

表現環の構造について

東京教育大学大学院 岩田恵司

G を有限群とし R を Dedekind domain とする。以後 RG -加群については R -加群として 有限生成, torsion free のものだけを扱う。 RG -加群 M, N について, $M \otimes_R N$ は G の作用を $g(m \otimes n) = gm \otimes gn$, $g \in G, m \in M, n \in N$ とすることにより RG -加群になる, これを $M \otimes N$ と書く。 RG -加群の同型類を $[\]$ を付して表わす。いま RG -加群の同型類を生成元とし, 基本関係 $[M] = [M'] + [M''] \mid M \cong M' \oplus M''$ で定義される $\mathcal{P}$ -グループは 更に $[M][N] = [M \otimes N]$ と定義することにより環の構造をもつ, これを群 G の (R 上の) 表現環といい $a(RG)$ で表わす。 $\mathbb{C}$ -algebra $\mathbb{C} \otimes a(RG)$ を $A(RG)$ で表わす。表現環の構造については Lam, Green, Conlon, 等によりいくつかの結果が得られているが, それらの概略をここに紹介する。

§ 1

本節を通して, R は complete discrete valuation ring とし, P をその極大イデアル. $\bar{R} = R/P$, $p = \text{char } \bar{R}$, とする.
 G の部分群 H, K について, もし $x^{-1}Kx \subseteq H$ ($\exists x \in G$) ならば, このとき $K \leq H$ と表わす. RH -加群 L に対して RG -加群 $RG \otimes_{RH} L$ を L^G で表わすことにする.

定義 G の部分群 D について, $M \in L^G$, $L: RD\text{-module}$, なる様な $[M]$ で生成される $A(RG)$ の加法的部分群は, 更に $A(RG)$ のイデアルになる, これを $A_D(RG)$ で表わし,
 環 $A_D(RG) / \sum_{H < D} A_H(RG)$ を $W_D(RG)$ で表わす. 又これらを複素数で係数拡大したものをそれぞれ $A_D(RG)$, $W_D(RG)$ とする.

定理 [1] (Green [2])

$$W_D(RG) \cong W_D(RN(D)) : \text{ring isomorphic}$$

(ここで $N(D)$ は D の G における正規化群)

証明は省略するが, この同型対応は $t([M]) = [M^G]$ で定義される transfer map, $t: A(RN(D)) \rightarrow A(RG)$ から自然に誘導された対応で与えられる.

注意. D が p -部分群でない場合は $W_D(RG) = 0$

補題 [2]

$F([M]) = [\bar{R}G \otimes_R M]$ により, τ 定義される自然同型
 $F: A(RG) \rightarrow A(\bar{R}G)$ を考える。 $\{[X] - [X'] - [X''] \mid \exists 0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$
 $\bar{R}G$ -exact sequence $\}$ τ 生成される $A(\bar{R}G)$ のイデアル $\in$
 $A'(\bar{R}G)$ とし, $A'(RG) = F^{-1}(A'(\bar{R}G))$ とするとき

$$A(RG) = A_{(0)}(RG) \oplus A''(RG)$$

とイデアル分解される。

証明 作りより $A_{(0)}(\bar{R}G) \cdot A''(\bar{R}G) = 0$ 又 $A(RG)/A''(RG)$
 $\simeq G_0(\bar{R}G) \simeq A_{(0)}(\bar{R}G) \simeq A_{(0)}(RG)$ 。 したがって $A_{(0)}(RG) \cdot A''(RG) = 0$
。準同型 $F^*: A(RG) \xrightarrow{F} A(\bar{R}G) \xrightarrow{\tau} G_0(\bar{R}G)$ は $A_{(0)}(RG)$ の上での
同型であることに注意すれば, $\exists J_G \in A_{(0)}(RG)$ かつ $F^*(J_G) = F^*(1_G)$
, ことに 1_G は $A(RG)$ の単位元, について $1_G = J_G + (1_G - J_G)$
と直交冪等元への分解が得られる。 (Q.E.D.)

$H \triangleleft G$ とする。準同型 $G \rightarrow G/H$ は自然に環準同型 τ :
 $A(RG/H) \rightarrow A(RG)$ を引き起こす。 $\tau(A_{(0)}(RG/H)) \subset A_H(RG)$
である。そこで $\tau(J_{G/H})$, ($J_{G/H}$ は $A_{(0)}(RG/H)$ の idempotent
generator), を互いに同じ記号 $J_{G/H}$ で表わすことにする。

補題 [3]

$J_{G/H}$ は $A_H(RG)$ の idempotent generator である。

証明 $\bar{R}$ は代数的に閉じている, と仮定してよい。

証明には入る方に少し準備をしておく。 $\bar{R}$ が代数的に閉じているから、 G の representation group $\hat{G}$ が存在して、 G の上のすべての twisted group algebra は $\bar{R}\hat{G}$ の両側イデアルとして実現される。そこで、この分解を

$$\bar{R}\hat{G} = B_0 \oplus \cdots \oplus B_n, \quad B_0 = \bar{R}G$$

とすると、これにより、 $\mathbb{C}$ -space への分解

$$A(\bar{R}\hat{G}) = A(B_0) \oplus \cdots \oplus A(B_n)$$

$$A_{(1)}(\bar{R}\hat{G}) = A_{(1)}(B_0) \oplus \cdots \oplus A_{(1)}(B_n)$$

$$A^{(1)}(\bar{R}\hat{G}) = A^{(1)}(B_0) \oplus \cdots \oplus A^{(1)}(B_n)$$

$$G_0(\bar{R}\hat{G}) = G_0(B_0) \oplus \cdots \oplus G_0(B_n)$$

が引き起こされる。又、 $\bar{R}\hat{G}$ の Cartan matrix は non-singular であることより $\varphi_i: A_{(1)}(B_i) \xrightarrow{\sim} G_0(B_i): \mathbb{C}$ -isomorphic となる。 B_0, B_i -加群 M, N は自然に $\bar{R}\hat{G}$ -加群とみられるが、 $\bar{R}\hat{G}$ -加群として $M \otimes N$ を考えたと $M \otimes N$ は B_i -加群である。これによつて $A(B_0), A_{(1)}(B_0), G_0(B_0)$ は各々、

$A(\bar{R}\hat{G}), A_{(1)}(\bar{R}\hat{G}), G_0(\bar{R}\hat{G})$ の $\mathbb{C}$ -sub-algebra になることが分る。かつ $A_{(1)}(\bar{R}\hat{G}), A_{(1)}(\bar{R}\hat{G})$ の idempotent generator を

$$\text{それぞれ } J_G, J_{\hat{G}} \text{ とすると } J_{\hat{G}} = J_G \in A_{(1)}(B_0),$$

なることが分る。これより $\sum J_G = 1, \forall x \in A_{(1)}(B_i),$ である。

absolutely indecomposable RH-加群 L をとり

L の G における *stabiliser* εS , $\{[M] \in A(RG) \mid M \mid L^G\}$ で生成された $A_H(RG)$ の $\mathbb{C}$ -subspace を $A(L^G)$ とすると, 計算は省略するが, S_H の $\bar{R}$ 上の *twisted group algebra* B_L と $\mathbb{C}$ -linear homomorphism $F_L: A_H(RG) = \bigoplus_L A(L^G) \rightarrow A_{\omega}(B_L)$ が構成され, 次の条件を満足する。

$$F_L: A(L^G) \xrightarrow{\sim} A_{\omega}(B_L) : \mathbb{C}\text{-isomorphic.}$$

$$F_L(xy) = F_L(x) F_{J_H}(y), \quad \forall x \in A_H(RG), \quad \forall y \in A_{\omega}(R \setminus H)$$

従って $\forall x \in A(L^G)$ について

$$\begin{aligned} F_L(x J_{G/H}) &= F_L(x) F_{J_H}(J_{G/H}) \\ &= F_L(x) J_{S_H} \\ &= F_L(x) \end{aligned}$$

$$\text{故に } x J_{G/H} = x \quad (\text{Q.E.D.})$$

以上の結果にもとづいて次の定理が得られる。

定理 [4] (Conlon [3])

G の部分群 D について

$$A_D(RG) \triangleleft A(RG)$$

$$A_D(RG) = A'_D(RG) \oplus A''_D(RG), \quad A''_D(RG) \cong W_D(RG)$$

$$\therefore A'_D(RG) = \sum_{D' < D} A_{D'}(RG)$$

証明 $|D|=1$ のときは証明されている。 $|D|$ に関する帰納法で証明する。帰納法の仮定により $A'_D(RG) \triangleleft A(RG)$ 従って補題 [3] により $D \nmid G$ の場合について証明すればよい。

$N(D) \subseteq G$ より $A_D(R \cdot N(D))$ について同定理は成立。従って、

$$\begin{aligned} A_D(RG) / A'_D(RG) &= W_D(RG) \\ &= W_D(R \cdot N(D)) \\ &\cong A'_D(R \cdot N(D)) \oplus A(R \cdot N(D)) \end{aligned}$$

より $A_D(RG) / A'_D(RG)$ は identity element を持つ。

(Q.E.D.)

§ 2

R は § 1 と同じく complete discrete valuation ring とする。ここでは $a(RG)$ の nilpotent element について調べる。
 $D \triangleleft G$ とし、 $H \in D$ を含む G の部分群とする。

inclusion map $i_H: H \hookrightarrow G$ は

$$\text{ring hom.} \quad i_H^*: G_0(R^{\%}) \longrightarrow G_0(R^{H\%})$$

$$I_H^*: a_D(RG) \longrightarrow a_D(RH)$$

$$\text{add. hom.} \quad i_{*H}: G_0(R^{H\%}) \longrightarrow G_0(R^{\%})$$

$$I_{*H}: a_D(RH) \longrightarrow a_D(RG)$$

を誘導する。 $a_D(RH)$ は $[M] \cdot [S] = [M_H \otimes S]$,

$M: R^{H\%}$ -加群, $S: D$ -projective RH -加群, $M_H: M \in$

$H \rightarrow H\%$ を通して RH -加群としたもの, とする: と

によつて $a(R^{H\%})$ -加群となるが, 更に $G_0(R^{\%})$ -加群でもあることが分る。

補題 [5]

$\Delta = \{ \text{subgroup } H \text{ of } G \mid H \supset D, H \text{ is cyclic} \}$ とする。
とき。もし $\Delta \ni H$ に対して $a_D(RH)$ が 0 以外の nilpotent element をもたないならば、 $a_D(RG)$ も持たない。

証明 $X^n = 0$, $X \in a_D(RG)$ とすると、 $\forall H \in \Delta$ に対して
 $0 = I_H^*(X^n) = I_H^*(X)^n \in a_D(RH)$ 。従って
 $X \in \bigcap_{H \in \Delta} \ker I_H^*$ 。そして、

$$[G:D]^2 G_0(RG/D) \subset \sum_{H \in \Delta} \text{image } i_{*H}$$

であることに注意すれば

$$\begin{aligned} [G:D]^2 X &= [G:D]^2 \cdot 1_{G/D} \cdot X, \quad 1_{G/D}: G_0(RG/D) \text{ の単位元} \\ &= \sum_{H_j \in \Delta} a_j i_{*H_j}(y_j) X \\ &\quad \begin{aligned} &\exists H_j \in \Delta, \exists y_j \in G_0(RH_j/D) \\ &\exists a_j: \text{integer} \end{aligned} \\ &= \sum a_j i_{*H_j}(y_j I_{H_j}^*(X)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

従って $X = 0$ 。

(Q.E.D.)

定理 [6] (Lam [5])

次の条件を満足する G の部分群 H の存在を成る集合を
とすると、 $H^{(p)} \triangleleft H$, $H/H^{(p)}$: cyclic

ここに $H^{(p)}$: p -Sylow subgroup of H

もし $\forall H$ に対して $a(RH)$ が 0 以外の nilpotent element をもたないならば, $a(RG)$ は non-zero nil. el. を持たない。

証明 $|G|=1$ のときは明らか。 $|G|$ に沿う帰納法で証明する。 $D \in G$ の任意の p -部分群とする。もし $D \neq G$ ならば帰納法の仮定により $a(R \cdot N(D))$ は non-zero nil. ele. を持たない, 従って $\omega_D(RG) (\cong \omega_D(R \cdot N(D)))$ も non-zero nil. ele. をもたない。 $D \trianglelefteq G$ の場合は $\forall H \in \Delta$ とすると $D < H^{(p)} < H$, H は cyclic, 従って $H \in \mathfrak{A}$ となり $a(RH)$ は non-zero nil. el. をもたない。従って補題により, $a_D(RG)$ 故に $\omega_D(RG)$ も non-zero nil. el. を持たない。従って定理 [4] により示された。 (Q.E.D.)

§ 3

本節では Burnside algebra の分解から誘導された, 表現環のイデアル分解を紹介する。

定義. RG -加群の category を $\mathcal{M}(RG)$ とし

$\mathcal{L} = \bigcup_{D \leq G} \mathcal{M}(RD)$ とする。 M が RD -加群であることを $T_M = D$ と書くことにする。 $\mathcal{L}$ 上の M, M' について $M \cong {}^x M'$ $\exists x \in G$ のとき $M \sim M'$ と書き, 関係 $\sim$ による M の class を $\langle M \rangle$ で表わす。 $\langle M \rangle; M \in \mathcal{L}$ で生成された free abelian group は, 生成元の間の積を

$$\langle M \rangle \langle N \rangle = \sum_x \langle M_{T_H \cap T_N} \otimes {}^x N_{T_H \cap T_N} \rangle$$

x は G の (T_H, T_N) -両側剰余類の代表系を動く

と定義する: ことにより環になる, これを Burnside ring と

いい $b(RG)$ で表わす。 $B(RG) = \mathbb{C} \otimes b(RG)$ とする。

G の部分群 H について $\{ \langle M \rangle \mid T_H \leq H \}$, $\{ \langle M \rangle \mid T_H \not\leq H \}$

で生成される $b(RG)$ の additive subgroup をそれぞれ

$b_H(RG)$, $b'_H(RG)$ とすると, これらは $b(RG)$ のイデアル

である: ことが分る。 $B_H(RG) = \mathbb{C} \otimes b_H(RG)$, $B'_H(RG) = \mathbb{C} \otimes b'_H(RG)$

とする。

定理 [7] (Conlon [4])

$$b_D(RG)/b'_D(RG) \xrightarrow{\sim} b_D(R \cdot N(D))/b'_D(R \cdot N(D))$$

: ring isomorphism

証明 $b_D(RG) \rightarrow b_D(R \cdot N(D))$ から誘導された additive hom. $\gamma^*: b_D(RG)/b'_D(RG) \rightarrow b_D(R \cdot N(D))/b'_D(R \cdot N(D))$ について,

γ^* は base を base に対応させているから additive isom.

(かも $M, M' \in ML(R \cdot D)$ について

$$\langle M \rangle \langle M' \rangle = \sum_{D \times D \subset G} \langle M' \otimes {}^x M \rangle$$

$$\equiv \sum_{D \times D \subset N(D)} \langle M' \otimes {}^x M \rangle \pmod{b'_D(RG)}$$

従って γ^* : ring isomorphism

(Q.E.D.)

$M \in \mathbb{L}$ とするとき, $T_M = S$, $V_S = [N(S), S]$ とおくと,

$$\begin{aligned} \langle I_S \rangle \langle M \rangle &= \sum_{S \cap S' \subset G} \langle I_S \otimes^x M \rangle \\ &\equiv \sum_{S \cap S' \subset N(S)} \langle I_S \otimes M \rangle \pmod{l'_p(RG)} \\ &\equiv V_S \langle M \rangle \pmod{l'_p(RG)} \end{aligned}$$

これに注意して $|D|$ に沿う帰納法によりこの定理が証明される。

定理 [8] (Conlon [4])

$B_D(RG)$ は $B(RG)$ のイデアル因子である。

特に Burnside alg. は
 $B_D(RG) = B'_D(RG) \oplus B''_D(RG)$, $B''_D(RG) \cong B_D(RG) / B'_D(RG)$
 $B(RG) = \bigoplus_{D \leq G} B'_D(RG)$, $B'_D(RG) \cong B_D(RG) / B'_D(RG)$
 とイデアル分解される。

(証明略)

いふ自然に algebra epimorphism $\psi: B(RG) \rightarrow A(RG)$
 $\langle M \rangle \mapsto [M^G]$
 が構成されるが、 ψ は

$A_D^*(RG) = \psi(B_D(RG))$, $A_D^*(RG) = \psi(B'_D(RG))$ とおく。

このとき次が成立する。

定理 [9] (Conlon [4])

$$A_D^*(RG) = A_D^{*'}(RG) \oplus A_D^{*''}(RG)$$

$$A_D^{*'}(RG) \oplus A_D^{*''}(RG) \cong A_D^*(RG) / A_D^{*'}(RG) \cong A_D^*(R \cdot N(D)) / A_D^{*'}(R \cdot N(D))$$

特に $A(RG) = \bigoplus_{D \leq G} A_D^{*''}(RG)$

証明

$\langle M \rangle = \langle M' \rangle = \langle M'' \rangle$; $T_M = T_{M'} = T_{M''}$, $M \cong M' \oplus M''$, $\langle N \rangle = \langle N^p \rangle$

で生成された $e(RG)$ の additive subgroup は ideal に

なる, $\therefore$ $e \in j(RG)$ で表ゆすと. $\text{Ker } \psi = \mathbb{C} \otimes j(RG)$ で

あることが分る. $\mathbb{C} \otimes j(RG) \cap B_D(RG)$ の生成元を $\text{mod } B'_D(RG)$

で考えると $\langle M \rangle = \langle M' \rangle = \langle M'' \rangle$, $\langle N^p \rangle$, $\therefore$ $\therefore$ $\therefore$

$T_M = T_{M'} = T_{M''} = D$, $M \cong M' \oplus M''$, $T_N \leq D$, $\therefore$ ある. 全

く同じ元が $\text{mod } B'_D(R \cdot N(D))$ での $\mathbb{C} \otimes j(R \cdot N(D)) \cap B_D(R \cdot N(D))$

の生成元である. 従, $\therefore$ 定理 [7] [8] により示され. $\square$

(Q.E.D.)

文 献

- [1] C. W. Curtis and I. Reiner ; Representation theory of finite groups and associative algebras (Interscience 1962)
- [2] J. A. Green ; A transfer theorem for modular representations (J. of Alg. 1 (1964))
- [3] S. B. Conlon ; Relative components of Representations (J. Alg. 8 (1968))
- [4] S. B. Conlon ; Decompositions induced from the Burnside algebra (J. Alg. 10 (1968))
- [5] T. Y. Lam ; A theorem on Green's modular representation (J. Alg. (1970))