

拡大 Affine-Root 系の Θ -不変式と 楕円特異点の moduli 空間

京大 数研 斎藤恭司
SAITO, Kyoji

§0 はじめに

有理二重点と呼ばれる、複素 2 次元の特異点と、 $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_4, G_2$ 型のルート系と密接に関係する事は、丁史的に繰り返し発見されてきた。(例えば [2], [16])

この様な古典的意味での、ルート系(すなわち単純リー群)は、これきりしかないのだから、特異点とルート系の関係は、これ等の“例”でおしまいなの、“面白い”現象の様に思われてきた。ところが、楕円特異点や例外型特異点の最近の研究の導かれて、ルート系の概念を一般化する事により、逆に、その一般化されたルート系を用いて、もとの特異点の moduli を記述する事ができるようになってきた。

現在の所、これ等を例で、へんりんしか見えないが、^(ある程の)一般化したルート系と mixed Hodge 構造との間に深い関係がある様に思える。

本稿は単純楕円特異点のみにふれる。(詳細は [5][6][13][14][17])
(本稿の §3~§6 は [4], [15] の補説に充てる。)

§1. 一般化された、ルート系の公理系

記号: F : 実有限次元ベクトル空間

$I: F \times F \rightarrow \mathbb{R}$, F 上の対称双線形形式

$\alpha \in F$ が non-isotropic $\Leftrightarrow I(\alpha, \alpha) \neq 0$
この時

$\alpha^\vee := \frac{2}{I(\alpha, \alpha)} \alpha$ を α の dual と言う。

○ $\alpha \in F$ が non-isotropic の時, 鏡映: $w_\alpha \in GL(F)$ を

$$w_\alpha(u) = u - I(u, \alpha^\vee) \alpha$$

により定義する。

定義 部分集合 $R \subset F$ が, I に属するルート系である

とは, 以下の公理 1. — 5. を満す事である。

公理 1. R で生成される F の部分加群を $Q(R)$ と書く。すると

$Q(R)$ は F の格子となる。 i.e. $Q(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq F$.

公理 2. R の元はすべて, non-isotropic である。

公理 3. R の任意の元 $\alpha, \beta \in R$ に対し,

$$I(\alpha, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}$$

公理 4 R の任意の元 $\alpha \in R$ の鏡映 w_α に対し R は不変。 i.e.

$$w_\alpha R = R$$

公理 5. (簡約性) $R = R_1 \perp R_2$ かつ $R_1 \perp R_2$ (i.e.

$I(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ for $\forall \alpha_i \in R_i$) ならば, $R_1 = \emptyset$ 又は $R_2 = \emptyset$.

(注. R がルート系ならば, $R^\vee := \{\alpha^\vee : \alpha \in R\} \subset F$ も同じ I に属するルート系となる.)

これ等の公理系はかなりゆるいものであるが, これを基

礎に, 一般理論を構築できる。(cf [14])

例 1. I が positive definite ならば, 自動的に R は有限集合と

なり, 古典的な意味でのルート系 ([1]) とする。

例 2. I が semi-definite で, $\text{rad } I := \{x \in F : I(x, y) = 0 \ \forall y \in F\}$

の rank が 1 ならば, R は affine root 系となる。([8])

例3. *symmetrizable Kac-Moody Lie 環* の *real root* の集合は、上記の公理系を満たす。

例4. $\text{rank } F = 2$ で、 I が indefinite (i.e. signature $(r, 1)$) の時、 I に属する ルート系は全部で、72 種類に分類される。([13])

§2. vanishing cycles of a singularity.

さて、上記の様に、ルート系の概念を非常にゆるい公理系にまとめたのは、以下に述べる ^(与えられた特異点に associate した) *vanishing cycles* の集合を、系統的に取りあつかいたい為である。

特異点と、一般化されたルート系とを結びつけるものは、古くから、Picard-Lefschetz 理論として、知られている。(Deligne, 他の人達による mixed Hodge 理論の進展もあるが、ここでは超曲面孤立特異点に話しを限る。)

X_0 を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の 1 つの多項式 $f(x) = f(x_0, \dots, x_n) = 0$ で定義された超曲面とし、点 $x_0 \in X_0$ を X_0 の孤立特異点とする。この時 点 x_0 における *vanishing homology* 群を、

$$H := H_n(X_\delta \cap B_\varepsilon, \mathbb{Z})$$

と定義する。但し、ここで、 $X_\delta := \{x \in \mathbb{C}^{n+1} : f(x) = \delta\}$,

$B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{C}^{n+1} : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$ とし、 ε, δ を正実数で

$0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$ とする。 H は、 δ, ε によらない。Milnor により、

H は $\mathbb{Z}$ -free 加群で その rank は $\mu := \text{rank}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+1}_{X_0} / (\frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}))$ で与えられる。

X_0 は複素 n 多様体だから ^(境界付) 実 $2n$ 多様体として、intersection form

$$I: H \times H \longrightarrow \mathbb{Z}$$

が Poincaré duality $H_n(X) \rightarrow H_n(X, \partial X) \xrightarrow{\text{P.D.}} H^n(X)$ を用いて定まる。

以降 n を偶数とし、従って I は symmetric bilinear form となる。

H の部分集合 R (vanishing cycle の集合と呼ぶ事にする) を以下の通り定義すると、 R は $F := H^2_{\mathbb{Z}} R = H_n(X_0, \mathbb{Z})$ の部分集合として、 I に属する、一般化された ルー系 となる。

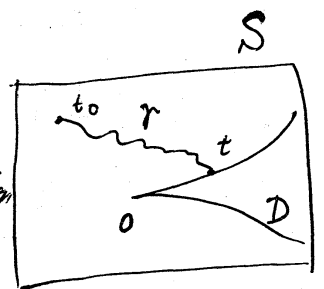
R の定義 $X \rightarrow S$ を X_0 の universal deformation とし、点 $t \in S$ の fiber を X_t とする。 S は μ 次元多様体で、基点 $0 \in S$ を持っている。 $D \subset S$ を $X \rightarrow S$ の discriminant とすると、 D の generic point t に $t \neq 1$ 。 X_t は non-degenerate な n -重点をただ一つ持ち、従って $H_n(X_t, \mathbb{Z})$ は rank $\mu-1$ の加群となる。そこで、 $S-D$ の generic point t_0 を一つ fix し、

$S-D$ 中の real path で t_0 と t を結ぶものを γ とすると、 γ に沿って fiber X_{t_0} の X_t への retraction

が定まり surjective map $H_n(X_{t_0}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X_t, \mathbb{Z})$

が定まる。この kernel $\simeq \mathbb{Z}$ の generator を道 γ に沿った vanishing cycle と呼ぶ。 t_0 を fix して、 γ, t を動かして得られる vanishing

cycle 達の集合 $\subset H_n(X_{t_0}, \mathbb{Z})$ を R と記す。この時 $\forall \alpha \in R$ に α



$$I(\alpha, \alpha) = (-1)^{\frac{n}{2}} 2$$

となる。 R が、ルート系の公理系を満たす事も、最後の公理 5を除いて、容易にたしかめられる。公理 5は、discriminant D が既約である事による。

この様して定まったルート系 $R \subset H_m(X_0, \mathbb{Z})$ は同型を除いて $\phi \in S-D$ によらないので、 R を (X_0, x_0) に対応したルート系と呼ぶ事にする。

例 1. $(X_0, x_0) = A_\ell, D_\ell$, また E_ℓ 型の有理=重点.

$\Rightarrow I: H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$ は negative definite

$R: A_\ell, D_\ell$, また E_ℓ 型の有限ルート系 (cf [2])

例 2. $(X_0, x_0) = \tilde{E}_8, \tilde{E}_7, \tilde{E}_6, \tilde{D}_5$ また $\tilde{A}_4$ 型の単純楕円特異点,

= Chern class が $-1, -2, -3, -4, -5$ となる様な、楕円曲線上の

line bundle の零セクションを blowdown したもの.

$\Rightarrow I: H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$ negative semi-definite かつ $\text{rank}(\text{rad } I) = 2$,

$R := E_8^{(1,1)}, E_7^{(1,1)}, E_6^{(1,1)}, D_5^{(1,1)}$ また $A_4^{(1,1)}$ 型の拡大アフィン

ルート系 ([9] [4] 後述)

例 3. $(X_0, x_0) = 14$ の unimodular 例外型特異点 (Cirnola, Dolgachev) の一.

$\Rightarrow I: H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$ は indefinite, $\mu_4 = 2, \mu_0 = 0, \mu_- = \mu - 2$,

$R:$ 現在研究中. (lattice H の研究は Brieskorn, Looijenga
がある.) [3]

§3. 拡大 affine root 系

前の §2 の単純構円特異点の例に導かれて、以下の定義をする。(以下の定義の marking は、period mapping の研究に由来するが、ここでは、立ち入らない。詳細は [12], [15])

定義

1. R が 拡大 affine root 系 であるとは、その属する I が、

positive semi definite かつ $\text{rad } I := \{x \in F : I(x, y) = 0, \forall y \in F\}$

の rank が 2 の事。(以下 $\text{rank } F = l+2$, $\mu_+ = l$, $\mu_0 = 2$, $\mu_- = 0$ とお

2. 拡大 affine root 系 R の marking G とは, $\text{rad } I (\simeq \mathbb{R}^2)$

の実一次元線型部分空間 で、 $G \cap Q(R) \simeq \mathbb{Z}$ とするものの事。

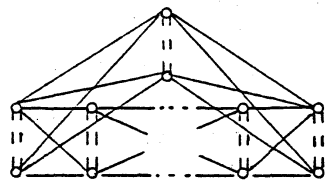
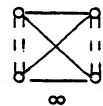
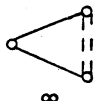
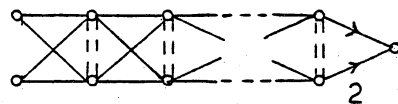
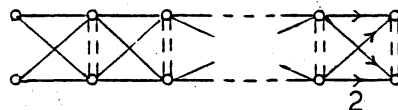
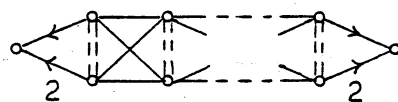
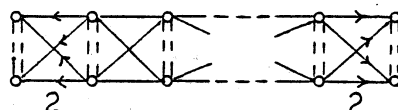
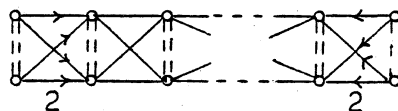
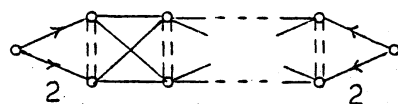
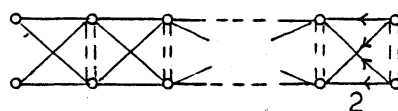
注 1 (R, G) を 拡大 affine root 系 と その marking の pair とする。 R を $F/\text{rad } I$, $F/G \hookrightarrow \text{projection}$ した像集合を、それぞれ、 $R/\text{rad } I$, R/G と書く事にすると、それぞれ、 λ ルート系となり、§1 での例 1, 例 2, により、それぞれ、有限 λ -系, アフィン λ -系となる。

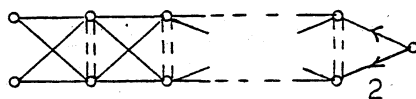
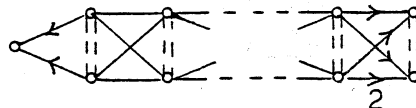
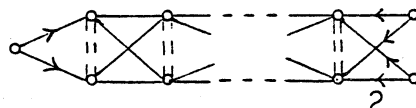
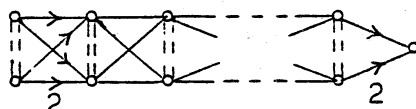
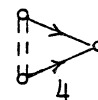
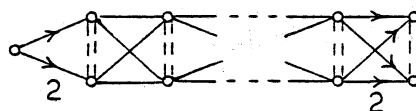
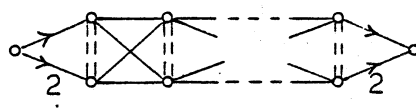
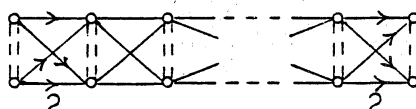
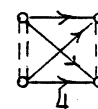
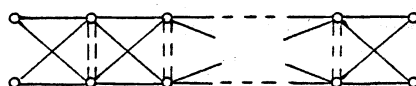
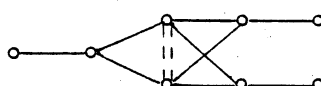
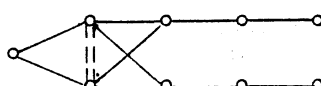
以下、常に、 R/G は reduced (i.e. $\exists \alpha \in F$ s.t. $\alpha, 2\alpha \in R$) と仮定する。

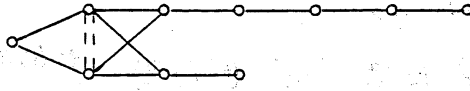
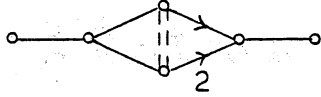
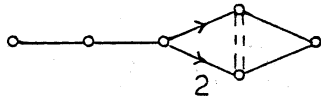
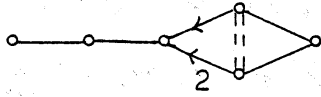
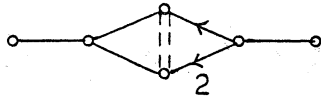
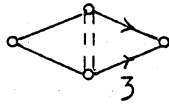
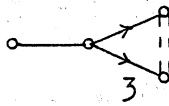
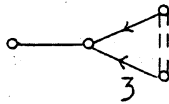
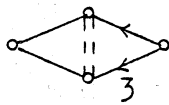
定理, marking 付, 拡大 affine root 系 (R, G) は, 以下の表

により分類される。すなわち、 (R, G) の各同型類に対し、型 ^(type) 及び Dynkin 図型を定義し (説明後出)、その一覧表を与える。

Types and Dynkin diagrams for Extended Affine Root Systems

 $A_{\ell}^{(1,1)}$  $(\ell \geq 2)$  $(\ell = 1)$ $A_1^{(1,1)*}$  $B_{\ell}^{(1,1)}$  $(\ell \geq 3)$ $B_{\ell}^{(1,2)}$  $(\ell \geq 3)$ $B_{\ell}^{(2,1)}$  $(\ell \geq 2)$ $B_{\ell}^{(2,2)}$  $(\ell \geq 2)$ $C_{\ell}^{(1,1)}$  $(\ell \geq 2)$ $C_{\ell}^{(1,2)}$  $(\ell \geq 2)$ $C_{\ell}^{(2,1)}$  $(\ell \geq 3)$

$C_\ell^{(2,2)}$  $(\ell \geq 3)$ $B_\ell^{(2,2)*}$  $(\ell \geq 2)$ $C_\ell^{(1,1)*}$  $(\ell \geq 2)$ $BC_\ell^{(2,1)}$  $(\ell \geq 2),$  $(\ell = 1)$ $BC_\ell^{(2,4)}$  $(\ell \geq 2),$  $(\ell = 1)$ $BC_\ell^{(2,2)}(1)$  $(\ell \geq 2)$ $BC_\ell^{(2,2)}(2)$  $(\ell \geq 2),$  $(\ell = 1)$ $D_\ell^{(1,1)}$  $(\ell \geq 4)$ $E_6^{(1,1)}$  $E_7^{(1,1)}$ 

$E_8^{(1,1)}$  $F_4^{(1,1)}$  $F_4^{(1,2)}$  $F_4^{(2,1)}$  $F_4^{(2,2)}$  $G_2^{(1,1)}$  $G_2^{(1,3)}$  $G_2^{(3,1)}$  $G_2^{(3,3)}$ 

(R, G)

説明 1. 各ルート系に対応させた型 $P_e^{(t_1, t_2)}$ のうち、 P_e は有限ルート系 R/G の型を表わし、 t_1, t_2 は (R, G) の #1, #2 tier 数と呼んで、次の様に定義する。(cf. [] (4.3))

$$t_1(R, G) := (b^\vee \bmod a^\vee : b \bmod a) \times (I_{R^\vee} : I)$$

$$t_2(R, G) := (a^\vee : a) \times (I_{R^\vee} : I)$$

但し $\equiv$ で $a, a^\vee$ は $\left\{ \begin{array}{l} \text{それぞれ} \\ \text{lattice } Q(R) \cap G, Q(R^\vee) \cap G \end{array} \right.$ の basis, $b, b^\vee$ はそれぞれ lattice $Q(R) \cap \text{rad } I / Q(R) \cap G, Q(R^\vee) \cap \text{rad } I / Q(R) \cap G$ の basis を表わし、又、 $I_{R^\vee}$ は bilinear form I の決定数倍で定まる bilinear form で lattice $Q(R^\vee) = \sum_{\alpha \in R} \mathbb{Z} \alpha^\vee \subset F$ に制限して、even lattice になるようなもののうち最小倍のものとする。又 記号 $A:B$ とは $A = cB$ とする constant c の意味とする。

説明 2. 各ルート系 (R, G) に対応させた上記の、ティンキン図型 $\Gamma_{R, G}$ は、実際には、 R のある有限部分集合 B (生成系) に対し、次の様に diagram を対応させたもの。

i) $\Gamma_{R, G}$ の vertex の集合を B と同一視する。

$$\text{ii) } \alpha, \beta \in B \text{ に対し} \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \beta \\ \circ \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad I(\alpha, \beta) = 0$$

$$\circ \text{ --- } \circ \quad \Longleftrightarrow \quad I(\alpha, \beta^\vee) = I(\alpha^\vee, \beta) = -1$$

$$\circ \xrightarrow[t]{} \circ \quad \Longleftrightarrow \quad I(\alpha, \beta^\vee) = -t, I(\alpha^\vee, \beta) = -1$$

$$\circ \text{ --- } \circ \quad \Longleftrightarrow \quad I(\alpha, \beta^\vee) = I(\alpha^\vee, \beta^\vee) = 2.$$

ここで、basisの集合 B を (R, G) に対し、どの様にとるか、
exponent の概念を用いるもので、かなりややこしいので、こ
こでは立ち入らない。 B は 実ベクトル空間をばるが、一般に
 B の元は一次独立ではない。

古典的有ルット系や Kac-Moody algebra の理論では、 $\alpha \cdots 0$ なる
bond は出てこない。

上記、Dynkin 図型のみを用いて、マーク付の拡大アフィンルット系
 (R, G) を再構成できるか、ここでは立ち入らない。

§4. Coxeter 変換

マーク付の拡大、アフィンルット系 (R, G) に対し、その Coxeter
変換 c を定義し、その基本的性質を述べる。

W_R でめて 鏡映 w_α , $\alpha \in R$ で生成された、直交群
 $O(F, I) \subset GL(F)$ の部分群を表す事にする。

定義 $c \in W_R$ が (R, G) の Coxeter 変換であるとは、
が、 (R, G) の Dynkin 図型 $\Gamma_{R, G}$ を用いて

$$c = \prod_{\alpha \in \Gamma_{R, G}} w_\alpha$$

と表示できる事とする。ただし、右辺の積表示の意味は、

$\Gamma_{R, G}$ の頂点を何らかの列に並べて定義されたものとする。そ
の時、 $\alpha \cdots 0$ なる⁽²⁾頂点は常に隣りあうようにしておく。この

様に定義された c の W_R 中の conjugacy class は積の順の

取り方によらない。

(後の不変式の研究で)

以下に証明をした。述べる補題 A, B, C が基本的となる。

補題 A. i) C は有限位数となる。 (正確には $C^{l_{\max}+1} = 1$, $l_{\max} =$
 $\Gamma_{R,G}$ から $\alpha \rightarrow 0$ なる bonds の部分を除いた残りの最大連結成分の頂点数)

ii) C の固有値の集合 $= \{ \exp(2\pi\sqrt{-1} \frac{m_i}{m_{\max}}) : i=0, \dots, l \} \cup \{1\}$

但しここで $0 < m_1 \leq \dots \leq m_l = m_{\max}$ は exponents と呼ばれる整数。

補題 B. $R \cap \text{Image}(C-1) = \emptyset$

補題 C を述べる為に記号を用意する。

簡単な線形代数の考えつにより、 F を含む実バナル空間 $\tilde{F}$ で次の様なものが (同型を除いて) 唯一つある。

i) $F \subset \tilde{F}$, $\text{rank } \tilde{F} = \text{rank } F + 1 (= l+3)$.

ii) $\tilde{F}$ 上の symmetric bilinear form $\tilde{I} : \tilde{F} \times \tilde{F} \rightarrow \mathbb{R}$ で、次の性質を持つものがある。 1) $\tilde{I}|_F = I$, 2) $\text{rad } \tilde{I} = G (= \mathbb{R}a)$,

この時、 $\alpha \in \mathbb{R}$ を $\tilde{F}$ の元と見做して、定義した鏡映を $\tilde{w}_\alpha \in O(\tilde{F}, \tilde{I})$ と書く事にする。 $\tilde{w}_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ で生成される群を $\tilde{W}_R$ と書く。 Coxeter 変換の定義において w_α を $\tilde{w}_\alpha$ に置きかえたものを $\tilde{c} (\in \tilde{W}_R)$ と書き hyperbolic Coxeter 変換と呼ぶ。 $\tilde{W}_R$ の $\tilde{F}$ への作用を F に制限する事により自然な F への写像、

$$\tilde{W}_R \longrightarrow W_R$$

が得られ、特に $\tilde{c}$ は C に写される。この写像の kernel は

$\tilde{K}_G$ と書いて exact sequence を得る。

$$1 \rightarrow \tilde{K}_G \rightarrow \tilde{W}_R \rightarrow W_R \rightarrow 1$$

補題 C i) K_G は無限順同群 ($\approx \mathbb{Z}$) で $\tilde{c}^{l_{\max}+1}$ に $\mathbb{Z}$ 生成される。

$$\text{ii) } \tilde{c}^{l_{\max}+1}(u) = u - \tilde{I}_R(u, b) \frac{l_{\max}+1}{n_{\max}} a$$

(但し、ここで、 a, b は §3 に出てきた $\text{rad } I \cap Q(R) = \mathbb{Z}^2$ の basis である。)

§5 偏極ア-ベル多様体族

§3, §4 の data を基に、偏極ア-ベル多様体の 1 次元の族を構成する。その特別な場合は、Looijenga [5], Kac-Petersen [6] により研究されたものである。

まず $H := \{\tau \in \mathbb{C} : f_m(\tau) > 0\}$ と定義された複素 affine 空間の族を次の様に定める。

$$\tilde{E}^{l+2} := \{x \in \text{Hom}_R(\tilde{F}^{l+2}, \mathbb{C}) : a(x) = 1, f_m(b(x)) > 0\}$$

$\downarrow$

$$E^{l+1} := \{x \in \text{Hom}_R(F^{l+2}, \mathbb{C}) : a(x) = 1, f_m(b(x)) > 0\}$$

$\downarrow \tau$

$$H := \{x \in \text{Hom}_R(\text{rad } I, \mathbb{C}) : a(x) = 1, f_m(b(x)) > 0\}$$

但し、ここで、 $a, b \in \text{rad } I$ (既出 §) は、その dual space 上の $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{linear} \\ \text{functional} \end{smallmatrix} \right\}$ と理解し、 $\tau(x) := b(x)/a(x)$ とおく。かた付の数は、それぞれの空間の複素又は実次元を表わす。

定義より、 $\tilde{E}^{l+2}$ 上に群 $\tilde{W}_R$ が、 E^{l+1} 上に群 W_R が作用して。

$\mathbb{E}^{\ell+2} \rightarrow \mathbb{E}^{\ell+1} \rightarrow H$ と可換となる。この群作用が *proper discontinuous* である事は、次の様に分る。

自然の projection $R \rightarrow R/\text{rad } I$ に対応して、上の準同型写像 $W_R \rightarrow W_{R/\text{rad } I}$ が定まり、その kernel を T とおく。

$$1 \rightarrow T \rightarrow W_R \rightarrow W_{R/\text{rad } I} \rightarrow 1$$

更に、 T の $\tilde{W}_R$ への逆像 $\tilde{T}$ とおく事により、

$$1 \rightarrow \tilde{K}_G \rightarrow \tilde{T} \rightarrow T \rightarrow 1$$

ここで、最初の exact sequence は半直積に分解しかつ、 T は

$$(Q(R)/\text{rad } I) \otimes (Q(R) \cap \text{rad } I) \simeq \mathbb{Z}^{\ell} \oplus \mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}^{2\ell}$$

と iso-genus な abel 群で、 $\mathbb{E}^{\ell+1} \rightarrow H$ の fiber 毎に、 $\mathbb{Z}^{\ell} \oplus \mathbb{Z}^{\ell}$ の affine translation group として作用している。

二番目の exact sequence は T の cyclic extension を与え (補題 C),

$$\text{extension class} = \frac{l_{\max}+1}{m_{\max}} I/\text{rad } I \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Ext}^2(T, \mathbb{Z}) \simeq \bigwedge^2 \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{Z})$$

となる。

よって、 $X := \mathbb{E}^{\ell+1}/T \xrightarrow{\tau} H$ は $\tau \in H$ に対し、 $(\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})^{\ell}$ と iso-genus な abel 多様体に対応させる族であり、 $L^* := \tilde{\mathbb{E}}^{\ell+2}/\tilde{T}$ 族 X の各 abel 多様体に、negative な $\mathbb{C}^*$ -bundle をのせた total space となる。 L^* に (line bundle の) 零セクションを加えて、blow down したものを L と書く事にする。た line bundle を L と書き

最後に、有限群 $W_{R/\text{rad } I}$ が この $(\ell+1)$ 次元特異点の族。

$$\bar{L} \rightarrow X \rightarrow H$$

に作用している。

定理 $E_8^{(1,1)}, E_7^{(1,1)}, E_6^{(1,1)}, D_5^{(1,1)}, A_4^{(1,1)}$ 型の $\begin{matrix} (R) \\ \downarrow \end{matrix}$ ルート系に対し、商空間 $\bar{L}/W_{R/\text{rad } I}$ は自然に、 $\tilde{E}_8, \tilde{E}_7, \tilde{E}_6, \tilde{D}_5, \tilde{A}_4$ 型の単純構内特異点の *universal deformation* の底空間 S と同一視できる。

([5][15] 参照)

この定理が、元来、拡大 *affine root* 系研究の目標であるが、証明の爲には、特異点に対する周期写像、特に原始積分の理論 (cf [2]) を用いるので、ここでは、立ち入らない。

$\bar{L}/W_{R/\text{rad } I}$ を H 上の *affine algebraic variety* として、その構造環を決定する事は、 $\tilde{E}^{\ell+2}$ 上の函数で、 $\tilde{W}_R$ -不変な函数を求める事に外ならない。 $\tilde{T}$ -不変な函数環は

$$\Gamma(L, \mathcal{O}_L) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, L^{\otimes (-k)})$$

だから、 $\tilde{E}^{\ell+2}$ 上の $\tilde{W}_R$ -不変な函数環は

$$\Gamma(\tilde{E}^{\ell+2}, \mathcal{O}_{\tilde{E}^{\ell+2}})^{\tilde{W}_R} \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, L^{\otimes (-k)})^{W_{R/\text{rad } I}}$$

と書ける。又、 $\tilde{E}^{\ell+2}$ 上の $\tilde{W}_R$ -反不変な函数全体は

$$\Gamma(\tilde{E}^{\ell+2}, \mathcal{O}_{\tilde{E}^{\ell+2}})^{-\tilde{W}_R} \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, L^{\otimes (-k)})^{-W_{R/\text{rad } I}}$$

ここで上記表現の右辺達は、適当な、 Θ -函数達を用いて表現できるが、ここでは、立ち入らない。右辺の直和因子の

元を homogeneous of degree k の元と呼ぶ事にする。

ここで、不変式環に関する Chevalley 型の定理を述べる。
この形での state は Looijenga [6] によるが、証明は^(不備で)その後
いく多の人により修正を試みられている。

定理 (Chevalley type theorem)

1. $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, L^{\otimes(-k)})^{W_R/\text{rad } I}$ は $\Gamma(H, \mathcal{O}_H)$ 上 $\ell+1$ 変数多項式
環と同型で、その生成系 ^{$(v_0, \dots, v_\ell)$} として、homogeneous of degree
 $m_0, m_1, \dots, m_\ell$ とするものをとれる。

2. $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, L^{\otimes(-k)})^{-W_R/\text{rad } I}$ は $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, L^{\otimes(-k)})^{W_R/\text{rad } I}$ - 加群
として free で、その生成元 Θ_A として homogeneous of
degree $= \sum_{i=0}^{\ell} m_i$ なるものをとれる。

Θ_A の零面 ($\mathbb{E}^{\ell+2}$ 内での) は $\bigcup_{\alpha \in R} \alpha \in R$ の零面の union
に等しい。 Θ_A の事を基本反不変式と呼ぶ。 Θ_A は $\Gamma(H, \mathcal{O}_H)$
の unit factor を除いて唯一つ決る事に注意する。

§6. Flat structure on $\tilde{\mathbb{E}}^{\ell+2}/\tilde{W}_R$

最後の Chevalley 型の定理 1. は^(空間) $\tilde{\mathbb{E}}^{\ell+2}/\tilde{W}_R$ が H 上 $\ell+1$ 次元
の algebraic variety $\mathbb{C}^{\ell+1}$ と同型 (i.e. $\tilde{\mathbb{E}}^{\ell+2}/\tilde{W}_R \simeq \mathbb{C}^{\ell+1} \times H$)
を主張しているが、その $\ell+1$ 個の座標 $v_0, \dots, v_\ell$ は canonical
に決るとは言っていない。以下 (R, G) が特別の場合には、あ
る特別な座標が入る事を示そう。もっと正確には、空間 $\tilde{\mathbb{E}}^{\ell+2}/\tilde{W}_R$
の co-tangent bundle に canonical に^(内積) J が定まり、 J の係

数が constant になる様な $\tilde{E}^{\sim R_2}/\tilde{W}_R$ の "linear coordinates" が唯一つ定まる事 (i.e. $\nabla J = 0$ なる connection が integrable なる事) を示す。
この様な構造を $\tilde{E}^{\sim R_2}/\tilde{W}_R$ の flat 構造と呼ぶ。

一般のルート系でも、かなりの事が分るが、話しを分りやすくする為、次の定義を行う。

定義 marking 付、拡大 affine ルート系 (R, G) が対称型とは、
その Dynkin diagram $\Gamma_{R, G}$ の中に $\alpha = \beta$ なる結合が唯一つしかない事。

証明なしで次の事実を認める。

Prop. 以下の (R, G) に対する諸条件は互に同値である。

- i) (R, G) は対称型。
- ii) $\{0, m_0, m_1, \dots, m_\ell\}$ は対称。 (i.e. $m_i + m_{\ell-1-i} = m_\ell \quad i=0, \dots, \ell-1$)
- iii) $2 \sum_{i=0}^{\ell} m_i = (\ell+2) m_\ell$
- iv) 最大 exponent ($= m_\ell$) の重複度 = 1。

(実際には $A_1^{(1,1)*}, BC_2^{(2,4)}, E_6^{(1,1)}, E_7^{(1,1)}, E_8^{(1,1)}, F_4^{(1,1)}, F_4^{(1,2)}, F_4^{(2,1)}, G_2^{(1,1)}, G_2^{(4,3)}, G_2^{(3,1)}, G_2^{(3,3)}$)

以下 (R, G) は常に対称型と仮定する。

補題. 基本反変式 Θ_A の自乗を $\Gamma(\mathbb{H}, \mathcal{O}_{\mathbb{H}})[v_0, \dots, v_\ell]$ の元として、 v_ℓ の多項式に展開する。

$$\Theta_A^2 = A_0(\tau) v_\ell^{\ell+2} + A_1 v_\ell^{\ell+1} + \dots + A_{\ell+2}, \quad (A_i \in \Gamma(\mathbb{H}, \mathcal{O}_{\mathbb{H}})[v_0, \dots, v_\ell])$$

すると $A_0(\tau)$ は $\mathbb{H}$ 上値零をとらない。 (i.e. $A_0(\tau)$ は unit)。

証明 (補題 B, 補題 C による。詳細略。実は、この補題こそ、

が key 補題で、唯これを証明せんが為に、補題 A, B, C を準備をして来、ひいては、拡大 affine root 系の概念を導入したのである。)

metric J on co-tangent bundle of $\tilde{E}^{l+2}/\tilde{W}_R$ の定義.

(R, G) を対称型とすると, $S := \Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{O}_{\mathcal{H}})[v_0, \dots, v_l]$ の subring $T := \Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{O}_{\mathcal{H}})[v_0, \dots, v_{l-1}]$ は $\deg v_l (= m_l) \neq \deg v_{l-1} \geq \dots \geq \deg v_0$ だから、intrinsic に意味を持つ。以下係数環を S から T に reduction して、 J を以下の通り構成する。

S は graded ring なので $\text{Der}_S := \sum_{i=1}^l S \frac{\partial}{\partial v_i}$ は graded S -module であり、その中で degree の最少元は $\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{O}_{\mathcal{H}}) \frac{\partial}{\partial v_l}$ と書ける。

一方 $\Omega'_S := \sum_{i=1}^l S dv_i$ (但し $dv_l = dv$) に、次の様に S -bilinear form を入る。

$$\tilde{I}: \Omega'_S \times \Omega'_S \longrightarrow S, \quad \tilde{I}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i,j=1}^{l+2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \omega_1, \frac{\partial}{\partial x_j} \omega_2 \right\rangle \tilde{I}(x_i, x_j)$$

(但しここで $a, x_1, \dots, x_{l+2}$ は $\tilde{F}^{l+3}$ の basis, かつ $\tilde{I}$ は I の hyperbolic extension (cf §4)).

さて $\frac{\partial}{\partial v_l}$ は $\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{O}_{\mathcal{H}})$ の unit factor の積の ambiguity を有るか、次の normalization condition を設ける事により、定数倍を除いて、unique に決る。

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_l} \right)^2 I(dv_l, dv_l) = 0.$$

さてこの $\frac{\partial}{\partial v_l}$ を用いて、 Ω'_S の T -free submodule $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F} := \left\{ \omega \in \Omega'_S : L_{\frac{\partial}{\partial v_l}}(\omega) = 0 \right\} = \sum_{i=1}^l T dv_i$$

↑ Lie derivative

と定める。($T := \{\varphi \in S : \frac{\partial}{\partial \varphi} \varphi = 0\}$ と書ける事に注意.)

以上の用意の下に、 $\mathcal{F}$ 上の T -bilinear form を定める。

$$J: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow T, J(\omega_1, \omega_2) := \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{I}(\omega_1, \omega_2).$$

$\Omega'_S = S \otimes_T \mathcal{F}$ だから、 J は、 S の cotangent bundle Ω'_S に
 入れた内積と思ってよい。構成より、 J は constant factor を除
 いて unique に決る。

' $\tilde{E}/\tilde{W}_R$ が flat 構造を持つとは、次の定理が成立するの意であ

定理 1. J は $\tilde{E}/\tilde{W}_R$ 上いたる所 non-degenerate.

2. J に associate した Riemannian connection (i.e. $\tilde{E}/\tilde{W}_R$ の
 (co-) tangent bundle の connection ∇ であって $\nabla J = 0$ なるもの。(これは
 唯一つある。) は integrable である。(i.e. $\nabla^2 = 0$.)

系. 不変式環 $\bigoplus_{k=0}^n \Gamma(X, L^{\otimes k})^{W_R}$ の generator $\varphi_1 = \varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_\ell$
 であって、 $J(d\varphi_i, d\varphi_j) = \text{constant} \in \mathbb{C}$ for $i, j = 1, \dots, \ell$
 なるものか、(同次写りの間の線型変換の ambiguity を除いて)
唯一つ存在する。

(2.)
 この定理の証明には、discriminant Θ_A^2 によって logarithmic
 な vector field 及び forms の議論及び、connection の議論を用
 いて、多少ややこしいので、ここでは一切立ち入らない。

定理 1. はもはや、次の様に(易)容に見る事ができる。

まず、 J の定義により、

定理 1 $\Leftrightarrow \det \left(\left(\frac{\partial}{\partial v_\ell} \tilde{I}(dv_i, dv_j) \right)_{i,j=-1,\dots,\ell} \right)$ は unit.

一方、Chevalley 型定理 及び、本稿最初の補題により、

$$\begin{aligned} \det \left(\left(\tilde{I}(dv_i, dv_j) \right)_{i,j=-1,\dots,\ell} \right) &= \text{unit } \Theta_A^2 \\ &= \text{unit } v_\ell^{\ell+2} + \text{lower terms in } v_\ell. \end{aligned}$$

しかるに $\left(\frac{\partial}{\partial v_\ell} \right)$ exponents の対称性 及び、 $\frac{\partial}{\partial v_\ell}$ の normalization により、
行列の各成分 $\tilde{I}(dv_i, dv_j)$ は $(v_0, \dots, v_\ell)$ の多項式として v_ℓ を含みうるのは $i+j \geq \ell-1$ でありしかる。高々 v_ℓ について一次式
という事が分る。

従って $\left(\frac{\partial}{\partial v_\ell} \tilde{I}(dv_i, dv_j) \right)_{i,j=-1,\dots,\ell}$ は右下三角行列でありかつ、その斜対角成分の積 = unit Θ_A^2 の $v_\ell^{\ell+2}$ の係数
= unit.

これで、定理 1. の証明はできた。 //

この最後の系で述べた、不変式環の generators $v_1, v_0, \dots, v_\ell$ が、flat generator と呼ばれるもので、 R が有限ルート系の場合は [0] [1] に与えられている。

(S) 又、前節定理により、 $\tilde{E}/\tilde{W}_R$ を楕円特異点の変型の底空間と同一視した時、 $\tilde{J}$ は residue pairing $J := K^{(0)}$ と同一視され、flat generators $v_1, v_0, \dots, v_\ell$ は S の flat coordinates と同一

視され、函数 $\tau: \tilde{E}/\tilde{W}_R \rightarrow \mathbb{H}$ は S 上の flat function
 と同一視される。(詳細は [12] を参照)

文 献

- [1] Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie, Chapitres
 4, 5 et 6, Paris; Hermann 1969.
- [2] Brieskorn, E.: Singular element of semisimple algebraic
 groups, Actes Congrès Intern. Math. 1970, t. 2, 279-284.
- [3] Brieskorn, E.: Die Milnorgitter der exceptionellen uni-
 modularen Singularitäten, Bonner Mathem. Schriften ^(Nr. 150) 1983.
- [4] Kac, V., Peterson, D.: Infinite-dimensional Lie algebras,
 η -functions, and modular forms (pre-print 1982).
- [5] Looijenga, E.: On the semi-universal deformations of a simple
 elliptic singularity II, Topology 17, 23-40 (1978).
- [6] Looijenga, E.: Root systems and elliptic curves, Inventiones
 Math., 38, 17-32 (1976).
- [7] Looijenga, E.: Invariant theory for generalized root systems,
 Inventiones Math., 61, 1-32 (1980).
- [8] Mac Donald, I.G.: Affine root systems and Dedekind's
 η -function, Inventiones Math. 15, 91-143 (1972).

- [9] Saito, K.: Einfach-Elliptisch Singularitäten, *Inventiones math.*
23, 289-325 (1974).
- [10] Saito, K, Yano, T & Sekiguchi, J : On a certain generator
system of the ring of invariants of a finite reflexion
group, *Comm. in Alg.*
- [11] Saito, K: On a linear structure of a quotient variety
by a finite reflexion group, pre-print R.I.M.S.-288 (1979).
- [12] Saito, K.: Period mapping associated to a primitive form,
Publ. R.I.M.S., Vol. 19, 1231-1264 (1983)
- [13] Saito, K.: The Root System of $Sign(1,0,1)$, to appear
in *Publ. RIMS*.
- [14] Saito, K.: Extended Affine Root Systems I, pre-print
RIMS-480 (1984)
- [15] Saito, K.: Extended Affine Root Systems II, in preparation
- [16] Slodowy, P.: Simple Singularities and Simple algebraic Group,
Lecture Notes in Math. Springer (1980)
- [17] Slodowy, P.: A character approach to Hooijenga's invariant
theory for generalized root systems, pre-print 1982
- [18] Slodowy, P.: Another ^{new} class of Lie algebras, pre-print (1983)