

複合系におけるカタストロフーとカオス

神戸大学工学部 島田哲夫

平井一正

三菱重工業

岩井正隆

1. はじめに

物理系,化学系,生態系,及び工学系など種々の非線形システムの分野において,システムのパラメータの,微小変化によって平衡点の個数に変化する現象(初等カタストロフーあるいは単にカタストロフーとよばれる)や,確定システムでありながら一見確率システムであるかのようなふるまいを呈する現象(カオス)があり,種々の分野で研究がなされている。

一方非線形波動系や非線形格子系の応答に粒子的な性質を示すソリトンと呼ばれる孤立波形が生じる現象が知られている。

本論文では単一ループフィードバック系が,ある種の関係で連結している複合系において生ずるカタストロフー,カオス,及びソリトンなどの非線形現象について調べることにする。対象とする系は具体的には,一定地域の中で多種の個体が連鎖的に生存している種族モデルである。

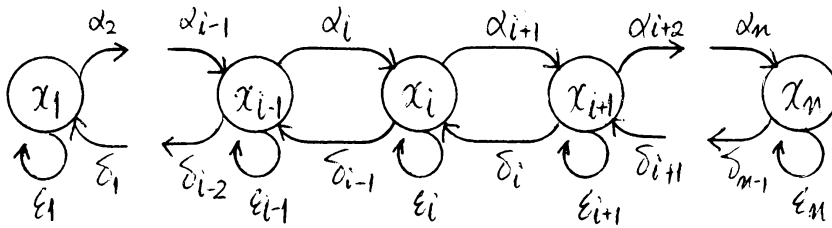
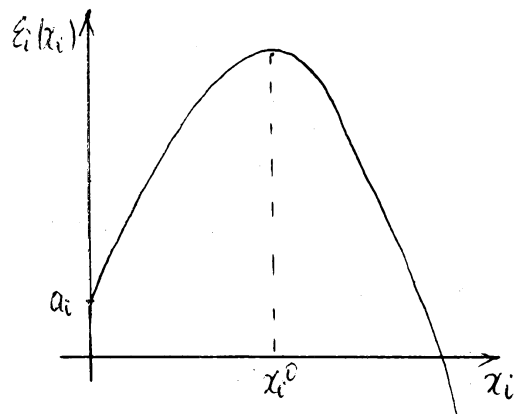


Fig. 1.1.1 連鎖型の生態系

x_i : 生物の個体数
 $\alpha_i x_{i-1}$: 捕食することによる個体数の増加率
 $\delta_i x_{i+1}$: 捕食されることによる個体数の減少率
 $\epsilon_i(x_i)$ 増加率 (個体数の変動に依存)

Fig. 1.1.1 に示すように二種の生物の単位時間あたりの出会いの頻度は、それらの個体数の積に比例すると考えると被捕食者の単位時間あたりの減少率は $\delta_i x_{i+1}$ 、又捕食による捕食者の増加率は $\alpha_i x_{i-1}$ となる。

また捕食者、被捕食者が存在しない場合の増加率 $\epsilon_i(x_i)$ は i という生物をとりまく環境の容量を考慮するということ意味で Fig 1.1.2 のように x_i^0 まで増加するが x_i^0 以降は減少する型と

Fig 1.1.2 増加率 $\epsilon_i(x_i)$

する。これらから対象とするシステムは、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \times (\quad \quad \quad \varepsilon_1(x_1) - \delta_1 x_2 \quad) \\ \dot{x}_2 &= x_2 \times (\alpha_2 x_1 + \quad \quad \quad \varepsilon_2(x_2) - \delta_2 x_3 \quad) \\ &\vdots \\ \dot{x}_i &= x_i \times (\alpha_i x_{i-1} + \quad \quad \quad \varepsilon_i(x_i) - \delta_i x_{i+1} \quad) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_{n-1} \times (\alpha_{n-1} x_{n-2} + \quad \quad \quad \varepsilon_{n-1}(x_{n-1}) - \delta_{n-1} x_n \quad) \\ \dot{x}_n &= x_n \times (\alpha_n x_{n-1} + \quad \quad \quad \varepsilon_n(x_n) \quad) \end{aligned} \right\} (1.1)$$

とあらわされる。

ここで、 $\varepsilon_i(x_i) = \beta_i x_i - \gamma_i x_i^2 + a_i$ 、であり、 $\alpha_i > 0$ 、 β_i 、 $\gamma_i \geq 0$ 、 $a_i, \delta_i > 0$ はシステムのパラメータである。

2. カタストロフー

2.1 基本式

カタストロフー理論から退化平衡点となるパラメータのカタストロフー集合となる。

システムの平衡点は、対象システム(1.1)を書き換えて $\dot{x}_i = 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) とおくことにより

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ & \bigcirc & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \bigcirc & \\ & & & & x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x_1) \\ \varepsilon_2(x_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, \bar{\varepsilon}_1 & & & \\ \alpha_2, 0, -\bar{\varepsilon}_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{n-1}, 0, -\bar{\varepsilon}_{n-1} & \\ & & & \alpha_n, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

(増加率) (結合関係)

を満足する。さらに退化平衡点となるためには、

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1 \varepsilon_1(x_1)}{\partial x_1}, -\bar{\varepsilon}_1 x_1 & & & \\ \alpha_2 x_2, \frac{\partial x_2 \varepsilon_2(x_2)}{\partial x_2}, -\bar{\varepsilon}_2 x_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_n x_n, \frac{\partial x_n \varepsilon_n(x_n)}{\partial x_n} & -\bar{\varepsilon}_{n-1} x_{n-1} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.2)$$

と同時に満足しなければならない。

ゆえに (2.1), (2.2) より $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ を消去することによってカヲフトロフィ-集合を得る。

2.2 カタストロフー集合

ここではシステムの次数を3次とし, $\bar{a}_1 = P$, $\bar{a}_2 = \ell$ とおき, パラメータ (P, ℓ) により複合システムの結合の変化の一面とカタストロフー現象を通じてとらえる。

(1.1)式において, $n=3$, $\alpha_i = \beta_i = \rho_i = 1$, $a_i = 0$, とおくと

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \times (x_1 - x_1^2 - P x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2 \times (x_1 + x_2 - x_2^2 - \ell x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_3 \times (x_2 + x_3 - x_3^2) \end{aligned} \right\} (2.3)$$

となる。3種間の関係を図示する。

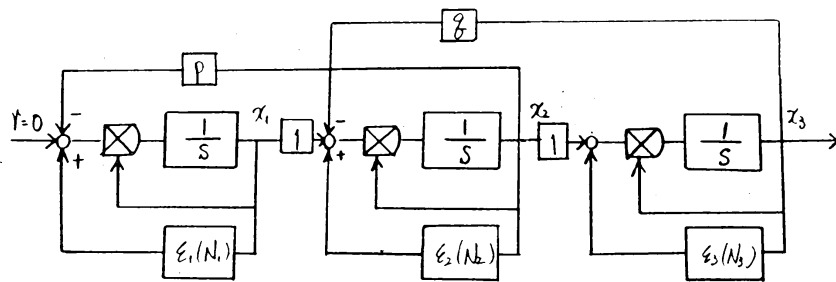


Fig. 2.2.1 3次複合システム

次に (2.3) の平衡点は

$$\begin{aligned} E_1 &= (0, 0, 0), & E_5 &= (1, 0, 0) \\ E_2 &= (1, 0, 0), & E_6 &= (0, s^2 - s, s) \\ E_3 &= (0, 1, 0), & E_7 &= (t^2 - t, t, 0) \\ E_4 &= (0, 0, 1), & E_8 &= (u^4 - 2u^3 + (\ell + 1)u, u^2 - u, u) \end{aligned}$$

ここで s, t, u はそれぞれ $s^3 - 2s^2 + (q+1) = 0$, $t^4 - 2t^3 + (p+1) = 0$,
 $(u^4 - 2u^3 + (q+1))^2 + (u^4 - 2u^3 + (q+1)u) + p(u^2 - u) = 0$ の解である。
 $x_1 = 0$ とし, パラメータ q を変化させるときの x_2 - x_3 平面での平衡点
 の変化を示すと次のようになる。

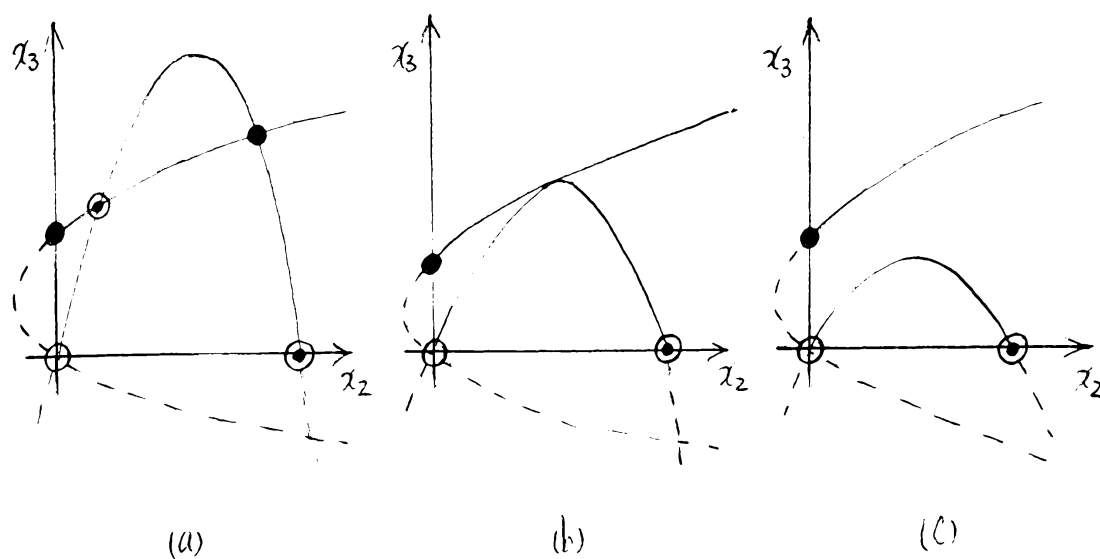


Fig 2.2.2 平衡点

(●: 安定平衡点, ○: 不安定平衡点, ⊙ サドル)

パラメータ q を増加させていくと (a) から (b), (c) と移るが, (b) で
 カタストロフィーが起こる。

(2.3) 式に(2.1), (2.2)式を適用して (x_1, x_2, x_3) を消去すると, Fig.2.2.3 に示すようなカタストロフィー集合 (p, q) が得られる。

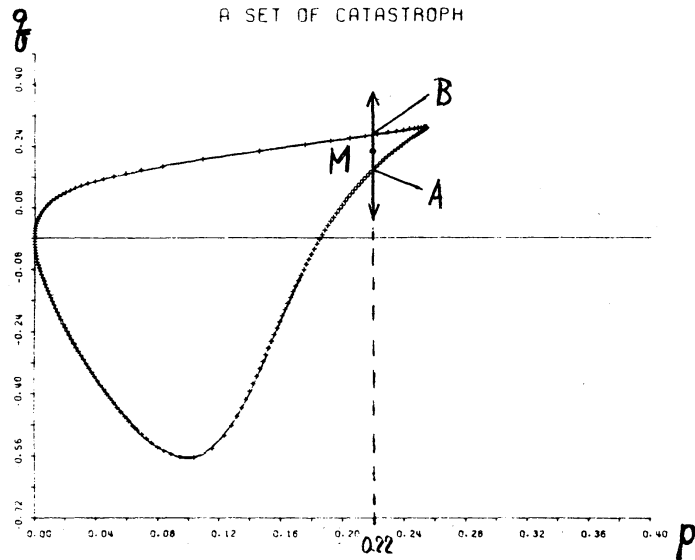


Fig 2.2.3 カタストロフィー集合 (p, q)

いま点Mのパラメータの値から p を一定として q を増やしていけばBでカタストロフィーが起こり, また初期値を変えて q を減らしていけばAでもカタストロフィーが起こる。このときの状態 x_1 と q の関係を示すと Fig 2.2.4 のようになる。Fig 2.2.5 及び 2.2.6 はそれぞれ x_2 と q , x_3 と q の関係を示す。

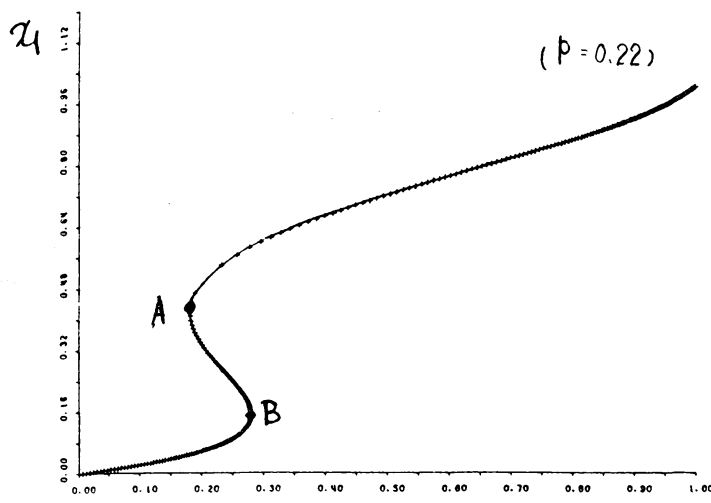


Fig. 2.2.4 状態とパラメータ
($x_1 - g$)

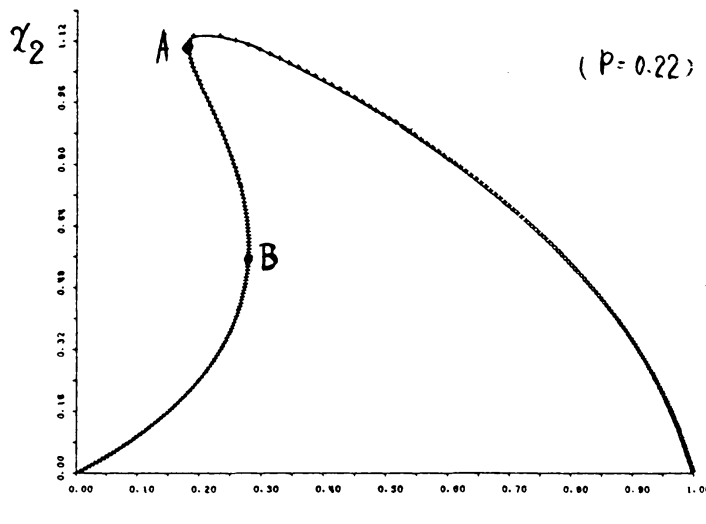


Fig. 2.2.5 状態とパラメータ
($x_2 - g$)

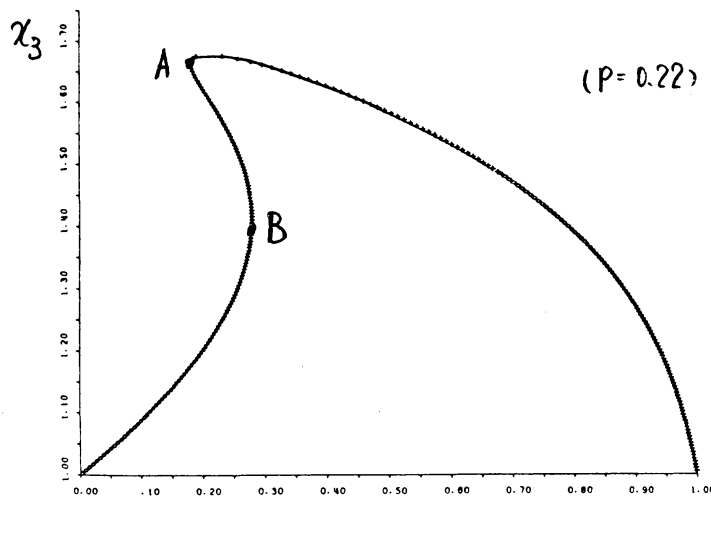


Fig. 2.2.6 状態とパラメータ
($x_3 - g$)

3. ソリトンとカオス

捕食者と被捕食者が連鎖的な関連を持つボルテラ型の方程式がソリトン解をもつことは Daikoku 等⁽¹⁾ によって示されているが、ここではシステムの次元をあげ、パラメータを変化させると、各サブシステムのふるまいは複雑なものとなり、ソリトン解から、さらにはカオスに至ることをシミュレーションで確かめる。

(1.1) 式において $\beta_i = \gamma_i = 0$, $\alpha_i = \delta_i = 1$, $a_n = a$, $a_i = 0$ ($i=2, \dots, n-1$),

$b_n = -b$ とおくと

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \times (a - x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2 \times (x_1 - x_3) \\ &\vdots \\ \dot{x}_i &= x_i \times (x_{i-1} - x_{i+1}) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_{n-1} \times (x_{n-2} - x_n) \\ \dot{x}_n &= x_n \times (x_{n-1} - b) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

3.1 ソリトン

ソリトンは粒子的な性質を示す孤立波のことである。数学的には、ある種の非線形波動方程式の解として与えられ、次の諸性質をもつ⁽²⁾。

(a) 孤立波の伝わる速さは波高値が大きいほど速い。

(b) 波高値 A_1 の速いソリトンと波高値 A_2 の速いソリトンが追いついて追突するとき、ふたつのソリトンが完全に重なったときの全体の波の高さは、 $A_1 + A_2$ になるのではなく A_2 より小さくなる。その後ふたつのソリトンは非線形相互作用にもかかわらず、完全に分離して、もとの姿とまったく同じになる。

式(3.1)において $n=50$, $a=6.0$, $b=2.0$, 初期値 $x_{10}=x_{20}=x_{30}=0.1$ としたときの x_{14} , x_{16} , x_{24} , x_{28} , x_{36} , x_{40} のデジタルシミュレーションによる時間応答を Fig 3.1.1 (a), Fig 3.1.1 (b) に示す。波高値 125 の A_2 は波高値 37 の A_1 より速く、また追突して重なった時の A_3 は A_2 より小さい。さらに Fig 3.1.1 (b), x_{28} のふるまいでわかるように衝突後は、衝突前の波形と同じ形で分離している。これからわかるようにこのシステムではソリトンが発生している。

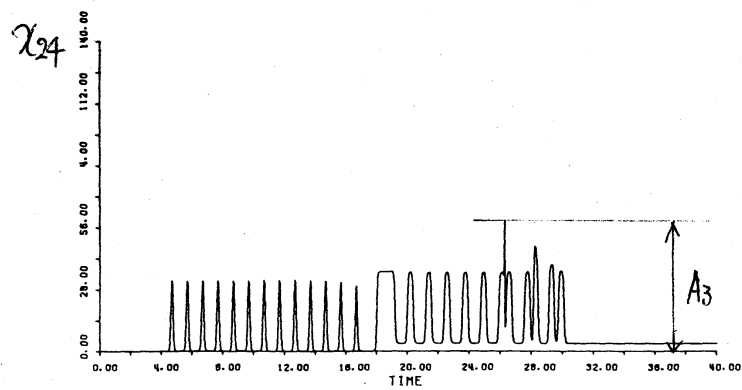
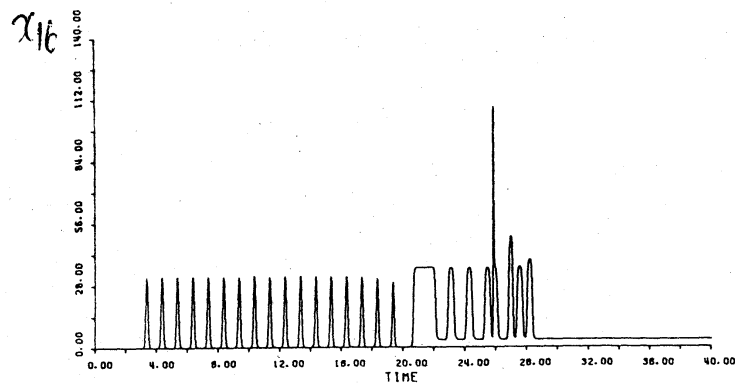
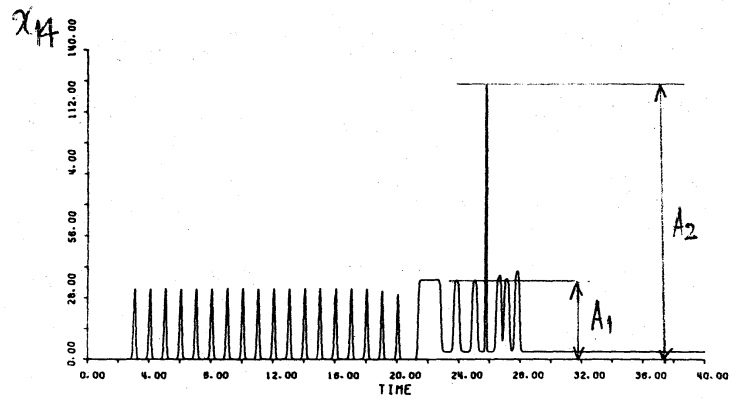


Fig. 3.1.1 (a) ソリトン (x_{14} , x_{16} , x_{24})

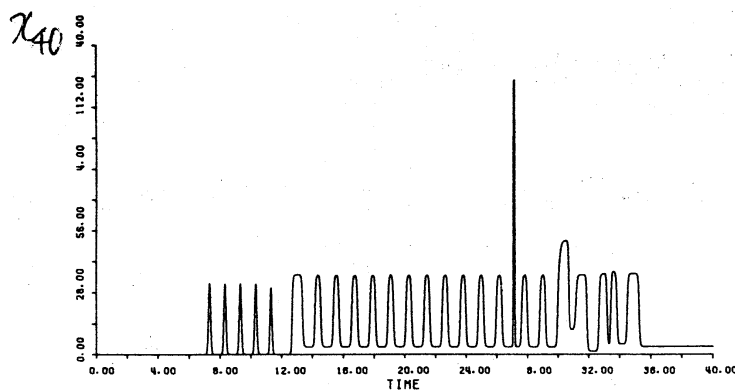
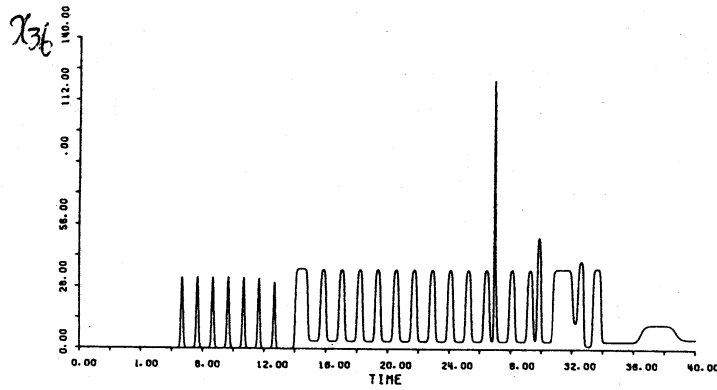
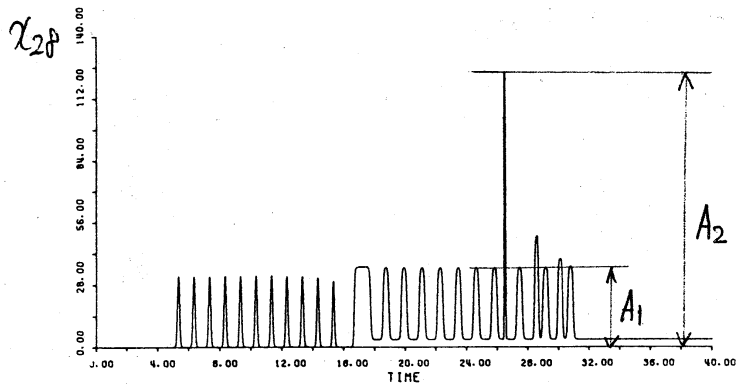


Fig. 3.1.1 (b) γ 11 ト $\checkmark$ (x_{28} , x_{36} , x_{40})

3.2 カオス

システムのパラメータを変化させた場合、各サブシステムのふるまいは複雑なものになり歪んだ波形になる。すなわち、式(3.1)

において $n=50$,

初期値 $x_{i0} = 0.1$

($i=1, 2, \dots, n$), $a=10.0$,

$b=5.0$ としたとき

の x_{10} の時間応答

を Fig 3.2.1, さらに

a, b を $20.0, 10.0$ と

したものを Fig 3.2.2

に示す。

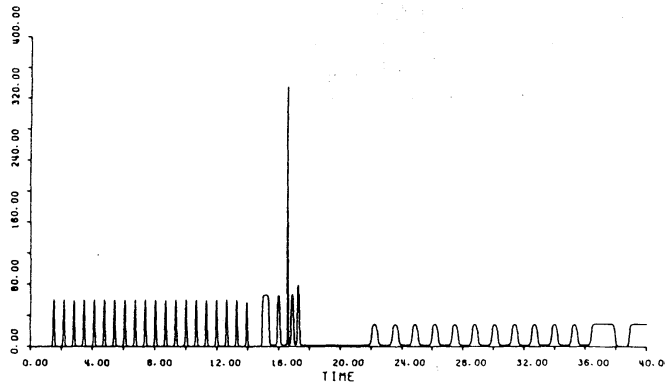


Fig 3.2.1 時間応答 ($a=10.0, b=5.0$)

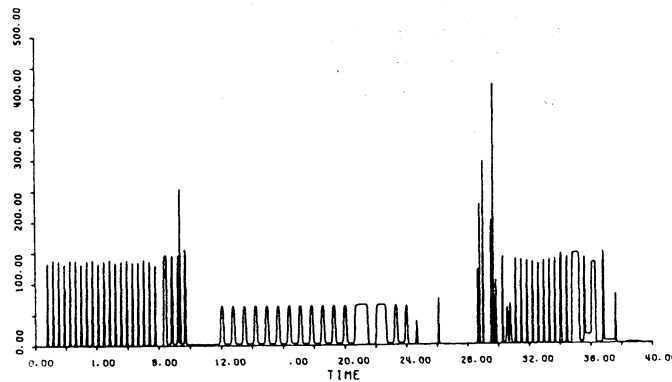


Fig 3.2.2 時間応答 ($a=20.0, b=10.0$)

このようにパラメータが増加すればソリトンの波高値が大きくなり、発生間隔が狭くなることかわかる。

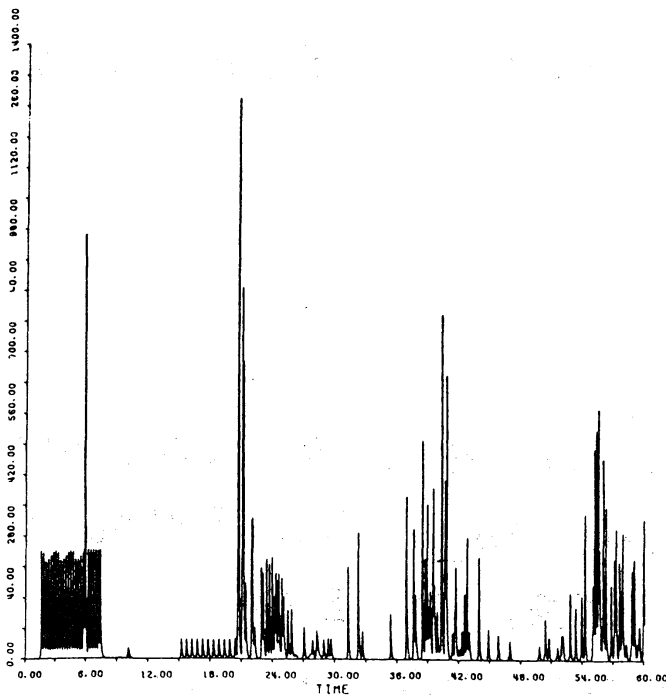


Fig 3.2.3 時間応答 ($a=37.75178$, $b=13.12156$)

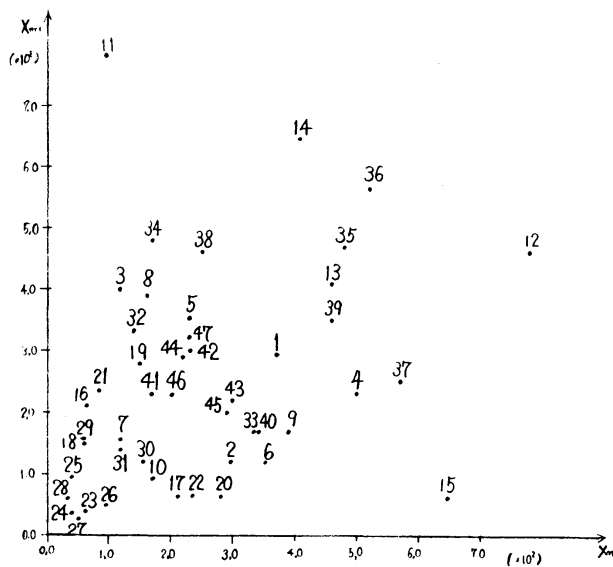


Fig. 3.2.4 ロ-レンツプロット

さらに $a=37.75178$,
 $b=13.12156$ にすると Fig 3.2.3
 のように乱雑な挙動を示
 す。この場合の定常状
 態のロ-レンツプロットを
 とると Fig 3.2.4 のよう
 になるが、これはカオス
 が発生していると考え
 られる。

6. おわりに

(1.1) 式に示す連鎖型
 の複合系において系の
 次数が3の場合について
 発生するカタストロフ
 を検討した。さらに系
 の次数を増加させた場
 合にソリトンが発生す
 ることを示した。ま
 たパラメータを変化せ
 せしめ、ソリトンの波高
 値が小さく発生間隔が

狭くなり、やがてカオスが発生するということがシミュレーション結果よりわかった。

4. 参考文献

- [1] Daikoku, K : Computer Experiments on New Lattice Solution
Propagating in Volterra's System : J. J. A. P. Vol.14 No.3 (1975)
- [2] 広田良吾 : ソリトン理論における直接法
月刊フィジックス Vol.2, No.4 (1980)
- [3] 岩井, 平井, 潮 : 非線形制御系のカタストロフィー
第25回 システムと制御研究発表講演会 (1980)