

カオス軌道の capture について

神戸大・理 伊 東 敬 祐

標題の意味を、本来、一様又は混沌（エントロピー大）な系が、秩序化（エントロピー小）に向う現象と考える。保存系の場合と散逸系の場合とあるが、紙数の都合で、議論のあった散逸系について述べる。

散逸系では、相空間とパラメーター空間を合わせた空間での capture を考える。即ち、相空間での軌道のゆらぎが、パラメーターにフィードバックしている系を考える。例として、生態系を取り上げよう。

生態系のモデルとして、差分方程式の

$$X_{n+1} = F(X_n) = rX_n(1-X_n) \quad (\text{式1})$$

が良く調べられている¹⁾。これは r が増大すると、(1)絶滅、(2)単調減衰、(3)減衰振動、(4)周期振動、(5)カオス、という順序で挙動が変化する。生態系のモデルとしては、この他にも種々の差分方程式が提案されているが、一次増殖率 $F'(0)$ を変化させると、いずれも式1と同じ挙動の変化をする。所が、May²⁾ は生態系の資料を集めて、生態系ではカオスが極度に例外的であることを指摘した。特に、Thomas ら³⁾ の例は印象的である。これは式1ではなくて、 $F(X_n) = X_n \exp \{ r(1-X_n^0) \}$ を使っているが、あらゆる実験例が前記の(2)と(3)の領域の境に並んでいる。この境では、 $F(X)$ の特異点 ($F' = 0$) と $X_n = F(X_n)$ の固定点とが一致している。即ち、

$$h = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log |F'(X_j)| \quad \text{で定義されるエントロピーが} -\infty \text{である。制御工学的には、}$$

この状態（臨界減衰）より少し減衰の小さな状態が最適制御である。生物は種属保存のために、自己制御で最も安定なこのパラメーター（遺伝子）を選んだ（選択淘汰）と考えたくなる。

生態系は常に外界のゆらぎの中にいる。外的なゆらぎは式1を通して変換されて、次世代の個体数のゆらぎとなる。このゆらぎに比例して、系のパラメーターが変動すると仮定しよう。即ち、式1を書きかえて、

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= r_n X_n (1-X_n) \\ r_{n+1} &= r_n + S \cdot b_n \cdot g(h_n) \end{aligned} \quad (\text{式2})$$

S はフィードバックの強さで、 b_n は平均0分散 S の乱数。 $g(h_n)$ はゆらぎの増巾度で、 h_n は

パラメーターが r_n の時の系のエントロピーである。フィードバックがゆらぎに比例する効果を表わすために、 $g(h)$ は正で h の単調増大関数とする。 h_n は沢山のグループのアンサンブル平均を考える。

式 2 の r_n はブラウン運動もどきの変化をしながら、エントロピー極小の谷間に落ち込んでゆく。ゆらぎが大きいと、小さな谷間には一度落ちてでも又跳び出す。谷間の巾と跳び出すのに要するゆらぎの強さには相関がある。前述の臨界減衰のまわりの谷間は最も大きな谷間なので、前述の生態系はここに落ち込んだと思える。生態系で唯一のカオスの例である青バエの場合²⁾、カオスの中に散在する谷間の中では最大の周期 3 の窓の近くにあるのは興味深い。ゆらぎを制御に使う例は生物には良くある（原生動物の運動）。この他に、カオスの系がエントロピー最小を選んだ例として、地磁気のダイナモを考えている⁴⁾。

いろいろのパラメーター（遺伝子）の多数の群を集めた集団の進化を考えると、全体のエントロピーは単調減少の傾向がある（証明なし）。定義から、このエントロピーは時間 n と共にふえる情報損失を n で割ったものなのだから、エントロピー生成速度と考えるべきであろう。カオスの系の熱力学的形式化は、特殊な系の平衡状態についてしかなされていないが⁵⁾、非平衡状態に拡張することによって、逆に非平衡系の熱力学への寄与ができないものだろうか。

参考文献

- 1) R. M. May, Nature **261**, 459 (1976).
- 2) R. M. May, to be published.
- 3) W. R. Thomas, et al., Ecology **61**, 1312 (1980).
- 4) K. Ito, Earth Planet. Sci. Let. **51**, 451 (1980).
- 5) 高橋陽一郎, 日本物理学会誌 **35**, 149 (1980).