

可換バナッハ環の陰関数定理

茨城大 理 林 実樹広

本講では, Arens-Calderón ([2]) による 1 個の陰関数と 1 個の未知関数の場合の陰関数定理を一般化し, t 個の陰関数と n 個の未知関数 ($t \geq n$) の場合を考える. 証明の方法は Gamelin の本 [3] にあるものに従っているが, $t > n$ のときには trivial ではない.

記号の定義 A は単位元をもつ可換バナッハ環, M_A によりその maximal ideal space を表わす. A の元 $f_1, \dots, f_m$ に対して, $\mathbb{C}^{s+m}$ の compact set $\sigma(h_1, \dots, h_s, f_1, \dots, f_m)$ を

$$\sigma(h_1, \dots, h_s, f_1, \dots, f_m) = \{(h_1(x), \dots, h_s(x), f_1(x), \dots, f_m(x)) : x \in M_A\}$$

により定義し, joint spectrum とする.

[定理] ([5]) $h_1, \dots, h_s \in M_A$ 上の複素数値連続関数とする. A の元 $f_1, \dots, f_m$ 及び, joint spectrum $\sigma(h_1, \dots, h_s, f_1, \dots, f_m)$ の近傍で正則な t 個 ($t \geq n$) の関数 $G_k(z_1, \dots, z_{s+n})$ ($k=1, \dots, t$) が存在して,

$$(1) \quad G_k(h_1, \dots, h_s, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n) = 0 \quad \text{on } M_A \quad \text{for all } k=1, \dots, t$$

が成立しているものとする。このとき、もし Jacobi 行列 $\frac{\partial(G_1, \dots, G_t)}{\partial(z_1, \dots, z_s)}$ の rank が $\mathcal{O}(h_1, \dots, h_s, f_1, \dots, f_n)$ 上で λ となっていれば、 $h_1, \dots, h_s$ は A の元の Gelfand 変換となっており、すなわち、 A の元 $g_1, \dots, g_s$ で

$$(2) \quad \hat{g}_1 = h_1, \dots, \hat{g}_s = h_s$$

となっているものがある。この仮定に加えて、Jacobi 行列 $\frac{\partial(G_1, \dots, G_t)}{\partial(z_1, \dots, z_{s+n})}$ の rank が $\mathcal{O}(h_1, \dots, h_s, f_1, \dots, f_n)$ のある近傍上でも λ となっていれば、 $g_1, \dots, g_s$ は functional calculus の意味で

$$(3) \quad G_k(g_1, \dots, g_s, f_1, \dots, f_n) = 0 \quad \text{for all } k=1, \dots, t$$

を満足するように取ることが出来る。更に、もし (2) 及び (3) をみたす A の元 $g_1, \dots, g_s$ が存在することがわかっているときは、才 1 の仮定のもとで、それらは一意である。

以下、定理の証明を述べる。まず次の補題が必要である。

補題 1 (Allan [1], C.T. [6], Th. 8A) $f_1, \dots, f_n$ を A の元とする。 V が $\mathbb{C}^n$ のある open set D における subvariety で $\mathcal{O}(f_1, \dots, f_n) \subseteq V$ となるものであれば、 V 上の任意の正則関数 F に対して、

A の元 f があって, $\hat{f} = F(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m)$ となる.

証明 Arens-Calderón の補題により, A の元 $f_{n+1}, \dots, f_m$ を取って, $\pi(\hat{\alpha}(f_1, \dots, f_m)) \subseteq D$ とできる; ただし, $\hat{\alpha}(\cdot)$ は $\alpha(\cdot)$ の polynomial convex hull を表わし, $\pi(z_1, \dots, z_n, \dots, z_m) = (z_1, \dots, z_n)$ とする. $\hat{\alpha}(f_1, \dots, f_m)$ を含む polynomial convex open set P^m を取って $\pi(P^m) \subseteq D$ とすれば, $V' = P^m \cap (V \times \mathbb{C}^{m-n})$ は P^m の sub-variety で, $\alpha(f_1, \dots, f_m)$ を含んでいる. よく知られた定理により V' 上の正則関数 $F \circ \pi$ は P^m 上の正則関数 F' に延長できる. そこで, $f = F'(f_1, \dots, f_m)$ とすると, $\hat{f} = F'(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m) = F(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m)$

補題 2 (c.f. [3] Chap III, Th. 6.1 の証明) $h_1, \dots, h_s \in M_A$ 上の連続関数とする. A の元 $f_1, \dots, f_n$ 及び M_A の open covering $\{U\}$ があって, $x, y \in U$ かつ $f_i(x) = f_i(y)$ for all $i=1, \dots, n$ ならば $h_j(x) = h_j(y)$, $j=1, \dots, s$ とする. このとき, A の元 $f_{n+1}, \dots, f_m$ が存在して, $x, y \in \underline{M_A}$ に対して $f_i(x) = f_i(y)$ for all $i=1, \dots, m$ ならば $h_j(x) = h_j(y)$, $j=1, \dots, s$ となる.

証明 $M_A \times M_A$ の対角集合を Δ とする. $W = \bigcup_{U \in \{U\}} U \times U$ は Δ を含んでいるから, $(x, y) \in M_A \times M_A \setminus W$ ならば, A の元 f があって $f(x) \neq f(y)$. よって, x, y の小さな近傍 U_x, U_y を取って, $x' \in U_x, y' \in U_y$ ならば $f(x') \neq f(y')$ となるようにできる. $M_A \times M_A \setminus W$ はコンパクトであるから, 有限被覆 $U_{x_i} \times U_{y_i}$,

..., $U_{x_l} \times U_{y_l}$ が取れる. そうすると, U_{x_i}, U_{y_i} を作るのに使った A の元 f_{m+i} , $i=1, \dots, l$ が求めるものとなる.

存在の証明: 点 $w \in \sigma(h_1, \dots, h_p, t_1, \dots, t_p)$ に対して, 仮定により添字 $k_1, \dots, k_p$ があって $\det \frac{\partial (G_{k_1}, \dots, G_{k_p})}{\partial (z_1, \dots, z_p)}(w) \neq 0$ とする.

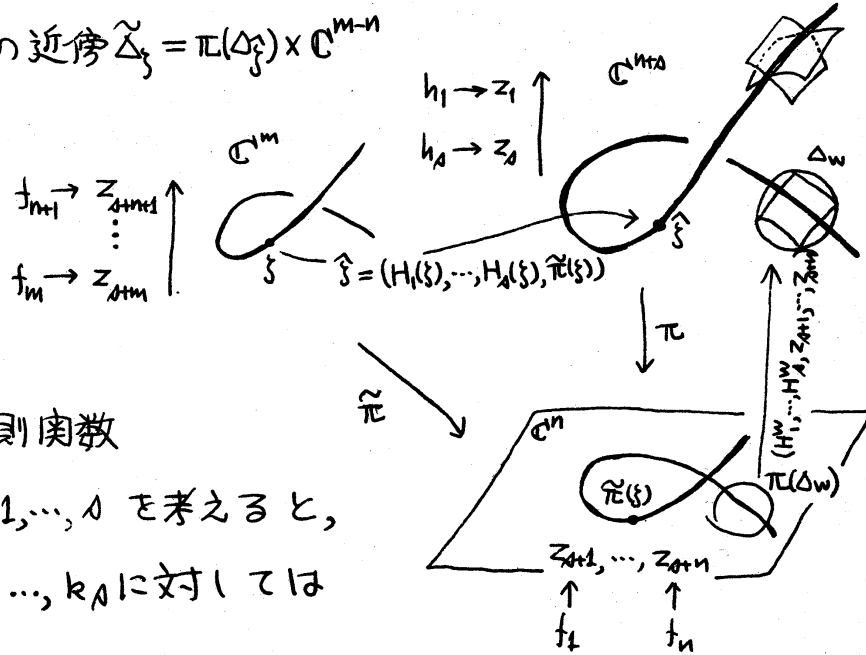
$\pi(z_1, \dots, z_{n+m}) = (z_{n+1}, \dots, z_{n+m})$ とすると、正則関数の陰関数定理により、 w の近傍 $\Delta_w (\subseteq \mathbb{C}^{n+m})$ 及び $\pi(\Delta_w) (\subseteq \mathbb{C}^m)$ 上で定義された正則関数 $H_1^w, \dots, H_m^w$ があって

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (z_1, \dots, z_{\sigma+n}) \in \Delta w \text{ かつ } G_{R_\ell}(z_1, \dots, z_\sigma, z_{\sigma+1}, \dots, z_{\sigma+n}) = 0, \\ \text{iff} \\ (z_1, \dots, z_\sigma) \in \pi(\Delta w) \text{ かつ } z_j = H_j^w(z_{\sigma+1}, \dots, z_{\sigma+n}), \quad j = 1, \dots, \sigma \end{array} \right.$$

となる. よって式(1)から, $(h_1(x), \dots, h_p(x), \hat{f}_1(x), \dots, \hat{f}_n(x)) \in \Delta_w$ となるような $x \in M_A$ に対しては, $h_j(x) = H_j^w(\hat{f}_1(x), \dots, \hat{f}_n(x))$ となる. 従って $U^{(w)} = (h_1, \dots, h_p, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n)^{-1}(\Delta_w)$ は M_A の open cover, また $U^{(w)}$ 上では h_j は $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n$ の値によって決まる. 従って, 補題2により, A の元 $t_{n+1}, \dots, t_m$ をみつめて, h_j は M_A 上 $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n$ の値によ, て決まるように出来る. よって $\phi(t_1, \dots, t_m)$ 上の連続関数 H_j があって $h_j(x) = H_j(\hat{f}_1(x), \dots, \hat{f}_n(x))$ となる. この H_j を $\phi(t_1, \dots, t_m)$ を含む variety 上の正則関数に延長出来れば, 最初の主張が得られる. そこで, $\tilde{\pi}(z_1, \dots, z_m) = (z_1, \dots, z_n)$ とする. まず条件(1)から

$$(5) \quad G_k(H_1(\xi), \dots, H_n(\xi), \tilde{\pi}(\xi)) = 0 \quad \text{on } \mathcal{O}(t_1, \dots, t_m) \\ \text{for } k=1, \dots, t,$$

となる. 一方 $\xi \in \mathcal{O}(t_1, \dots, t_m)$ に対して, $\hat{\xi} = (H_1(\xi), \dots, H_n(\xi), \tilde{\pi}(\xi))$ とおいて, ξ の近傍 $\tilde{\Delta}_\xi = \pi(\Delta_\xi) \times \mathbb{C}^{m-n}$



及び $\tilde{\Delta}_\xi$ 上の正則関数

$$\tilde{H}_j^{\hat{\xi}} = H_j^{\hat{\xi}} \circ \tilde{\pi}, \quad j=1, \dots, n \text{ を考えると,}$$

(4) から $k=k_1, \dots, k_n$ に対しては

$$(*) \quad G_k(\tilde{H}_1^{\hat{\xi}}(\xi), \dots, \tilde{H}_n^{\hat{\xi}}(\xi), \tilde{\pi}(\xi)) = 0 \quad \text{on } \tilde{\Delta}_\xi$$

となっている. さて, joint spectrum $\mathcal{O}(h_1, \dots, h_n, t_1, \dots, t_n)$ のコンパクト性から $\{\Delta_w\}$ が有限被覆としてよく, 従って $H_1^w, \dots, H_n^w$ も全体で有限個であるとしてよく, これらは Δ_w 上で一様連続であるとしてよい. このとき, 各 Δ_w は w を中心とする半径 ε の polydisc $\Delta^m(\xi; \varepsilon) \subset \tilde{\Delta}_\xi$ を次のように取ることが出来る:

$$\begin{cases} \xi \in \Delta^m(\xi; \varepsilon) \text{ ならば } (\tilde{H}_1^{\hat{\xi}}(\xi), \dots, \tilde{H}_n^{\hat{\xi}}(\xi), \tilde{\pi}(\xi)) \in \Delta^{n+n}(w; \delta/2) \\ \xi \in \Delta^m(\xi; \varepsilon) \cap \mathcal{O}(t_1, \dots, t_m) \text{ ならば } (H_1(\xi), \dots, H_n(\xi), \tilde{\pi}(\xi)) \in \Delta^{n+n}(w; \delta/2) \end{cases}$$

(5) 及び (4) によって, $\tilde{H}_j^s$ は $\Delta^m(s; \varepsilon)$ 上では H_j の延長になっている.
 また $\tilde{U}_j = \Delta^m(s; \varepsilon/2)$ とおいて, $\tilde{U}_j$ の subvariety を

$$(6) \quad V_j = \{ \xi \in \tilde{U}_j; G_k(\tilde{H}_1^s(\xi), \dots, \tilde{H}_t^s(\xi), \tilde{\pi}(\xi)) = 0, k=1, \dots, t \}$$

によって定義して, $\tilde{U} = \bigcup \tilde{U}_j$, $V = \bigcup V_j$ (ただし, $j \in \{t_1, \dots, t_m\}$) とおく. (4) により V は $\{t_1, \dots, t_m\}$ を含んでおり, (4) における一意性から, $\tilde{H}_j^s$ は V 上では一つの正則関数 $\tilde{H}_j$ を定義していて, H_j の拡張となっており, V は $\tilde{U}$ の subvariety になることがわかる. よって, $g_j = \tilde{H}_j(t_1, \dots, t_m)$ が求める元である.

$\text{rank} \frac{\partial(G_1, \dots, G_t)}{\partial(z_1, \dots, z_{t+n})} = 1$ が $\{h_1, \dots, h_s, t_1, \dots, t_n\}$ の近傍で成立するという仮定を加える. (*) にあるように, $k=k_1, \dots, k_0$ に対しては $G_k(\tilde{H}_1^s(\xi), \dots, \tilde{H}_t^s(\xi), \tilde{\pi}(\xi)) = 0$ on $\tilde{\Delta}_j$ が成立しているが, この仮定は, G_k のうち一次独立なものは $G_{k_1}, \dots, G_{k_0}$ だけで, その他の G_k は $G_{k_1}, \dots, G_{k_0}$ を用いて表わすことができるということであるから, すべての k に対して (*) が成立することになる. よって, (6) においては, $V_j = \tilde{U}_j$, 従って, $V = \tilde{U}$ となり $\mathbb{C}^m$ の open set $\tilde{U}$ 上で方程式

$$G_k(\tilde{H}_1(\xi_1, \dots, \xi_m), \dots, \tilde{H}_t(\xi_1, \dots, \xi_m), \xi_1, \dots, \xi_n) = 0, k=1, \dots, t$$

が成立する. よって各変数に $t_1, \dots, t_n$ を代入すると,

$$G_k(g_1, \dots, g_n, f_1, \dots, f_m) = 0, \quad k=1, \dots, t$$

となり、 $\circ 2$ の主張が得られる。

最後に一意性であるが、そのために次の補題を使う。

補題3 (g_{ki}) を A の元からなる $s \times t$ 行列 ($t \geq 1$) であって、各点 $x \in M_A$ に対して定まる行列 $(\hat{g}_{ki}(x))$ が nonsingular, すなわち, $\text{rank}(\hat{g}_{ki}(x)) = 1$ とする。このとき, A の元からなる $t \times s$ 行列 (h_{jk}) が存在して,

$$\begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{s1} & \dots & h_{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{t1} & \dots & g_{ts} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad (1 \times 1 \text{ 単位行列})$$

となる。

証明 仮定により $\mathbb{C}^{st}$ 上で座標 $(z_{11}, \dots, z_{1s}, \dots, z_{t1}, \dots, z_{ts})$ で考えると, $s \times t$ 行列 (z_{ki}) は joint spectrum $\mathcal{N}(g_{11}, \dots, g_{1s}, \dots, g_{t1}, \dots, g_{ts})$ の近傍で nonsingular である。Arens-Calderónの補題により A の元 $u_1, \dots, u_s$ があって, $\pi(z_{11}, \dots, z_{ts}, z_1, \dots, z_s) = (z_{11}, \dots, z_{ts})$ とするとき, 行列 (z_{ki}) は $\pi(\hat{\mathcal{N}}(g_{11}, \dots, g_{ts}, u_1, \dots, u_s))$ の近傍で nonsingular となる。そこで, 行列 (z_{ki}) を $\mathbb{C}^{st+s}$ 上の行列関数と考えて, $\hat{\mathcal{N}}(g_{11}, \dots, g_{ts}, u_1, \dots, u_s)$ を含む open polynomial convex set P を考えれば, (z_{ki}) は P 上で nonsingular にできる。①を P 上の正則関数の germ の作る sheaf とし, $\mathbb{C}^1$ は ①の Δ 包の面積

をあらわす $\mathcal{O}$ -module とする. このとき, 行列 (z_{ki}) によつて sheaf homomorphism $\Phi: \mathcal{O}^s \rightarrow \mathcal{O}^t$ が induce される. quotient sheaf を $\mathcal{I} = \mathcal{O}^t / \Phi(\mathcal{O}^s)$ とすれば, exact 列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^s \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}^t \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow 0$$

が得られる. ここで, 行列 (z_{ki}) が nonsingular ということから $\mathcal{I}$ が locally free sheaf となる. [4] Chap. VIII, Th. 8c によつて, 上の exact 列は split する. すなわち, sheaf homomorphism $\Psi: \mathcal{O}^t \rightarrow \mathcal{O}^s$ があつて, $\Psi \circ \Phi = \text{identity}$ となる. Ψ の行列による表現を (h_{jk}) とすると, 各 h_{jk} は open set P 上の正則関数であり, $(h_{jk})(z_{jk}) = \lambda \times \lambda$ 単位行列 となる. よつて, $h_{jk} = h_{jk}(g_{11}, \dots, g_{st}, u_1, \dots, u_r)$ とおけば, 求める行列 (h_{jk}) が得られる.

一意性の証明: A の元 $g_1, \dots, g_s$ で, $G_k(g_1, \dots, g_s, t_1, \dots, t_n) = 0$, $k=1, \dots, t$ となるものが存在して $\text{rank} \frac{\partial(G_1, \dots, G_t)}{\partial(z_1, \dots, z_s)} = 1$ on $\alpha(g_1, \dots, g_s, t_1, \dots, t_n)$ とする. このとき, $\hat{r}_1 = \dots = \hat{r}_s = 0$ なる A の元 $r_1, \dots, r_s$ があつて $G_k(g_1+r_1, \dots, g_s+r_s, t_1, \dots, t_n) = 0$ ならば, A の元として $r_1 = \dots = r_s = 0$ を示めせばよい. とこ
 りで, 変数 $(z_1, \dots, z_{s+n}, a_1, \dots, a_n)$ の関数 $G_k(z_1+a_1, \dots, z_s+a_s, z_{s+1}, \dots, z_{s+n})$ は, ε を十分小さく取れば, $\alpha(g_1, \dots, g_s, t_1, \dots, t_n) \times \Delta^0(0; \varepsilon)$ の近傍で正則となる. 変数 $a_1, \dots, a_s$ に関してテイ

ラ一展開して考えれば, $\cap (g_1, \dots, g_n, t_1, \dots, t_n) \times \Delta^0(0; \varepsilon)$ の近傍で
正則な関数 F_{kij} があって

$$\begin{aligned} G_k(z_1 + a_1, \dots, z_n + a_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+t}) - G_k(z_1, \dots, z_{n+t}) \\ = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial G_k}{\partial z_i}(z_1, \dots, z_{n+t}) \\ = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j F_{kij}(z_1, \dots, z_{n+t}; a_1, \dots, a_n), \quad k=1, \dots, t \end{aligned}$$

と書ける. ここで, 元 $g_1, \dots, g_n, t_1, \dots, t_n, r_1, \dots, r_n$ を各変数
に代入すると

$$\begin{aligned} (**) &= \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial G_k}{\partial z_i}(g_1, \dots, g_n, t_1, \dots, t_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^n r_i r_j F_{kij}(g_1, \dots, g_n, t_1, \dots, t_n; r_1, \dots, r_n) \end{aligned}$$

となる. さて,

$$g_{ki} = \frac{\partial G_k}{\partial z_i}(g_1, \dots, g_n, t_1, \dots, t_n) + \sum_{j=1}^n r_j F_{kij}(g_1, \dots, g_n, t_1, \dots, t_n; r_1, \dots, r_n)$$

とあって, (**) を行列の形で書けば,

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{t1} & \dots & g_{tn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. $(\hat{g}_{ki}) = \frac{\partial(G_1, \dots, G_t)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}$ であるから, 仮定より (g_{ki}) は

A の元からなる nonsingular な行列である. 従って, 補題3に
より左逆行列があるから $r_1 = \dots = r_n = 0$ が得られる. (証明終)

あと書き: 補題3において, はじめ考えたときには, 行列 (g_{ki}) に足りない成分を補って t 次の正方行列で, $\det(\hat{g}_{ki}) \neq 0$ on M_A となるものが作くれないかと思った. そうすれば $\det(g_{ki})$ は A の invertible 元となり, Cramér の公式で (g_{ki}) の逆行列が作くれる. (しかし, これは $t=0$ のときにしか成功しない). — 反例を知らないのでありますが, たぶん一般には出来ないと思います. (しかしながら, 補題3で作った quotient sheaf $\mathcal{F} = \mathcal{O}^t / \mathcal{I}(\mathcal{O}^t)$ が free sheaf になっているならば, (g_{ki}) に足りない成分を補って t 次の可逆な正方行列にすることができるとは思っています.

なお, 残念なことは, この定理には今のところこれといった応用のないことである.

参 考 文 献

1. Allan, G. R., An extension of the Silov-Arens-Calderón theorem, J. London Math. Soc. 44 (1969), 595-601.
2. Arens, R. and Calderón, A. P., Analytic functions of several Banach algebra elements, Ann. Math. 62 (1955), 204-216.
3. Gamelin, T. W., Uniform Algebras, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969.
4. Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic Functions of Several

Complex Variables, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.,
1965.

5. Hayashi, M., Implicit function theorem for Banach algebras,
(to appear).

6. Stout, E. L., The Theory of Uniform Algebras, Bogden & Quigley,
Inc. 1971.