

On the Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups

車太. 理 加藤 信一 (Shin-ichi Kato)

Kazhdan-Lusztig 多項式 (以下, $K-L$ 多項式と略す) が, 代数群の表現論に色々ち形で関わっていることはよく知られている。ここではアフィン Weyl 群の $K-L$ 多項式のある公式を与え, その表現論への応用として Lusztig 予想との関連を述べる。

1° Kazhdan-Lusztig 多項式

ここでは $K-L$ 多項式の定義を復習する。

まず (W, S) を Coxeter 系としよう。つまり W は生成系 S と関係式

$$\begin{cases} s^2 = e & (\forall s \in S) \\ (st)^{m_{st}} = e & (s \neq t \in S, m_{st} \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

で与えられる群である。例えば対称群 (より一般に Weyl 群, 又後述のアフィン Weyl 群) がその例である。この時,

$\ell: W \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 長関数 (length fn.)

及び W 上の半順序 $\geq$ (Bruhat 順序) が標準的に定まる。

すなわち、 q を不定元、 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ を一変数 Laurent 多項式環とする。 (W, S) の Hecke 環 $\mathcal{H}(W)$ とは、 $\{T_w\}$ ($w \in W$) なる自由基底を持つ、i.e.

$$\mathcal{H}(W) \simeq \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \cdot T_w$$

($\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -加群として)

で、乗法が

$$\begin{cases} (T_s - q)(T_s + 1) = 0 & (\forall s \in S) \\ T_w \cdot T_{w'} = T_{ww'} & \text{if } \ell(w) + \ell(w') = \ell(ww') \end{cases}$$

で与えられるような $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 上の多元環である。 $q=1$ と特殊化すると $\mathcal{H}(W) \simeq \mathbb{Z}[W]$ (W の群環) となることに注意しよう。(以上、[B] 参照.)

定理 (Kazhdan-Lusztig [K-L]) 任意の $w \in W$ に対して、次の2条件を満たす $C_w \in \mathcal{H}(W)$ が一意に存在する:

- ① $\overline{C_w} = q^{-\ell(w)} C_w$; (但し $\overline{}$ は $\overline{q} = q^{-1}$, $\overline{T_w} = (T_{w^{-1}})^{-1}$ で定まる $\mathcal{H}(W)$ の位相的環自己同型.)
- ② $C_w = \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q) T_y$ と表示される。

そこで $P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ を

$$\begin{cases} \deg P_{y,w}(q) \leq \frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(y) - 1) & \text{if } y \neq w \\ P_{w,w}(q) = 1 \end{cases}$$

なるもの。

定義. 1 上の定理における C_w の係数 $P_{y,w}(q)$ を $K-L$ 多項式 とよぶ。(これを計算する algorithm がある [K-L])

2° Lusztig 予想

次に、上で定義した $K-L$ 多項式 ($W = \Gamma \supset \Gamma = \text{Weyl}$ 群の場合) が正標数 p の代数的体 K 上の半単純代数群の既約有理表現の指標公式を記述する, という Lusztig の予想 ([L.1]) を説明する。(このような群の有理表現論については [川澄], [横決] で解説を与えてあるので, 詳しくはそちらを参照して頂ければ幸いであります。)

以下,

$K =$ 標数 $p > 0$ の代数的体

$=$ 連結, 単連結, 擬単純代数群 / K

$B =$ G の Borel 部分群

$T =$ 極大トーラス $\subset B$

$W = N_G(T)/T$: Weyl 群

$P = \text{Hom}_{\text{alg}}(T, k^*)$: ウェイト格子 (T の指標群)

$R = (G, T)$ の ルート系 $\subset P$

$R^+ = B$ に対応する正ルート系 $\subset R$

$P^{++} =$ 支配的ウェイトのなす半群 $\subset P$

とおく。 G の既約有理表現 (の同値類) 全体は P^{++} に
パラメトライズされる: (任意の $\lambda \in P^{++}$ に対して λ を
最高のウェイトに持つ既約表現 $L(\lambda)$ が同型を除いて唯一
存在する。 即ち

$$L(\lambda) \rightarrow \exists v_\lambda, \text{ s.t. } b \cdot v_\lambda = \lambda(b) v_\lambda \quad (\forall b \in B)$$

(但し $B \rightarrow T \rightarrow k^*$ により $\lambda \in P^{++}$ を B の指標と見た。
) $L(\lambda)$ は例えば次の様に “実現” される。 B^- を
 $B \cap B^- = T$ とする G の Borel 部分群 (B の opposite),
 $\lambda \in P^{++}$ を上と同様に B^- の指標と見て,

$$M(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ind}_{B^-}^G(\lambda) \quad (\text{有理表現の圏での} \\ \text{誘導表現})$$

とある。 別の言い方をすれば,

$$M(\lambda) = \Gamma(G/B^-, \mathcal{L}(\lambda)),$$

ここで $\mathcal{L}(\lambda)$ は λ を定める G/B^- 上の直線束の切断の
層である。 $M(\lambda)$ は G の有限次元有理表現たちだが,
 $\text{Soc } M(\lambda) = L(\lambda)$, つまり $M(\lambda)$ は唯一の既約部分加
群を持ち、それが $L(\lambda)$ に等しいことが知られているのである。

さて、表現の最も大切な不変量は、その指標である：

有限次元有理表現 M を極大トーラス T に制限して

$$M|_T \simeq \bigoplus_{\lambda \in P} M^\lambda$$

$$M^\lambda = \{v \in M \mid t \cdot v = \lambda(t)v \quad (\forall t \in T)\}$$

と分解される時、 M の 指標、 $\text{ch } M$ を

$$\text{ch } M = \sum_{\lambda \in P} \dim M^\lambda \cdot e^\lambda \in \mathbb{Z}[P] \quad (P \text{ の 群環})$$

で定義する。(但し e^λ は $\mathbb{Z}[P]$ の $\lambda \in P$ に対応する標準的な基底、 $e^\lambda \cdot e^\mu = e^{\lambda+\mu}$.) 例えば $\lambda \in P^{++}$ に対し、

$$(1) \quad \text{ch } M(\lambda) = \sum_{x \in W} (-1)^{l(x)} e^{x(\lambda+\rho)-\rho} / \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha}) \quad (\text{Weyl の 指標公式})$$

である。ここで $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha \in P^{++}$ 。

問題. $\text{ch } L(\lambda)$ を記述せよ。

Lusztig 予想 (以下、 L 予想) は以下に述べるようにこの問題に対する解答を与える。

Weyl 群 W はウエイト格子 P 、及びルート格子 Q (R で生成される P の部分加群) に自然に作用するので、

半直積, $\tilde{W} = W \ltimes P \supset W_a = W \ltimes Q$ を構成
 することができ。 W_a は通常 $R^\vee$ (R のコルート系) $\subset$
 $Q^\vee = \text{Hom}(P, \mathbb{Z})$ に対応するアフィン Weyl 群とよばれる
 もので, Coxeter 群であることが知られている。 (但し
 わけわけは W_a の生成系, S_a としこのような鏡映の
 集合をとる:

$S_a = \{w_\alpha \mid \alpha: \text{単正コルート}\} \cup \{w_{\alpha_0}, t_{\alpha_0}\}.$
 ここで α_0 は対応するコルート $\alpha_0^\vee$ が $R^\vee$ の最大コルートと
 なるようなコルート, w_α は $\alpha \in R$ に対応する鏡映, また
 $\tilde{W} \supset P$ の元を P 自身と区別するため, $\lambda \in P$ に対して
 t_λ と書いた。 一方 $\tilde{W}$ はこの理由で "殆ど" Coxeter 群
 である。 $\Omega = N_{\tilde{W}}(S_a)$ とおくと $\tilde{W} = \Omega \ltimes W_a$
 (半直積)。 ここで W_a 上の長さ関数 l , Bruhat 順序 $\leq$
 を $\tilde{W}$ 上に

$$l(\gamma \cdot w) \stackrel{\text{def}}{=} l(w) \quad (\gamma \in \Omega, w \in W_a)$$

$$\gamma \cdot \eta \leq \gamma' \cdot w \stackrel{\text{def}}{\iff} \gamma = \gamma', \quad \eta \leq w$$

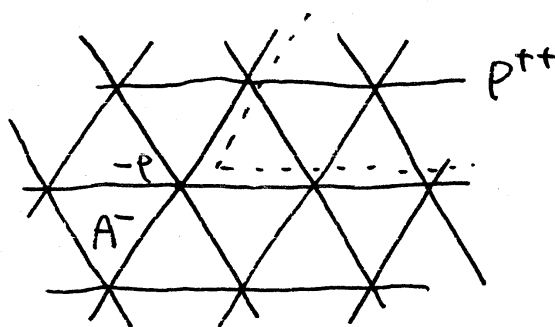
$$(\gamma, \gamma' \in \Omega, \eta, w \in W_a)$$

で拡張するとこたうは well-defined となり, Hecke 環
 $\mathcal{H}(\tilde{W})$, K -L 多項式等も W_a と同様に定義される。 (実
 は, 直ちに $P_{\gamma \eta, \gamma w}(\varphi) = P_{\eta, w}(\varphi)$ ($\gamma \in \Omega, \eta, w \in$
 W_a) がわかり, 結局アフィン Weyl 群の K -L 多項式が

わかればよいことになる。)

$\tilde{W}$ 及び W_a は $P \otimes \mathbb{R}$ にアフィン変換として次の様に作用する (dot action): $w = t_\lambda \chi$ ($\lambda \in P, \chi \in W$) とすると, $v \mapsto w \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} \chi(v + \rho) - \rho + \rho\lambda$ ($v \in P \otimes \mathbb{R}, \rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha, P = \text{char. } K$). また, $P \otimes \mathbb{R} \setminus \bigcup H$ (H は W_a の全ての鏡映・鏡映面 - dot action に属する - をわたる) の任意の連結成分 (alcove) は W_a の作用に属する基本領域となる。勿論 alcoves の集合は $\tilde{W}$ で保たれる。特に

$A^- = S_a$ に対応する
鏡映面に囲まれた
alcove



とおく (右図参照)。

定義 2 $w \in \tilde{W}$ が 支配的 (dominant)

$$\Leftrightarrow w(A^-) \cap P^{++} \neq \emptyset$$

これは, p (標数) $\geq h$ (ルート系 R の Coxeter 数)

$$(\Leftrightarrow A^- \cap P \neq \emptyset \text{ がすぐにわかる})$$

ならば, $w \cdot \lambda \in P^{++}$ ($\lambda \in A^- \cap P$) と同値である (標数 p のとり方による)。

134. 1 w_0 を W の最大元, $\mu \in P^{++}$ とすると
 $w_\mu := \tau_\mu w_0$ は支配的。実際 $p \geq h$ ならば,
 $-2\rho \in A^-$ である。

$w_\mu \cdot (-2\rho) = w_0(-\rho) - \rho + \rho\mu = \rho\mu \in P^{++}$
 である。

2. $p \geq h$ を仮定して, $\lambda \in A^- \cap P$ を固定しよう。
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $P \times Q^\vee$ 上の自然な pairing とする。

予想 (Lusztig [L.1]) 支配的元, $w \in \tilde{W}$ が
 Jantzen 条件

$$(2) \quad \langle w \cdot \lambda + \rho, \alpha_0^\vee \rangle \leq p(p-h+2)$$

を満足するならば,

$$(3) \quad \text{ch } L(w, \lambda) = \sum_{\substack{y \in \tilde{W}, \text{ 支配的} \\ y \leq w}} (-1)^{l(w) - l(y)} P_{y, w}(1) \text{ch } M(y, \lambda)$$

(3) の右辺は全計算可能であることを注意 ($k-L$ 多項式の
 $q=1$ の値, Weyl の指標公式 (1))。

この予想 (以下 L 予想) が正しいければ,

(a) translation principle (Jantzen [J])

(b) テニリル積定理 (Steinberg [S])

によって $\text{ch } L(\lambda)$ が 全ての $\lambda \in P^{++}$ について計算できる ($P \geq 0$ の場合に) ことになる: 実際.

(i) 公式 (3) は, alcove の内部である $\lambda \in P^{++}$ についての $\text{ch } L(\lambda)$ の公式を与えているが, (a) によれば, "translation" することによって, alcove の境界上のウェイトについても指標公式が得られる。

(ii) L については Jantzen 系 (4) (2) を満たす最高ウェイトについての指標公式を与えている。一方

$$D = \{ \lambda \in P^{++} \mid 0 \leq \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < p \text{ } (\forall \alpha \in \text{単純根}) \}$$

(制限ウェイト)

とおく。 (b) (テニリル積定理) は,

$$(4) \quad \text{ch } L(\lambda + p\mu) = \text{ch } L(\lambda) \cdot \text{ch } L(\mu)^{(p)}$$

($\lambda \in D, \mu \in P^{++}$)

を主張する。但し

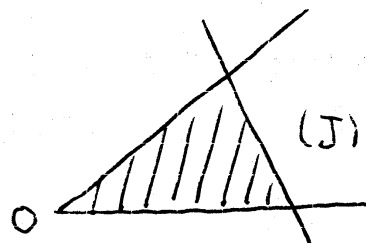
$$\text{ch } M = \sum_{\lambda} m_{\lambda} \cdot e^{\lambda}$$

の時,

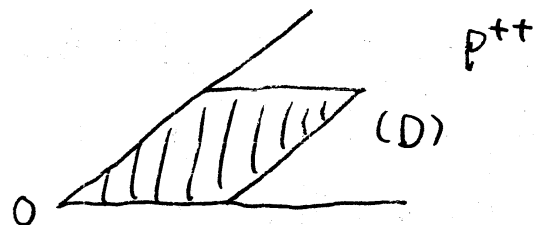
$$\text{ch } M^{(p)} = \sum_{\lambda} m_{\lambda} \cdot e^{p\lambda}$$

と書いた。 二枚より, 制限ウェイトについての指標公式がわかれば, (4) を順に適用することにより全ての指標公式がわか

かることになる。Jantzen条件をみたすウィット・範囲は



図(I)



図(II)

図(I), 制限ウィットは図(II)のようになっている。標数

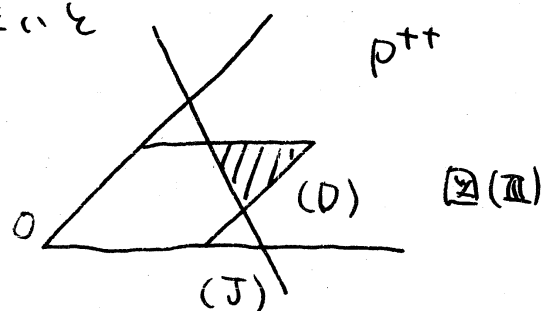
p が長に対してあまり大きくないと

図(III)の様になる。斜線部の

指標公式はしり想からわかる

ない。(これは元々しり想の少

しあかしい所: 3節の予想, 注意参照.)



図(III)

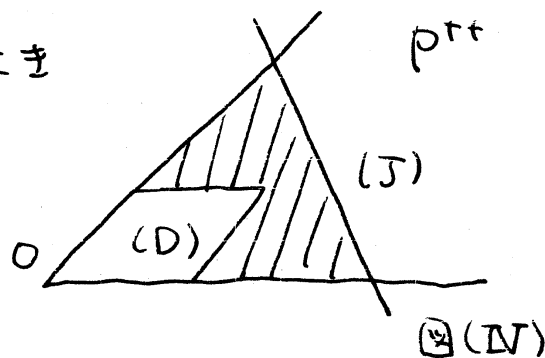
が, 標数 p が長に対して十分大き

ければ, 図(IV)の様になる

制限ウィットに属する指標が

得られ, かつ全ての指標公

式が得られることになる。



図(IV)

ちなみに, 斜線部の指標公式は2通りのやり方で, 即ち

① しり想から直接,

② しり想を (D) に適用した後, テニール補定理を用いて

得られることに注意しよう。もしもしり想が正しければ,

この①②は一致しなければならないのである。

3° 結果. 前節最後の注意に因りて次でわかる。

定理 1. L 予想はテンソル積定理と両立する。つまり

①, ② の指標公式は一致する。

これによつて, L 予想に 1 つ evidence が与えられたことになる。さて, 定理 1 は次の定理 2 から導かれる:
 $A \cap P \ni \lambda$ に対して ($P \geq 0$ は仮定している) $W \in \widetilde{W}$ が $W \cdot \lambda \in D$ を満たす時, W を 制限的 とおぼす。これは P や λ による。一般に支配的な $W \in \widetilde{W}$ に対して, 制限的な $W \in \widetilde{W}$ と $\lambda \in P^{++}$ の組が一意的に存在して,
 $W = t_\lambda W$ となる。

例 2. W_0 ($W_0 \alpha$ は最大元) は, $W_0(-2\rho) = 0 \in D$ であり制限的。 $\lambda \in P^{++}$ に対し $W_\lambda = t_\lambda W_0$ はちょうど上記の分解を与えている。(例 1 参照)

定理 2. $W \in \widetilde{W}$ を制限的な元, $\mu \in P^{++}$ とする。

(よつて $t_\mu W$ は支配的) この時, 次の等式が $\widetilde{W}$ の群環 $\mathbb{Z}[\widetilde{W}]$ 内で成立する。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{y \leq t_{\mu} w} P_{y, t_{\mu} w}(1) \cdot y \\
 (5) \quad &= \prod_{\alpha > 0} (1 - t_{-\alpha})^{-1} \left(\sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)} t_{x(\mu + \rho) - \rho} \right) \\
 & \quad \times \left(\sum_{z \in W} P_{z, w}(1) \cdot z \right)
 \end{aligned}$$

定理 2 $\Rightarrow$ 定理 1 の略証. まず $t_{\mu} w$ ($\mu \in P^{++}$, $w \in \tilde{W}$ 制限的) が Jantzen 条件 (2) を満たすならば,

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \text{ch } L(t_{\mu} w \cdot \lambda) (= \text{ch } L(w \cdot \lambda + \rho \mu)) \\
 &= \text{ch } L(w \cdot \lambda) \cdot \text{ch } M(\mu)^{(P)}
 \end{aligned}$$

であることが, フェニール種定理 (4) と linkage principle [A] より簡単にわかる。さて $\text{ch } L(w \cdot \lambda)$ に対して予想が成立しているとする。 (6) と Weyl の指標公式 (1) より,

$$\begin{aligned}
 & \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-\alpha}) \cdot \text{ch } L(t_{\mu} w \cdot \lambda) \\
 &= \left(\sum_{\substack{y \in \tilde{W}, \text{ 支配的} \\ y \leq w}} (-1)^{\ell(w) - \ell(y)} P_{y, w}(1) \sum_{z \in W} (-1)^{\ell(z)} e^{z y \cdot \lambda} \right) \\
 & \quad \times \left(\sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)} e^{x(\mu + \rho) - \rho} \right) \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-\rho \alpha})^{-1}.
 \end{aligned}$$

ここで定理2の公式(5) ($\in \mathbb{Z}[\tilde{W}]$ の自己同型 $y \mapsto (-1)^{l(y)} y$, v を取ったもの), 及び $K-L$ 多項式の性質 $[K-L; (2.3.9)]$ を前式に適用すると,

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha}) \cdot \text{ch } L(t_{\mu W} \cdot \lambda) \\ = \sum_{\substack{y \in \tilde{W}, \text{ 支配的} \\ y \leq t_{\mu W}}} (-1)^{l(t_{\mu W}) - l(y)} P_{y, t_{\mu W}}(1) \sum_{z \in W} (-1)^{l(z)} e^{z y \cdot \lambda}$$

つまり, L 予想が $\text{ch } L(t_{\mu W} \cdot \lambda)$ に対しても成立していることがわかる。(証明終)

結局, L 予想は,

予想': 制限的 $w \in \tilde{W}$ に対し

$$(7) \quad \text{ch } L(w \cdot \lambda) = \sum_{\substack{y \in \tilde{W}, \text{ 支配的} \\ y \leq w}} (-1)^{l(w) - l(y)} P_{y, w}(1) \text{ch } M(y \cdot \lambda)$$

に帰着させることになる。(この予想'の形ならば, 任意の $P \geq 0$ に対して, 2節の最後で述べた“おかしい”事態は起らない。)

注意. Lusztig が [L.1] で彼の予想を (より自然な形
の) 予想' よりも "強い" 形で提出した理由として [L.2]
が挙げられる。彼は [L.2] で "一般の位置" にある $\lambda \in$
 P^{++} に対して $M(\lambda)$ の既約分解のパターンを与える予想,
(generic decomposition pattern 予想) を与えた後に,
 L 予想 $\Rightarrow$ g.d.p. 予想を示している。しかしゆめゆめ
結果 (定理2) を用いると, 逆に g.d.p. 予想 $\Rightarrow$ 予想'
(但し標数 $\neq p$ で) を証明することが出来る。 ([Ka.2;
Theorem 5.6] 参照)

さて, 定理2は, 支配的な $w \in \tilde{W}$ の $K-L$ 多項式の
 $q=1$ の値 $P_{y,w}(1)$ が制限的な $w' \in \tilde{W}$ の $P_{y',w'}(1)$
より得られることを示しているが, 寧ろ q の多項式として,
 $P_{y,w}(q)$ が $P_{y',w'}(q)$ より計算されることがわかる,
([Ka.2; Theorem 4.2])。しかしこの結果を述べる
にはいささか煩わしい準備が必要なので, 詳細は [Ka.2]
にゆずれ, ここではその特別な場合として, $w = w_\lambda$ ($\equiv$
 $t_\lambda w_0$, $\lambda \in P^{++}$) の場合 (Kostant 重複度公式の q -
類似 [Ka.1]) を説明する。定理2で $w = w_0$ とおく。

$P_{z, w_0}(q) = 1$ ($\forall z \leq w_0$, i.e. $z \in W$)
であること ([K-L]) より, Weyl の指標公式 (1) を

用い2

(Lusztig [L.3]) $\nu, \mu \in P^{++}$ に対し

$$(7) \quad P_{w\nu, w\mu}(1) = \dim M(\mu)^\nu$$

($M(\mu)$ の μ のウェイト μ の重複度)

がわかる。(7)式の右辺はよく知られた Kostant による
 重複度の式で記述されるが、ここで ν の q -類似を考えて
 みよう。 $P: P \rightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ (Kostant の割函数の
 q -類似) を、 $R^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ とし

$$p(\kappa) = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N \\ \kappa = n_1 \alpha_1 + \dots + n_N \alpha_N}} q^{-n_1 - \dots - n_N}$$

で定義し、 $\text{ht}: P \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ を

$$\text{ht}(\kappa) = \langle \kappa, \rho^\vee \rangle, \quad \rho^\vee = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha^\vee$$

とおけば、

定理3 $\mu, \nu \in P^{++}$ に対し

$$P_{w\nu, w\mu}(q) = q^{\text{ht}(\mu-\nu)} \sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)} p(x(\mu+\rho) - (\nu+\rho))$$

この定理に $q \rightarrow 1$ とすると、右辺は Kostant 重複度の式になる。

また, $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{u}$ - $\mathfrak{t}$ から R に対応する単純 $\mathbb{C}$ -環 $\mathbb{C}/\mathbb{C}$, $\mathfrak{u}$ を $\mathfrak{g}$ の巾零元全体で作る, $\mathfrak{g}$ の巾零元代数を生成, $\mathbb{C}[\mathfrak{u}]$ を $\mathfrak{u}$ の座標環 とおく. $\mathbb{C}[\mathfrak{u}]$ は自然な次数付け,
 $\mathbb{C}[\mathfrak{u}] = \bigoplus_{i \geq 0} \mathbb{C}[\mathfrak{u}]_i$ を持ち, $\mathfrak{g}$ は 各次数部分に作用している. ここで, $\lambda \in P^{++}$ に対し

$$d_\lambda(q) = \sum_{i \geq 0} q^i \cdot (\mathbb{C}[\mathfrak{u}]_i: \text{中での } \lambda \text{ を最高 } \mathbb{Z}\text{-}\mathfrak{u}\text{-}\mathfrak{t}\text{-}\mathfrak{g} \text{ の既約表現の重複度})$$

とおくと, Hesselink, Peterson ([H]) によれば,

$$d_\lambda(q^{-1}) = \sum_{x \in W} (-1)^{l(x)} p(x(\lambda + \rho) - \rho).$$

より, 定理 3 より,

$$d_\lambda(q^{-1}) = q^{-l(\lambda)} p_{w_0, w_\lambda}(q)$$

がわかることになる. (但しこの式の“意味”はわかっていない).

References

- [A] H. H. Andersen, The strong linkage principle, J. Reine. Angew. Math. 315 (1980), 53-59.
- [B] N. Bourbaki, "Groupes et algebres de Lie", Chaps. IV-VI, Hermann, Paris 1968.
- [H] W. H. Hesselink, Characters of the nullcone, Math. Ann.

252 (1980), 179-182.

- [J] J.C. Jantzen, Zur Charakterformel gewisser Darstellungen halbeinfacher Gruppen und Lie-Algebren, Math. Z. 140 (1974), 127-149.
- [Ka.1] S. Kato, Spherical functions and a q -analogue of Kostant's weight multiplicity formula, Invent. Math. 66 (1980), 461-468.
- [Ka.2] S. Kato, On the Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups, Preprint.
- [K-L] D. Kazhdan and G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. 53 (1979), 165-184.
- [L.1] G. Lusztig, Some problems in the theory of finite Chevalley groups, Proc. Symp. Pure Math. 37 (1980), 313-317.
- [L.2] G. Lusztig, Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition pattern, Adv. in Math. 37 (1980), 121-164.
- [L.3] G. Lusztig, Singularities, character formulas, and a q -analog of weight multiplicities, Asterisque, to appear.
- [S] R. Steinberg, Representations of algebraic groups, Nagoya Math. J. 22 (1963), 33-56.

[川渡] 加藤, Chevalley 群のモジュラー表現入門.

「川渡ロミナ (代数群) 報告集, 1980, 1-44.

[横決] 加藤, Chevalley 群のモジュラー表現入門.

「群および環の表現とその応用」シンポジウム報告集 (横決), 1981, 128-159.