

p 群の或例について

中村喜理雄

次のようにつくられた p 群をいくつかの点から検討する.

(以下 $\{\dots\}$ は $\dots$ の生成する群の意である).

$$\Omega = \{A_1\} \times \{A_2\} \times \dots \times \{A_{p+1}\}, \quad |A_i| = p \quad (i=1, \dots, p+1)$$

Ω を $GF(p)$ 上のベクトル空間と考えて A, B が Ω に次の Automorphism をひき起こすとする: ($p > 2$)

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & 0 \\ & -1 & & & & 0 \\ & 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{A}, \bar{B}$ は各端次数は $p+1$ である.

又 $A^{p^2} = A_1^{-1}$, $BAB^{-1} = A_1^{1+p} A_2$, $B^p = A_2$ とすると, 群拡大 $G = \{\Omega, A, B\}$ は位数が p^{p+1} の p 群になる.

これは

(I) Blackburn の意味で maximal class である: つまり G の class は ($|G| = p^{p+1}$ の条件下)

最大の $p+3$ である。これから(II) がえられる

(II) 一般に

$$\max_{G \in \mathcal{G}} |\mathcal{G} : Z_{\mathcal{G}}(G)| = p^{\beta(\mathcal{G})}$$

$\beta(\mathcal{G})$ を $\mathcal{G}$ の Breite とよぶことにすると, 上の $\mathcal{G}$ では

$\beta(\mathcal{G}) = p+1$ であり, 従つて " $1+\beta(\mathcal{G}) < \mathcal{G}$ の class

となる ($\beta(\mathcal{G}) < p$ のときは " $\beta(\mathcal{G}) + 1 \geq \mathcal{G}$ の class" が Willandt によりえられたようである: 彼からの便りによる)。しかし $\beta(\mathcal{G}) > p$ ではないと成り立つことを $\mathcal{G}$ は示している。更に

(III) $\mathcal{G}$ で $\mathcal{N} = \{A_2, \dots, A_{p+1}, B\}$ と

おくと

(1) $\mathcal{G}$ で $\mathcal{N}$ は quasi-normal *

(2) $\mathcal{N}$ は $\mathcal{G}$ の E 以外の normal subgroup を含まない。即ち $\mathcal{N} = E$ (ただし $\mathcal{N} = \bigcap_{X \in \mathcal{G}} X \mathcal{N} X^{-1}$)

(3) $\mathcal{N}$ は abelian でない。

* $\mathcal{N}$ は $\mathcal{G}$ のどの部分群とも全体として可換である

一般に p 群で $\mathcal{G}$ 又は (normal でない) quasi-normal subgroup $\mathcal{N}$ に何か条件をつけると

$\mathcal{N}/\mathcal{N}$ が abelian になることがわかつている ([1],

[5]) が 上の $\mathcal{G}$ は一般には成り立つことを示してい

る。更に 必ずしも p 群とは限らないう一般の有限群について

$\mathcal{N}/\mathcal{N}$ は p 群になることがわかつている ([3]) が, 許を

が群に限定したとき否定的な結果(少くとも一般には)
がえられたから一応, 一般の有限群の場合とは孤立した結果
と考えられよう。

文 献

- [1] Deskins, W. E. : On Quasinormal Subgroups of Finite Groups. *Math. Zeitschr.* 82, 125~132 (1963)
- [2] Kuppert, B. : Endliche Gruppen. Springer Verlag, Berlin Heidelberg (1967)
- [3] Ito, N. und Szép, J. : Über Quasinormalteiler von endlichen Gruppen. *Acta Sci. Math. Szeged* 23, 168~175 (1962)
- [4] Knoche, H. G. : Über den Frobenius-schen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen. *Math. Zeitschr.* 55, 71-83 (1951)
- [5] Nakamura, K. : Über einige Beispiele der Quasinormalteiler einer p -Gruppe. *Kagoya Math. Journ.*

Vol. 31 January, (1968)