの分岐点のあるカスケードの極限としてえられる発生点を考えた。

これらの線形スロープは、分岐点に近づくときどの様に形成されるのであろうか。一般に、下から近づくときと上から近づくときとで異なるのである。下から近づくとき、分岐点  $a_B$  では、図2 (b) (c) のように、アトラクターは固定点や周期点のような不変集合の安定多様体と衝突し、線形スロープが形成される。 $a > a_B$  では、アトラクターはそれら不変集合を取り込んでしまい、線形スロープは変形される。このとき、ある特性時間  $\tau \sim (a - a_B)^{-\gamma}$ , ( $\gamma > 0$ ) が出現し、 $\psi(\Lambda)$  の変形部分  $\Delta\psi(\Lambda)$  は臨界スケーリング則

$$\Delta\psi(\Lambda) = \tau^{-\eta} B(\tau^\xi \Delta\Lambda) \quad (3.3)$$

に従うと考えられる。<sup>10), 11)</sup> ここで  $\eta$ ,  $\xi$  は非負の指数で、 $\Delta\Lambda$  は  $\Lambda$  のある値  $\hat{\Lambda}$  からの差である。 $B(y)$  は  $a$  に依らない  $y$  の普遍的関数である。そのとき、線形スロープはスピード  $\tau^{-\eta}$  で形成されることになる。なお、タイプ I の間欠性カオスやバンドクライシスなどでは、コントロール集合のリベラがアトラクターに取り込まれる。<sup>10), 13)</sup>

周期倍化の  $2^\infty$  分岐、黄金トーラスの崩壊などによるカオスの発生点は、カオス側から見れば、それぞれバンド分裂の  $2^m$  分岐、回転数  $\rho_m = F_{m-1}/F_m$ , ( $F_m$ : フィボナッチ数) と  $\rho_{m+1}$  を持つ2つのカオス・アトラクターの融合分岐などの極限  $m \rightarrow \infty$  である。ここで  $F_m$  は  $F_0 = F_1 = 1$ ,  $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$  で与えられる。このようなカオスの発生点では(3.2)が成立し、(2.3)は  $S_n(X_0) = z_n(X_0)$  となるので、 $n$  と  $S_n$  が対数因子  $\log n$  で発散することを考慮しなければならない。事実、図5と図6は、

$$\beta_n(X_0) \equiv S_n(X_0) / \log(n+c) \quad (3.4)$$

の時系列が、 $n \rightarrow \infty$  のとき収束もせず発散もせず再帰的であることを示す。ここで  $\langle \beta_n \rangle = 0$  であり、 $c$  はオーダー1の正数である。しかも、驚くべきことに、図5、図6のように、自己相似な逆入れ子構造を持つのである。ここで図中の数  $F_m$  や  $2^m$  は当該系列の各ブロックの最高点間の距離を表す。図5はフィボナッチ系列の自己相似性を持ち、図6は2べき系列の自己相似性を持つ。準結晶も同様な自己相似性を持ち、このような自己相似性は、規則的なものとランダムなものとの境界に特有なものと考えられる。従って、 $\beta_n(X_0)$  が区間  $(\beta, \beta + d\beta)$  の値をとる確率を  $P(\beta; n)$   $d\beta$  とすれば、(2.4)に代わって、代数的スケーリング

$$P(\beta; n) = n^{-\psi(\beta)} P(0; n) \quad (3.5)$$

が成り立つことになる。ここで、 $\psi(\beta) \geq \psi(0) = 0$  である。

カオスの発生点に至るカオスの  $m$  次の分岐点直前では、カオスは  $M = 2^m$  個または  $M = F_m$  個のバンドからなる。これらのバンド間のサイクル運動が  $m \rightarrow \infty$  のときカオス発生点における臨界アトラクターをつくる。 $m$  次の分岐点では、 $M$  個のバンドに  $b = 1, 2, \dots, M$  と番号をつければ、軌道

は、時刻  $i = Mj + b - 1$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) において  $b$  番目のバンドにある。したがって、和(2.2)は

$$S_n(X_0) = S_n^0(X_0) + S'_n(X_0), \quad (3.6)$$

$$S_n^0(X_0) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{b=1}^M \lambda_1(X_{Mj+b-1}), \quad (3.7a)$$

$$S'_n(X_0) = \sum_{i=0}^{n'-1} \lambda_1(X_{Mk+i}) \quad (3.7b)$$

とかける。ここで  $n = Mk + n'$ , ( $k = 0, 1, \dots; 1 \leq n' \leq M$ ) である。 $S_n^0(X_0)$  は1つのバンド内のカオス運動をあらわし、 $S'_n(X_0)$  は  $M$  個のバンド間のサイクル運動を表す。これらの

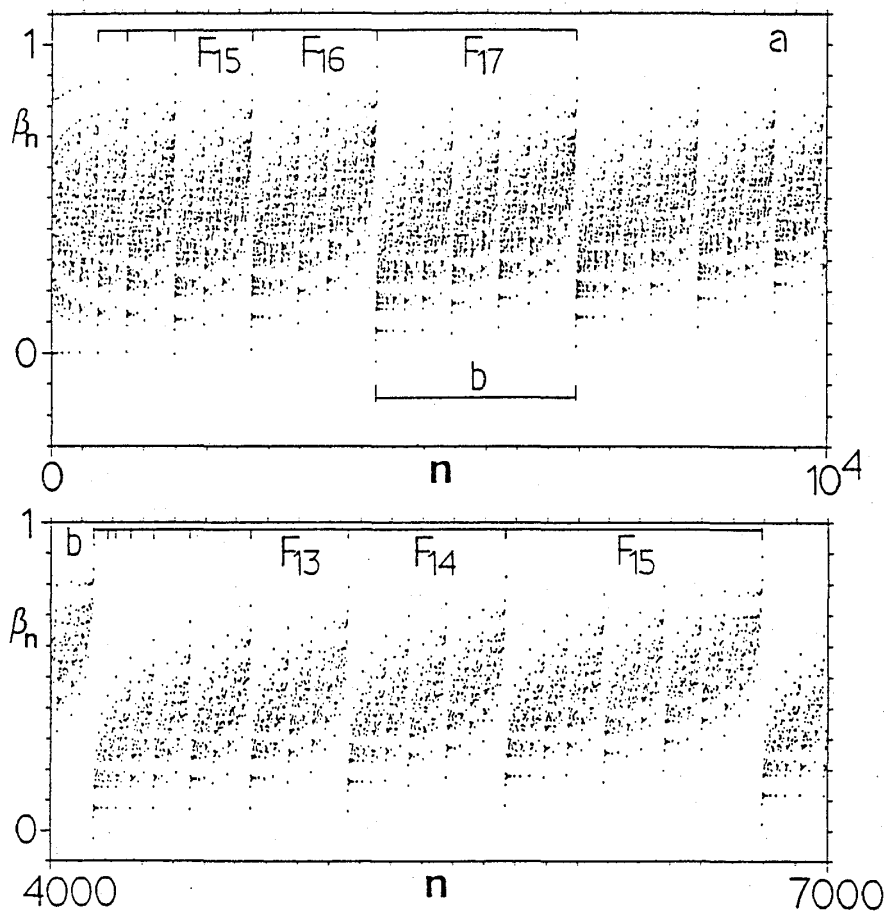


図5 臨界黄金トーラスのフィボナッチ時系列  $\beta_n$

運動は、 $M \gg 1$  のとき、それぞれ(2.3),(3.4)を拡張した量

$$\Lambda_{Mk}(X_0) = S_n^0(X_0) / Mk, \quad (3.8a)$$

$$\beta_n(X_{Mk}) = S'_n(X_0) / \log(n' + c) \quad (3.8b)$$

によって記述されることになる。従って、カオスの発生点及びその近傍を捉えるには、§2で使った統計熱力学形式を拡張しなければならない。

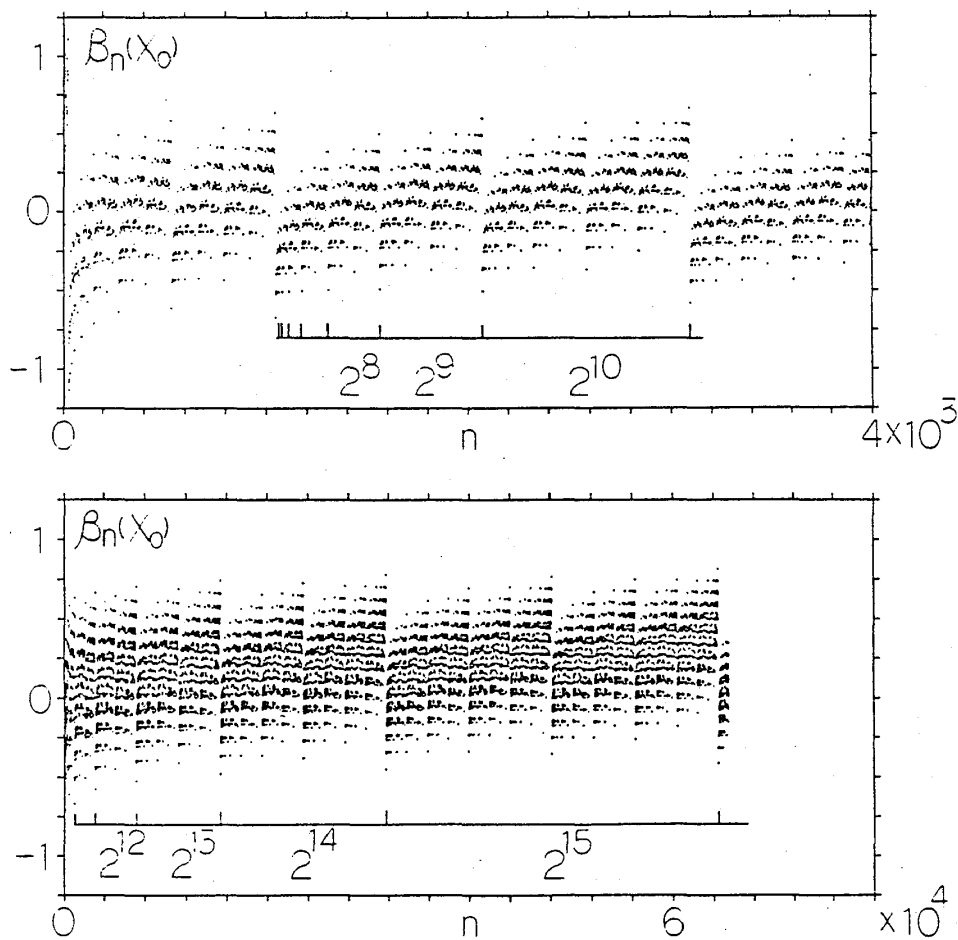


図6 臨界 $2^\infty$ アトラクターの $2^m$ 時系列 $\beta_n$

§ 4. おわりに

§ 1の終わりに挙げた、カオスへのアプローチの3つのステップ(A), (B), (C)に沿って、いくつかの課題を考察した。特に、カオスを知るには、その運動形態が定性的に変化する分岐点を、カオスの発生点を含めて、統計力学的に解明することが基本的であると考えた。

ここでは軌道拡大率の $n$ 和 $S_n(X_0)$ を中心に話を進めてきたが、それは、アトラクターの構造を作り出すプロセスは位相空間における微少なセルの伸長・折り畳みプロセスであり、この $S_n(X_0)$ がそれを最も端的に取り出す量で、しかも和関数であるからである。

特異点スペクトル $f(\alpha)$ は自然な不変測度の局所構造を特徴付ける幾何学的粗視量であるが、カオスの分岐点を的確に捉えることができない。<sup>7), 15)</sup>最近、この $f(\alpha)$ は $\psi(\Lambda)$ で表せることがわかってきた。事実、 $\Lambda_\infty(q) > 0$ である双曲相 $q < q_\alpha = 2$ では、Henon写像(2.1)に対して

$$f(\alpha) = \alpha - [(2-\alpha)/B] \psi\{(\alpha-1)B/(2-\alpha)\} \quad (4.1)$$

が成り立つ。<sup>7)</sup>ここで $B \equiv | \ln |b| |$ である。また、位相空間における軌道の接合確率を使って定義されるエントロピー $K(q)$ も、双曲相では、 $K(q) = \Phi_\infty(q)/(q-1)$ と表される。

尚、Henon写像(2.1)を具体例として展開された上記理論は、強制振子(1.1)の様な微分方程式系に対しても有効であることがわかってきた。<sup>13)</sup>

- 1) J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields (Springer, New York, 1983).
- 2) T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia and B.I. Shraiman, Phys. Rev. A33 (1986), 1141.
- 3) H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. 70 (1983), 1264; 71(1984), 513.
- 4) H. Hata, T. Horita, H. Mori, T. Morita and K. Tomita, Prog. Theor. Phys. 80 (1988), 809.
- 5) K. Tomita, H. Hata, T. Horita, H. Mori and T. Morita, Prog. Theor. Phys. 80 (1988), 935; 81 (1989), No.1.
- 6) T. Horita, H. Hata, H. Mori, T. Morita and K. Tomita, Prog. Theor. Phys. 80 (1988), 923.
- 7) T. Morita, H. Hata, H. Mori, T. Horita and K. Tomita, Prog. Theor. Phys. 78 (1987), 511; 79(1988), 296.
- 8) H. Fujisaka and M. Inoue, Prog. Theor. Phys. 77 (1987), 1334.
- 9) P. Grassberger, R. Badii and A. Politi, J. Stat. Phys. 51 (1988), 135.
- 10) N. Mori, T. Kobayashi, H. Hata, T. Morita, T. Horita and H. Mori, Prog. Theor. Phys. 81 (1989), No.1.
- 11) T. Kobayashi, N. Mori, H. Hata, T. Horita, T. Yoshida and H. Mori, Prog. Theor. Phys. (to be submitted).
- 12) T. Horita, H. Hata, H. Mori, T. Morita, K. Tomita, S. Kuroki and H. Okamoto, Prog. Theor. Phys. 80 (1988), 793.
- 13) K. Tomita, H. Hata, T. Horita, H. Mori, T. Morita, H. Okamoto and H. Tominaga, Prog. Theor. Phys. (submitted).
- 14) T. Horita, H. Hata, H. Mori and K. Tomita, Prog. Theor. Phys. (submitted).
- 15) H. Hata, T. Horita, H. Mori, T. Morita and K. Tomita, Prog. Theor. Phys. 81 (1989), No.1.