

自己同型群を持つ Riemann 面の Fuchs 群について

愛知産業大学経営学部 木村秀幸 (Hideyuki Kimura)

Faculty of Business Administration

Aichi Sangyo University

浜松大学経営情報学部 栗林 泉 (Izumi Kuribayashi)

Faculty of Administration and Informatics

Hamamatsu University

一般に自己同型群を持つ Riemann 面の研究ではその方程式が有効に用いられる。これに対して、本論文では方程式を用いずに自己同型群を持つ Riemann 面を調べる方法について考える。具体的には § 1 で与える Fuchs 群が定める Riemann 面の周期行列を決定する。このため § 2 では、この Fuchs 群が定める Riemann 面の標準ホモロジー基底を構成し、さらにこの Riemann 面が許す自己同型群のホモロジー群への作用を決定する。そして § 3 では、§ 2 で決定したホモロジー群への作用で不変な行列を求めることにより、周期行列を決定する。

§ 1 . Fuchs 群の構成

g を 2 以上の整数とする。単位円板 U 内に点 $z = \sqrt{\frac{\sqrt{2} \sin \frac{g-3}{4(g+1)}\pi + 1}{\sqrt{2} \sin \frac{g+5}{4(g+1)}\pi + 1}} \times e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{g+1}}$ をとり、

$w = |z|$ とおく。このとき、原点 O と w, z を頂点に持つ双曲三角形は内角 $\pi/(g+1)$ 、 $\pi/4$ 、 $\pi/4$ を持つ二等辺三角形となる。また、 $O, z, we^{2\pi\sqrt{-1}/(g+1)}$ も内角 $\pi/(g+1)$ 、 $\pi/4$ 、 $\pi/4$ を持つ二等辺三角形となる。

四角形 $O w z we^{2\pi\sqrt{-1}/(g+1)}$ を辺 $wz, z we^{2\pi\sqrt{-1}/(g+1)}$ の中点 P_1, P_2 および頂点 z を固定する $\text{Aut}(U)$ の位数 2 の元で写像し、さらにそれらの図形を原点を固定する $\text{Aut}(U)$ の位数 $g+1$ の元により繰り返し写像することにより、最初に定めた二等辺三角形の $8(g+1)$ 個のコピーからなる図形ができる。この図形を変形して凸 $5(g+1)$ 角形を作る (図 2 は $g=4$ の場合の図)。

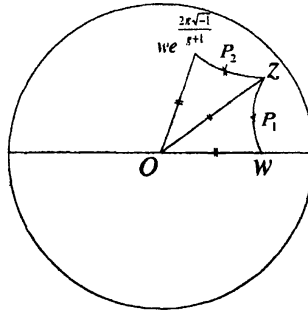


図 1

この $5(g+1)$ 角形の辺に図 2 の要領で名前

$1', 1'', 2, 3, 4, 5, 6, 6', 7, 8, 9, 10, \dots, (5g+1)', (5g+1)''$,

$5g+2, 5g+3, 5g+4, 5g+5$ をつけ (ただし、 $(5i+1)' \cup (5i+1)''$ ($i=0, \dots, g$) は 1 本の線分となる)、次のように辺の対応を与える:

$$(5i-4)' - 5i \quad (i=1, 2, \dots, g+1)$$

$$(5i-4)'' - (5i-8) \quad (i=1, 2, \dots, g+1)$$

$$(5i-2) - (5i+4) \quad (i=1, 2, \dots, g+1)$$

ただし、辺の名前が $5g+5$ より大きい、あるいは 1 より小さい場合には $\text{mod } (5g+5)$ で考える。

このとき、 $5(g+1)$ 角形の対応する辺を同一視する 1 次変換全体は Poincaré の定理から Fuchs 群 Γ を生成することがわかる。そして $5(g+1)$ 角形の双曲的面積から U/Γ は種数 g の compact Riemann 面となることがわかる。

命題 1 原点を固定する $\text{Aut}(U)$ の位数 $g+1$ の元 (i.e. $2\pi/(g+1)$ 回転) を $\tilde{b}_0$ 、図 1 の点 P_1, P_2 を固定する $\text{Aut}(U)$ の位数 2 の元を $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ とする。 $5(g+1)$ 角形の頂点 $(5g+5)_+$ (図 2 では頂点 25_+ 、頂点の名前については § 2 参照) を固定する位数 $2(g+1)$ の元 (i.e. $\pi/(g+1)$ 回転) を $\tilde{b}_3$ とする。このとき、 $\tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ は $\text{Aut}(U/\Gamma)$ の元 b_0, b_1, b_2, b_3 を定める。そして

$$\langle b_0, b_1, b_2, b_3 \rangle \cong \langle b_3, b_3 b_2 | b_3^{2(g+1)} = (b_3 b_2)^4 = (b_3 \times b_3 b_2)^2 = (b_3^{-1} \times b_3 b_2)^2 = 1 \rangle \cong (2(g+1), 4 | 2, 2)$$

が成り立つ。

注意 $(2(g+1), 4|2, 2)$ は位数 $8(g+1)$ の非可換群である。また、位数 2 の自己同型写像 $b_0 b_1 b_2$ が不動点を $2g+2$ 個持つので U/Γ は超楕円的。

§ 2 . 準備

記号 $5(g+1)$ 角形の辺を構成する線分 i の端点で線分 $i+1$ の端点でもあるものを i_+ 、線分 $i-1$ の端点でもあるものを i_- で表す。従って、 $(i+1)_- = i_+$ が成り立つ。

命題 2 Γ によって

- (1) $3_+, 8_+, 13_+, \dots, (5g+3)_+$ の $g+1$ 個の頂点は同一視される、
 - (2) $5_+, 10_+, 15_+, \dots, (5g+5)_+$ の $g+1$ 個の頂点は同一視される、
 - (3) $1'_+, 6'_+, 11'_+, 16'_+, \dots, (5g+1)'_+$ の $g+1$ 個の頂点は同一視される、
 - (4) $(5i-4)'_+, (5i-1)_+, (5i-8)_+$ の 3 個の頂点は同一視される ($i=1, 2, \dots, g+1$)。
- (§ 1 で定めた辺の対応により $(5i-4)_-$ と $(5i)_+$ 、 $(5i-4)'_+$ と $(5i)_-$ 、 $(5i-4)'_-$ と $(5i-8)_+$ 、 $(5i-4)'_+$ と $(5i-8)_-$ 、 $(5i-2)_-$ と $(5i+4)_+$ 、 $(5i-2)_+$ と $(5i+4)_-$ が同一視されることからわかる。)

命題 3 U/Γ 上の閉曲線 $\kappa_1, \dots, \kappa_{2g}$ を次のように定める。

κ_{2i-1} を U 内の始点が $(5i-4)'_+$ 、終点が $(5i-1)_+$ の双曲的線分が定める閉曲線、 κ_{2i} を U 内の始点が $(5i-4)'_+$ 、終点が $(5g+1)'_+$ の双曲的線分が定める閉曲線とする ($i=1, \dots, g$)。

(図 3 参照) このとき、 $\kappa_1, \dots, \kappa_{2g}$ は U/Γ の標準ホモロジー基底となる。

命題 4 b_0, b_1, b_2, b_3 を命題 1 で定めた U/Γ 上の自己同型写像、 $\kappa_1, \dots, \kappa_{2g}$ を命題 3 で定めた U/Γ の標準ホモロジー基底とする。このとき、 $b_0, b_1, b_0 b_1 b_2, b_3$ は $\kappa_1, \dots, \kappa_{2g}$ に次のように作用する：

$$b_0 \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \kappa_{2g-3} \\ \kappa_{2g-1} \\ \kappa_2 \\ \kappa_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \kappa_{2g-2} \\ \kappa_{2g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & \cdots & & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & -1 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & \kappa_{2g-2} \\ 0 & & \cdots & \cdots & & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \kappa_{2g-3} \\ \kappa_{2g-1} \\ \kappa_2 \\ \kappa_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \kappa_{2g-2} \\ \kappa_{2g} \end{pmatrix},$$

$$b_1 \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_{2g-1} \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_{2g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ -1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & & -1 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_{2g-1} \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_{2g} \end{pmatrix},$$

$$b_0 b_1 b_2 \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_{2g-1} \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_{2g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_{2g-1} \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_{2g} \end{pmatrix},$$

$$b_3^{-1} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \kappa_{2g-3} \\ \kappa_{2g-1} \\ \kappa_2 \\ \kappa_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \kappa_{2g-2} \\ \kappa_{2g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ & & & & & & & & 1 & \kappa_{2g-3} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \kappa_{2g-1} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \kappa_2 \\ & 1 & & & & & & & & \kappa_4 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & & & & \kappa_{2g-2} \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \kappa_{2g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \kappa_{2g-3} \\ \kappa_{2g-1} \\ \kappa_2 \\ \kappa_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \kappa_{2g-2} \\ \kappa_{2g} \end{pmatrix}.$$

上の $2g$ 次正方行列は g 次 symplectic 群の元であり、それぞれ $M(b_0)$ 、 $M(b_1)$ 、 $M(b_0 b_1 b_2)$ 、 $M(b_3^{-1})$ と表す。

§ 3. 周期行列の決定

この § では付録の事実 1 および 2 を利用して U/Γ の周期行列を決定する。

定理 compact Riemann 面 U/Γ の周期行列は (symplectic 群の作用を除き) 次の形となる:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1g} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{g1} & \cdots & p_{gg} \end{pmatrix}$$

ただし、 p_{ij} は次の関係式により定まる。

$$(I) \quad p_{ij} = p_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq g),$$

$$(II) \quad p_{1i+1} = \frac{1}{g+1} \left\{ \frac{1 + \zeta_{2(g+1)}}{1 - \zeta_{2(g+1)}} + \frac{1 + \zeta_{2(g+1)}^{2i+1}}{1 - \zeta_{2(g+1)}^{2i+1}} \right\} \quad (0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor),$$

$$(III) \quad p_{i+1j+1} - p_{ij} = p_{li+1} + p_{1j+1} - p_{11} \quad (1 \leq i, j \leq g-1),$$

$$(IV) \quad p_{1g-i+1} = p_{11} - p_{li+1} \quad (1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor).$$

注意 上記の周期行列は[5, Theorem 2]の周期行列と同一である。

証明 付録の事実 1 より、 U/Γ の周期行列 $\Pi = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq g}$ は命題 4 の $M(b_0)$ 、 $M(b_1)$ 、 $M(b_0 b_1 b_2)$ 、 $M(b_3^{-1})$ の作用により不変である。まず、 Π が $M(b_0)$ の作用によって不変であるための条件を求める。

$$M(b_0) = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ とおくと、 } \beta = \gamma = \mathbf{0},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

となる。このとき、 $\alpha\Pi + \beta = \Pi(\gamma\Pi + \delta)$ が成り立つことは

- (1) $-p_{11} + p_{i+11} = -p_{ig} \quad (1 \leq i \leq g-1)$,
- (2) $-p_{1j} + p_{i+1j} = p_{ij-1} - p_{ig} \quad (1 \leq i \leq g-1, 2 \leq j \leq g)$,
- (3) $p_{11} = p_{gg}$,
- (4) $-p_{1j} = p_{gj-1} - p_{gg} \quad (2 \leq j \leq g)$

が成り立つことと同値であることがわかる。 Π は対称行列なので、(4) 式は(1)、(3) 式から得られる。(2) 式に $j = k+1$ を代入した式と(1) 式から

$$(2)' \quad p_{i+1k+1} - p_{ik} = p_{li+1} + p_{1k+1} - p_{11} \quad (1 \leq i, k \leq g-1)$$

が得られる。そして、(2)' 式から

$$(5) \quad p_{i+1k+1} - p_{1k-i+1} = \sum_{l=2}^{i+1} p_{1l} + \sum_{m=2}^{i+1} p_{1k-i+m} - ip_{11} \quad (1 \leq i \leq k \leq g-1)$$

が得られる。さらに、(5) 式および(1) 式を用いることにより

$$(6) \quad p_{1g-i+1} = p_{11} - p_{li+1} \quad (1 \leq i \leq g-1)$$

が得られる。以上から

$$\alpha\Pi + \beta = \Pi(\gamma\Pi + \delta) \Leftrightarrow (1), (2)', (3), (6)$$

がわかる。(5) 式に $k = g-1$ を代入した式と(6) 式より

$$(7) \quad p_{i+1g} - p_{1g-i} = \sum_{l=2}^{i+1} p_{1l} + \sum_{m=2}^{i+1} p_{1g-1-i+m} - ip_{11} = \sum_{l=2}^{i+1} p_{1l} + \sum_{m=2}^{i+1} (p_{11} - p_{1i-m+3}) - ip_{11} = 0$$

が得られる。(7)式に $i = g-1$ を代入すると(3)式が得られる。以下、(7)式において $1 \leq i \leq g-2$ とする。(7)式に(6)式を代入することにより、

$$p_{i+1g} = p_{1g-i} = p_{11} - p_{1i+2} \quad (1 \leq i \leq g-2)$$

さらに、(6)式に $i=1$ を代入すると

$$p_{1g} = p_{11} - p_{12}$$

が得られるので、(6)式および(7)式から(1)式が得られることがわかった。したがって、

$$\alpha\Pi + \beta = \Pi(\gamma\Pi + \delta) \Leftrightarrow (2)', (6)$$

がわかった。

同様の考察により、 Π が $M(b_0)$ 、 $M(b_1)$ 、 $M(b_0b_1b_2)$ の作用によって不変であるための必要十分条件は(2)', (6)式、すなわち(III)、(IV)式が成立することであることがわかる。

次に、付録の事実2を用いて、 p_{li+1} を決定する。事実2の σ として、 $(b_3^{-1})^{2m+1}$ をとる。

$$M = M(b_3^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \text{とおき、} M^k = \begin{pmatrix} \delta_k & \gamma_k \\ \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix} \text{とおく。このとき、} \text{tr}(\delta_{2m+1} + \gamma_{2m+1}\Pi)$$

($0 \leq m \leq g-1$)を求める。 $\gamma_{2m+1} = (\gamma\delta)^m \gamma$ 、 $\delta_{2m+1} = 0$ なので、簡単な計算により

$$(*) \quad \begin{cases} \text{tr}(\delta_{2m+1} + \gamma_{2m+1}\Pi) = \text{tr}((\gamma\delta)^m \gamma \Pi) = \frac{g+1}{2}(p_{11} - 2p_{1m+1}) & (1 \leq m \leq g-1) \\ \text{tr}(\delta + \gamma\Pi) = \text{tr}(\gamma\Pi) = -\frac{g+1}{2}p_{11} \end{cases}$$

が得られる。一方、 b_3 の不動点における回転角が $\zeta_{2(g+1)}$ 、 $\zeta_{2(g+1)}^2$ 、 $\zeta_{2(g+1)}^{2g}$ であることから、

$$(**) \quad \text{tr}(\rho(b_3^{-1})^{-1}) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \zeta_{2(g+1)}^1 & & & \\ & \zeta_{2(g+1)}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \zeta_{2(g+1)}^{g-1} \\ & & & & \zeta_{2(g+1)}^g \end{pmatrix} \right)^{-1} = -\frac{1 + \zeta_{2(g+1)}}{1 - \zeta_{2(g+1)}}$$

が得られる、ただし、 $\zeta_{2(g+1)} = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2(g+1)}}$ 。(*)、(**)式から(II)式が得られる。証明終

参考文献

- [1] T. Kuusalo and M. Näätänen, Geometric uniformization in genus 2, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **20**, (1995) pp. 401-418.
- [2] H. E. Rauch and J. Lewittes, The Riemann surface of Klein with 168 automorphisms, Problems in Analysis, a symposium in honor of Solomon Bochner, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1970) pp. 297-308.
- [3] J. F. X. Ries, The splitting of some Jacobi varieties using their automorphism groups, Contemporary Math. **201**, (1997) pp. 81-124.
- [4] R. E. Rodríguez and V. González-Aguilera, Fermat's Quartic Curve, Klein's Curve and the Tetrahedron, Contemporary Math. **201**, (1997) pp. 43-62.
- [5] B. Schindler, Period matrices of Hyperelliptic curves, Manuscripta. Math. **78** (1993) pp. 369-380.

付 録

X を種数 $g (\geq 1)$ の compact Riemann 面とする。

周期行列 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$ を $\alpha_i \times \alpha_j = \beta_i \times \beta_j = 0$, $\alpha_i \times \beta_j = \delta_{ij}$ を満たす X の標準ホモロジー基底とする。さらに、 $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ を X 上の正則 1 次微分の基底で $\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij}$ を満たすものとする。このとき、

$$\Pi = \begin{pmatrix} \int_{\beta_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\beta_1} \omega_g \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\beta_g} \omega_1 & \cdots & \int_{\beta_g} \omega_g \end{pmatrix}$$

を X の周期行列と呼ぶ。

事実 0 Riemann の周期関係式および周期不等式より Π は複素対称行列であり、 $\text{Im } \Pi$ は正定値 (Hermite) 行列である。

symplectic 群

$$H_g = \{Z | Z \text{ は } g \text{ 次複素対称行列, } \text{Im } Z \text{ は正定値行列}\}$$

を g 次 Siegel 上半空間、

$$Sp(g, \mathbf{Z}) = \{M \in GL(2g, \mathbf{Z}) | MJ'M = J\}$$

を g 次 symplectic 群と呼ぶ、ただし、 $J = \begin{pmatrix} O & I_g \\ -I_g & O \end{pmatrix}$ 、 I_g は g 次単位行列。

X 上の自己同型写像 σ は

$$\sigma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_g \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_g \end{pmatrix} = M(\sigma) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_g \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_g \end{pmatrix}$$

を満たす $Sp(g, \mathbf{Z})$ の元 $M(\sigma)$ を定める。また、 $Sp(g, \mathbf{Z})$ の元 $M = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ は H_g に次のように作用する ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は g 次正方行列) :

$$\begin{array}{ccc} H_g & \rightarrow & H_g \\ \psi & & \psi \\ Z & \mapsto & (\alpha Z + \beta)(\gamma Z + \delta)^{-1} \end{array}$$

事実 1 X の周期行列 Π は H_g の元であり、 $M(\sigma)$ の上記の作用で不変となる。

表現 ρ $\text{Aut}(X)$ の元 σ は X 上の正則 1 形式全体の空間 $H^1(X) \ni \omega \mapsto \omega \circ \sigma^{-1}$ ($\omega \in H^1(X)$) によって作用する。この作用が定める $\text{Aut}(X)$ の表現を $\rho : \text{Aut}(X) \rightarrow GL(g, \mathbf{C})$ で表す。

事実 2 $\text{tr}(\rho(\sigma)^{-1}) = \text{tr}(\delta + \gamma \Pi)$ が成り立つ、ただし、 $\sigma \in \text{Aut}(X)$ 、 $M(\sigma) = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ 。

事実 2 の証明

$$\Omega^\sigma := \begin{pmatrix} \int_{\sigma(\alpha_1)} \omega_1 & \cdots & \int_{\sigma(\alpha_1)} \omega_g \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\sigma(\alpha_g)} \omega_1 & \cdots & \int_{\sigma(\alpha_g)} \omega_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\alpha_1} \omega_1 \circ \sigma & \cdots & \int_{\alpha_1} \omega_g \circ \sigma \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\alpha_g} \omega_1 \circ \sigma & \cdots & \int_{\alpha_g} \omega_g \circ \sigma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \int_{\alpha_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\alpha_1} \omega_g \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\alpha_g} \omega_1 & \cdots & \int_{\alpha_g} \omega_g \end{pmatrix} \times {}^t \rho(\sigma)^{-1} = {}^t \rho(\sigma)^{-1}$$

が成り立つ。一方、

$$M(\sigma) = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ただし、} \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ は } g \text{ 次正方行列}$$

とすると、

$$\Omega^\sigma = \delta + \gamma \Pi$$

が成り立つ。したがって、

$${}^t \rho(\sigma)^{-1} = \delta + \gamma \Pi$$

さらに、両辺のトレースをとることにより

$$\mathrm{tr}({}^t \rho(\sigma)^{-1}) = \mathrm{tr}(\delta + \gamma \Pi)$$

が得られる。

証明終

図2 $5(g+1)$ 角形 ($g=4$ の場合)

下図のように辺に名前 $1, 1', \dots, 25$ をつける。

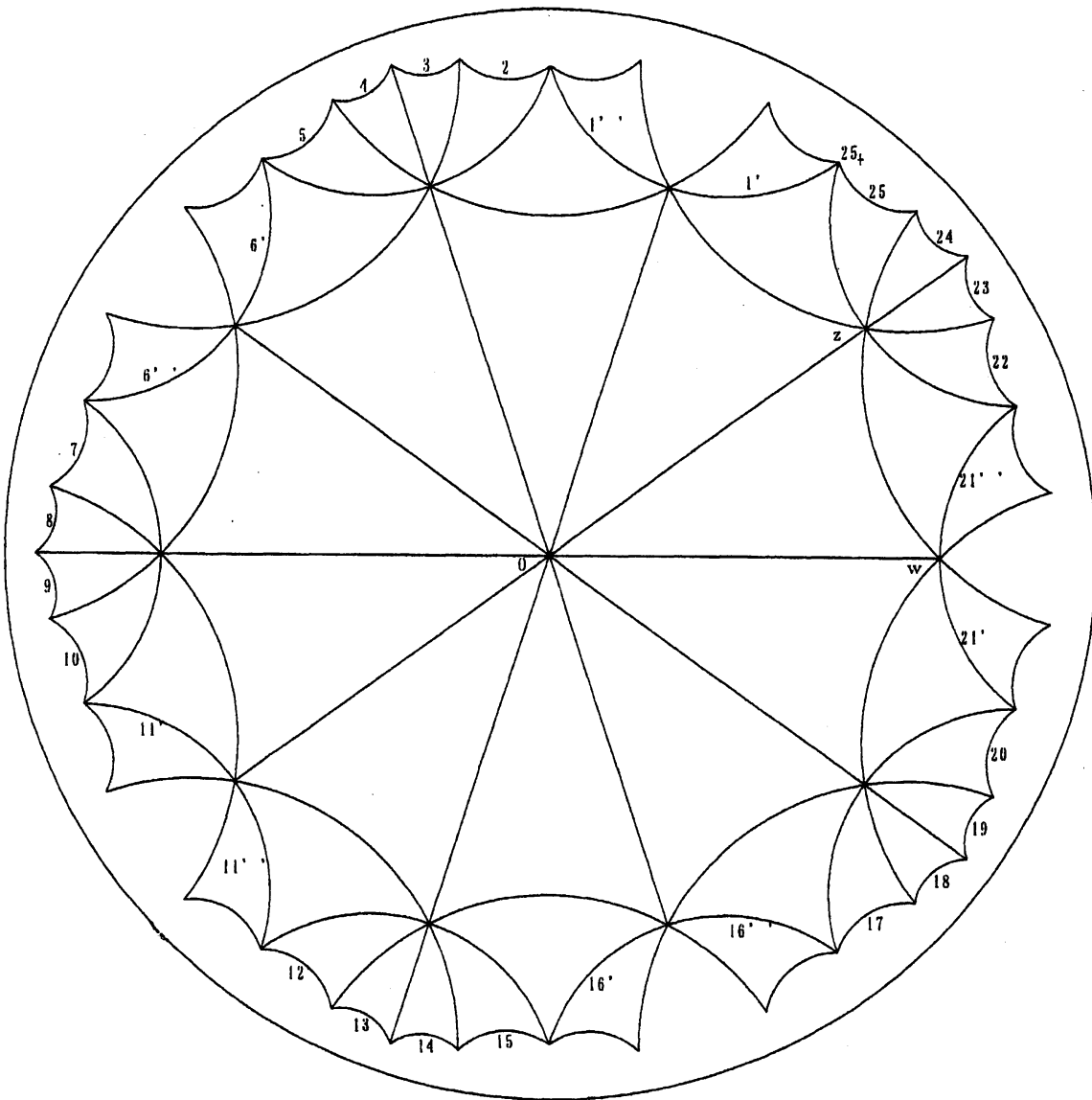


図3 標準ホモロジー基底 ($g=4$ の場合)

$\kappa_1, \dots, \kappa_8$ を下図の曲線が定める U/Γ 上の閉曲線とする。

