

p 飽和 Welter ゲーム

千葉大学大学院 理学研究科 入江 佑樹

Yuki Irie

Graduate School of Science,
Chiba University

p 飽和 Welter ゲームの Sprague-Grundy 関数 sg は, 対称群の通常既約表現の次数と深く関係している. このゲームの局面は分割 λ で表せる. ρ^λ を λ に対応する $\text{Sym}(|\lambda|)$ の既約表現としよう. このとき, 全ての素数 p に対して次の二つを示した: (1) ρ^λ の次数が p と素である必要十分条件は $\text{sg}(\lambda) = |\lambda|$ である; (2) ρ^λ の $\text{Sym}(\text{sg}(\lambda))$ への制限は次数が p と素な既約成分を持つ. さらに, 全ての 2 以上の整数 p に対して $\text{sg}(\lambda)$ の明示公式を与えた.

1 Welter ゲーム

Welter ゲームは, 有限枚のコインを使った二人対戦ゲームである. 各コインは, 左から $0, 1, 2, \dots$ と番号をつけたマス目上に置かれている. ただし, 一つのマス目に置くことができるコインは高々 1 枚である. 二人のプレイヤーは交互に 1 枚のコインを空いている小さい数字のマス目 (左側のマス目) に移動する. 交互に移動していき, 先に動かせなくなった方が負けである. さて, コインが $x^1, x^2, \dots, x^m$ のマス目にある局面 X を考えよう. Welter [14] は X の Sprague-Grundy 数 (次節で定義する) の公式を与えている:

$$\text{sg}(X) = x^1 \oplus_2 \cdots \oplus_2 x^m \oplus_2 \left(\bigoplus_{i < j} N_2(x^i - x^j) \right). \quad (1.1)$$

ただし $\oplus_2$ は 2 進展開して繰り上がりのない足し算を表し $N_2(x) = x \oplus_2 (x - 1)$ である. 局面 X は m 点集合 $\{x^1, \dots, x^m\} \subset \mathbb{N}$ と $(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{N}^m$ のどちらでも表せることに注意しておく. ただし $\mathbb{N}$ は非負整数全体である.

Welter ゲームは, ヤング図形を使ったゲームと思うこともできる [10]. 分割 $\lambda(X)$

を $(x^{\sigma(1)} - m + 1, x^{\sigma(2)} - m + 2, \dots, x^{\sigma(m)})$ で定義する. ただし σ は $x^{\sigma(1)} > x^{\sigma(2)} > \dots > x^{\sigma(m)}$ となる置換である. 分割 $\lambda(X)$ と対応するヤング図形 $\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq x^{\sigma(i)} - m + i\}$ を同一視する. このとき, コインを動かすことは, フックを抜くことに対応する. 佐藤 [11, 12] は (1.1) に加えて, 別の形の公式を得ている. さらに, この別の形がフック長公式に似ていることから, Welter ゲームは対称群の表現と関係があることを予想している. 川中 [7] は $\text{sg}(X)$ を $\lambda(X)$ の 2-core tower を使って表している.^{*1}

本稿の目的は p 飽和という概念を導入し, p 飽和 Welter ゲームの Sprague-Grundy 関数と対称群の通常既約表現の次数の関係を与えることである. なお, 本稿の詳細は投稿準備中である [5].

2 p 飽和 Welter ゲーム

本稿では (不偏) ゲーム とは次を満たす有向グラフを表す:

(G) 各頂点 X について X を始点とするパスの長さの最大 $\text{lg}(X)$ が有限である.

ゲームの頂点を 局面 と呼ぶ. 二つの局面 X と Y に対して, X から Y への辺 (X, Y) があるとき Y を X の子 と呼ぶ. このとき条件 (G) より $\text{lg}(Y) < \text{lg}(X)$ に注意しよう.

ゲームは Sprague-Grundy 数で解析できる. 局面 X の **Sprague-Grundy 数** $\text{sg}(X)$ とは, 次を満たす非負整数 n の中で最小のものである:

- X の子 Y に対して $\text{sg}(Y) \neq n$.

ゲーム Γ の局面全体から $\mathbb{N}$ への写像 $X \mapsto \text{sg}(X)$ を Γ の **Sprague-Grundy 関数** と呼ぶ. 条件 (G) よりゲームには子を持たない局面 X がある. 定義から X の Sprague-Grundy 数は 0 と定まり, ここから lg が小さい順に Sprague-Grundy 数は定まっていく. 定義から $\text{sg}(X) \leq \text{lg}(X)$ である. 例えば Welter ゲームの局面 X の場合は $\text{sg}(X) \leq \text{lg}(X) = |\lambda(X)|$ である. さて Sprague-Grundy の定理 [4, 13] から任意のゲームの局面 X は, 1 枚のコインを使った Welter ゲームの局面 $\{\text{sg}(X)\}$ と本質的に同じと思える. 特に X が後手必勝形であることと $\text{sg}(X) = 0$ は同値である. そのため $\text{sg}(X)$ を求めることがゲームの解析では重要である. Welter ゲームや Nim については, 全ての

^{*1} さらに, Welter ゲームを一般化し, 良手判定アルゴリズムを含む様々な結果を得ている [7].

局面に対して Sprague-Grundy 数の明示公式が知られている。^{*2} しかし、これらの他にはそのような例は殆ど見つかっていない。なお、ゲーム理論については [1, 2] が詳しい。

以下 p を 2 以上の整数とする。 m 枚のコインを使った Welter ゲームを $\mathcal{W}^m$ で表す。

p 飽和を定義するために、まず p 指数 k の $\mathcal{W}^m$ を定義しよう。このゲームは、Moore の Nim_k (指数 k の Nim) [9] と Flanigan の Rim_k が元になっている。^{*3} 集合 $\mathcal{D}_{p,k}^m$ を次を満たす $(d^1, \dots, d^m) \in \mathbb{N}^m$ 全体としよう：

1. 0 でない成分があり、その個数は高々 $k-1$ 個、

$$2. \text{ord} \left(\sum_{i=1}^m d^i \right) = \min \left\{ \text{ord}(d^i) : 1 \leq i \leq m \right\},$$

ただし $\text{ord}(d)$ は d の p -adic order を表す。すなわち d を割り切る p 冪の内の最大冪指数である ($\text{ord}(0) = \infty$)。

このとき $\mathcal{W}_{p,k}^m$ を頂点集合 $\mathcal{V}$ が

$$\left\{ (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{N}^m : x^i \neq x^j \ (1 \leq i < j \leq m) \right\}$$

であり、辺集合が $\{(X, Y) \in \mathcal{V}^2 : X - Y \in \mathcal{D}_{p,k}^m\}$ であるゲームと定義する。このゲームを p 指数 k の $\mathcal{W}^m$ と呼ぶ。すなわち、通常の Welter ゲームでは 1 枚のコインしか動かさなかったが、 p 指数 k の Welter ゲームでは高々 $k-1$ 枚のコインを動かすことができる。例えば $\mathcal{W}_{2,3}^2$ において、局面 $(4, 3)$ から局面 $(1, 0)$ には移動できないが、局面 $(0, 1)$ には移動できる。集合で書くと、局面 $\{3, 4\}$ から局面 $\{0, 1\}$ に移動できる。

ゲーム $\mathcal{W}_{p,k}^m$ が $\mathcal{W}^m$ の p 飽和 とは $\mathcal{W}_{p,k}^m$ と $\mathcal{W}_{p,m+1}^m$ が同じ Sprague-Grundy 関数を持つことと定義する。^{*4} さらに $\mathcal{W}_{p,k}^m$ が $\mathcal{W}^m$ の p 飽和となるような最小の k を $\mathcal{W}^m$ の p 飽和指数と呼んで、記号 $\text{sat}_p(\mathcal{W}^m)$ で表す。整数 h が $\text{sat}_p(\mathcal{W}^m)$ 以上のとき $\mathcal{W}_{p,h}^m$ も $\mathcal{W}_{p,m+1}^m$ と同じ Sprague-Grundy 関数を持つことに注意しておく。

公式 (1.1) より $\text{sat}_2(\mathcal{W}^m) = 2$ がわかる。一般に $\text{sat}_p(\mathcal{W}^m) \geq \min(p, m+1)$ を示せる。しかし、 $3 \leq p \leq m$ の場合について $\text{sat}_p(\mathcal{W}^m)$ の正確な値はわかっていない。

^{*2} Nim は Welter ゲームから条件「1 マスに置くことができるコインは高々 1 枚」を外したゲームである。

^{*3} Nim_k と Rim_k では、プレイヤーは高々 $k-1$ 枚のコインを動かすことができる。 Rim_k は未発表論文 [3] で導入されている。

^{*4} p 飽和の定義は Nim の誘導部分グラフとなっているゲームに一般化できる。特に Nim の p 飽和は Rim_p と同じ Sprague-Grundy 関数を持ち、 m 枚のコインを使った Nim の p 飽和指数は $\min(p, m+1)$ である。さらに反転 Nim というゲームについて、2 飽和した Sprague-Grundy 関数と 2 飽和指数がわかっている [6]。

3 主結果

主結果を述べるため, 言葉の復習と記号の導入をしよう. X を Welter ゲームの局面, L を非負整数とする. 各 $(i, j) \in \lambda(X)$ に対してフック $H_{i,j}$ とは集合

$$\{(i', j') \in \lambda(X) : (i' \geq i \text{ かつ } j' = j) \text{ または } (i' = i \text{ かつ } j' \geq j)\}$$

のことである. フックは大きさが p^L の倍数であるとき p^L フック と呼ぶ. $\bar{\tau}_L(X)$ を $\lambda(X)$ の p^L フックの個数を p で割った余りとする. $\bar{\tau}(X)$ を次で定義する:

$$\bar{\tau}(X) = \sum_{L \in \mathbb{N}} \bar{\tau}_L(X) p^L. \quad (3.1)$$

$\oplus_p$ と $\ominus_p$ をそれぞれ p 進展開して繰り上がりのない足し算と引き算とする. たとえば $5 \oplus_3 10 = (2+3) \oplus_3 (1+9) = 3+9$ である. 整数 x に対して $N_p(x) = x \ominus_p (x-1)$ とする.

定理 3.1. X を p 飽和 Welter ゲームの局面 $\{x^1, \dots, x^m\}$ とする. このとき局面 Y で $|\lambda(Y)| = \bar{\tau}(Y) = \bar{\tau}(X)$ と (ヤング図形として) $\lambda(Y) \subseteq \lambda(X)$ を満たすものがある. さらに

$$\begin{aligned} \text{sg}(X) &= \bar{\tau}(X) \\ &= x_1 \oplus_p \cdots \oplus_p x_m \ominus_p \left(\bigoplus_{i < j} N_p(x_i - x_j) \right) \\ &= \bigoplus_{(i,j) \in \lambda(X)} N_p(|H_{i,j}|). \end{aligned}$$

p を素数としよう. X を p -飽和 Welter ゲームの局面として ρ^X を $\lambda(X)$ に対応する $\text{Sym}(|\lambda|)$ の既約表現とする. このとき, Macdonald の結果 [8] を使うと, 表現 ρ^X の次数が p と素であることと $|\lambda(X)| = \bar{\tau}(X)$ が同値であることがわかる. よって, 定理 3.1 より次を得る.

系 3.2. X を p 飽和 Welter ゲームの局面とする. p が素数ならば, 次が成立する:

1. ρ^X の次数が p と素であることと $\text{sg}(X) = |\lambda(X)|$ であることは同値である.
2. ρ^X の $\text{Sym}(\text{sg}(X))$ への制限は次数が p と素な既約成分を持つ.

ただし $\text{Sym}(0) = \text{Sym}(1)$ とする.

参考文献

- [1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. A.K. Peters, Natick, Mass., 2nd edition, 2001.
- [2] J. H. Conway. *On numbers and games*. A.K. Peters, Natick, Mass., 2nd edition, 2001.
- [3] J. Flanigan. Nim, Trim and Rim. Working Paper, Mathematics Department, University of California, Los Angeles, 1980.
- [4] P. M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2:6–8, 1939.
- [5] Y. Irie. p -Saturation of Welter's Game and the Irreducible Representations of Symmetric Groups. in preparation.
- [6] 入江佑樹. 反転ニムゲーム. 第32回代数的組合せ論シンポジウム報告集, pp. 14–17, June 22–24, 2015.
- [7] 川中宣明. フック構造をもつゲームとアルゴリズム. *数学*, 63(4):421–441, 2011.
- [8] I. G. Macdonald. On the Degrees of the Irreducible Representations of Symmetric Groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 3(2):189–192, Jan. 1971.
- [9] E. H. Moore. A Generalization of the Game Called Nim. *Annals of Mathematics*, 11(3):93–94, 1910.
- [10] 佐藤幹夫 (上野健爾 記). あるゲームについて. 第12回代数分科会シンポジウム報告集, pp. 123–136, 1968.
- [11] 佐藤幹夫 (榎本彦衛 記). Maya game について. *数学のあゆみ*, 15(1):73–84, 1970.
- [12] 佐藤幹夫 (榎本彦衛 記). マヤ・ゲームの数学的理論. 数理解析研究所講究録, 第98巻, pp. 105–135, 1970.
- [13] R. Sprague. Über mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, 41:438–444, 1935.
- [14] C. P. Welter. The Theory of a Class of Games on a Sequence of Squares, in Terms of the Advancing Operation in a Special Group. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 57:194–200, 1954.